Miscelánea Matemática **69** (2019) 75-85 SMM

Sobre la forma geométrica de $SO_3(\mathbb{R})$

Itzel Moctezuma Barona
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero
Chilpancingo, Gro.
itmocba@gmail.com
y
Jesús Romero Valencia
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero
Chilpancingo, Gro.
jromv@yahoo.com

1. Introducción

La teoría de grupos inició con el francés Evariste Galois, su teoría era aplicable a grupos con un número finito de elementos y demostraba la imposibilidad de obtener soluciones de ecuaciones de grado mayor o igual a cinco mediante radicales. En el año 1873 el noruego Marius Sophus Lie dio origen a la teoría de los grupos de transformaciones, lo que actualmente conocemos como teoría de Lie, con aportes posteriores de Weyl, Cartan, Chevalley, Killing, Serre y Harishchandra, entre muchos otros. Esta teoría surgió como intento de trasladar la idea de la teoría de Galois a las ecuaciones diferenciales. En 1888 el alemán Wilhelm Killing sentó las bases de una teoría de estructuras para álgebras de Lie, en particular, clasificó todas las álgebras de Lie simples.

Entre los grupos más interesantes y estudiados están precisamente los grupos de simetrías, los cuales consisten de todas las simetrías de una figura, como por ejemplo las de un polígono regular P de n lados, un cubo C o la esfera $\mathbb{S}^2$. Para el caso de P, se tiene que su grupo de simetrías es precisamente el diédrico D_n, que consta de n rotaciones alrededor de su centro y de n reflexiones respecto a sus ejes de simetría; el de C es de orden 48 con 24 rotaciones y 24 reflexiones; mientras que el de la esfera es el grupo ortogonal $O_3(\mathbb{R})$.

Un caso especial de las simetrías son las rotaciones, las cuales forman un subgrupo. Además, cada rotación tiene la propiedad de que

Palabras clave: Grupo matricial, álgebra de Lie, aplicación exponencial, difeomorfismo.

al aplicarse no cambia la orientación; lo cual hace considerarlas como un subconjunto especial de las isometrías de $\mathbb{R}^n$. Los ejemplos más comunes los tenemos en las rotaciones que dejan invariante alguna figura plana (como algún polígono) o de algún cuerpo en el espacio euclidiano de dimensión 3. Es un problema interesante caracterizar dicho grupo para cada caso, así por ejemplo, para un polígono regular de n lados su grupo de rotaciones resulta ser cíclico de orden n, el del cubo es isomorfo a S_4 (el grupo de permutaciones de 4 elementos) y el de la esfera $\mathbb{S}^2$ es el grupo especial ortogonal $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

El grupo especial ortogonal $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, formado por transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ (matrices $n \times n$ con entradas reales) que preservan ángulos, normas y orientación, puede identificarse con un conjunto de aplicaciones de la esfera unitaria en sí misma. $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, además de ser un ente matemático interesante por sí mismo ha mostrado su gran importancia en aplicaciones prácticas en áreas como la física, computación y química, por mencionar algunas. Por ejemplo, Zefran, Kumar y Croke [6] tratan con el problema de generar curvas suaves sobre $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ y aplicarlo en cuestiones de robótica; Barr, Currin, Gabriel y Hughes [1] tratan con rotaciones usando cuaternios y muestran métodos para interpolar orientaciones de manera suave, las cuales aplican en gráficas de computadoras y animación.

En estas notas mostraremos la forma geométrica del grupo $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ construyendo un homomorfismo de grupos matriciales $\mathrm{Sp}_1(\mathbb{H}) \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Demostraremos que este es un cubriente doble y utilizando el teorema fundamental de homomorfismos obtendremos un isomorfismo de grupos matriciales entre $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ y $\mathrm{Sp}_1(\mathbb{H})/\{1,-1\}$, el cual es homeomorfo[1] a $\mathbb{RP}^3$.

Nos gustaría agradecer a los revisores anónimos del manuscrito original por sus críticas, comentarios y sugerencias, lo cual sin duda, nos fue de mucha ayuda para poder corregir el escrito original y hacer una versión mejorada del mismo, esperamos que la presente versión sea más clara y entendible.

2. Grupos matriciales

A partir de ahora, $\mathbb{K}$ denota al campo de los números reales $\mathbb{R}$, los complejos $\mathbb{C}$ o al anillo con división de los cuaternios $\mathbb{H}$. Recordemos algunos grupos de matrices importantes:

- ◇ *El grupo general lineal*, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) : \mathbf{A}$ es invertible$\}$.

[1] *Grosso modo*, $\mathrm{Sp}_1(\mathbb{H})$ puede considerarse como el conjunto de cuaternios unitarios y $\mathbb{RP}^3$ como el conjunto de rectas en $\mathbb{R}^4$ que pasan por el origen.

- ◇ *El grupo especial lineal*, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) : \det \mathbf{A} = 1\}$.
- ◇ *El grupo ortogonal*, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) : \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}\}$, donde $\mathbf{A}^T$ representa la transpuesta de $\mathbf{A}$.
- ◇ *El grupo especial ortogonal*, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{\mathbf{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) : \det \mathbf{A} = 1\}$.
- ◇ *El grupo simpléctico*, $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{H}) = \{\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) : \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{I}\}$, donde $\mathbf{A}^*$ es la matriz transpuesta conjugada de $\mathbf{A}$.

Es importante tener en cuenta que los anteriores son grupos con el producto usual de matrices.

Lo que haremos a continuación será dotar al espacio $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ de una topología. Consideremos la función $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\mathbf{x} \longmapsto |\mathbf{A}\mathbf{x}|,$$

donde $\mathbb{S}^{n-1}$ denota la esfera $(n-1)-$dimensional y $|\mathbf{y}| = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$. Como f es continua y $\mathbb{S}^{n-1}$ es compacta, f alcanza su máximo en algún punto de $\mathbb{S}^{n-1}$. Esto nos asegura que tenemos una función bien definida $\|\ \| : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, donde:

$$\|\mathbf{A}\| = \sup\{|\mathbf{A}\mathbf{x}| : \mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}\}$$

y esta cumple las propiedades de norma, así para $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, al número $\|\mathbf{A}\|$ lo llamaremos *la norma de* $\mathbf{A}$. Además, como una norma en un espacio vectorial induce una métrica en el mismo:

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|,$$

y esta a su vez induce una topología (aquella cuya base está dada por las bolas $B(\mathbf{A}, r)$), hemos dotado a $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ de estructura de espacio topológico. A partir de ahora consideramos a $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ con esta topología.

Proposición 2.1. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *es abierto y* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ *es cerrado en* $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$.

La prueba de esta afirmación se sigue de los hechos de que la función determinante es continua, que $(\det^{-1}(0))^c = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ y que $\det^{-1}(1) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

Definición 2.1. Sea G un subgrupo de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, diremos que G *es un grupo matricial*, si es cerrado en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Por ejemplo, trivialmente $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ es un grupo matricial, lo mismo que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, por la proposición anterior. Notemos también que $\mathrm{Sp}_1(\mathbb{H})$ es un grupo matricial. En efecto, observemos que $\mathrm{Sp}_1(\mathbb{H})$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}_1(\mathbb{H})$, como:

$$\mathrm{Sp}_1(\mathbb{H}) = \{q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : q^*q = 1\},$$

- $1 \in \mathrm{Sp}_1(\mathbb{H})$;

- si $q_1, q_2 \in \mathrm{Sp}_1(\mathbb{H})$, con $q_1 = a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$ y $q_2 = a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}$, entonces ${q_2}^{-1} = a_2 - b_2\mathbf{i} - c_2\mathbf{j} - d_2\mathbf{k}$, luego:
$$\begin{aligned} q_1{q_2}^{-1} =&(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) \\ &+ (-a_1b_2 + b_1a_2 - c_1d_2 + d_1c_2)\mathbf{i} \\ &+ (-a_1c_2 + b_1d_2 + c_1a_2 - d_1b_2)\mathbf{j} \\ &+ (-a_1d_2 - b_1c_2 + c_1b_2 + d_1a_2)\mathbf{k} \end{aligned}$$
y haciendo las operaciones indicadas obtenemos $(q_1{q_2}^{-1})^* q_1{q_2}^{-1} = 1$.

Además, para $q \in \mathrm{Sp}_1(\mathbb{H})$ se tiene $q^*q = |q|^2 = 1$. Consideremos ahora la función $f : \mathrm{GL}_1(\mathbb{H}) \to \mathbb{R}$, dada por:
$$q \longmapsto |q|,$$
la cual es continua. Como $f^{-1}(1) = \mathrm{Sp}_1(\mathbb{H})$, tenemos que $\mathrm{Sp}_1(\mathbb{H})$ es cerrado.

Notemos que la esfera unitaria $\mathbb{S}^3 = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : \; a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$ tiene estructura de grupo con la siguiente operación:
$$\begin{aligned} (a,b,c,d)(u,v,w,x) = (&au - bv - cw - dx, av + bu + cx - dw, \\ &aw - bx + cu + dv, ax + bw - cv + du); \end{aligned}$$
con neutro $(1,0,0,0)$ y $(a,b,c,d)^{-1} = (a,-b,-c,-d)$. Observemos además que el grupo $\mathrm{Sp}_1(\mathbb{H})$ es canónicamente isomorfo a $\mathbb{S}^3$ con el isomorfismo dado por:
$$a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \longmapsto (a,b,c,d).$$

Proposición 2.2. *$\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ y $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ son grupos matriciales.*

Demostración. Claramente $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ y $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ son subgrupos de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Notemos que, como cada $\mathbf{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ satisface $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$, las entradas de estas matrices son el conjunto solución (en $\mathbb{R}^{n^2}$) del siguiente sistema de ecuaciones:
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i,j \leq n,$$
el cual es un conjunto cerrado en $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Además, como la topología de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es la de subespacio de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ es cerrado en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Ahora, considerando la función determinante $\det : \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ tenemos que:
$$\det{}^{-1}(1) = \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}),$$
por lo que es cerrado en $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, lo cual implica que también lo es en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Por lo tanto, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ y $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ son grupos matriciales. $\square$

Una de las principales propiedades del grupo $SO_n(\mathbb{R})$ es que es arco-conexo, para todo $n > 0$. La demostración de esta afirmación puede hacerse por inducción y a continuación damos una idea de cómo hacerlo:

- para $n = 1$ el resultado es trivial, puesto que $SO_1(\mathbb{R}) = \{1\}$;
- para $n = 2$, tenemos que $SO_2(\mathbb{R})$ es el círculo unitario, el cual es claramente arco-conexo;
- para $n \geq 3$ supongamos que $SO_{n-1}(\mathbb{R})$ es arco-conexo y notemos que es suficiente mostrar que $\mathbf{A} \in SO_n(\mathbb{R})$ puede conectarse con $\mathbf{I}$ (la matriz identidad), lo cual es equivalente a encontrar un «movimiento continuo» que transforme los vectores de la base canónica $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ en $\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{e}_n$ (las columnas de $\mathbf{A}$). Hagámoslo por casos.
    I. Si $\mathbf{e}_1 = \mathbf{A}\mathbf{e}_1$, el hecho de que $SO_{n-1}(\mathbb{R})$ sea arco-conexo asegura la existencia de un movimiento continuo S que lleva $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ a $\mathbf{A}\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{e}_n$. Luego, S es el movimiento continuo que transforma $\mathbf{I}$ en $\mathbf{A}$.
    II. Si $\mathbf{e}_1 \neq \mathbf{A}\mathbf{e}_1$, entonces están sobre un plano y por la arco-conexidad de $SO_2(\mathbb{R})$, existe un movimiento continuo R (rotación) que lleva $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{A}\mathbf{e}_1$. Ahora, la hipótesis asegura que hay un movimiento continuo S que lleva $R(\mathbf{e}_2), \ldots, R(\mathbf{e}_n)$ a $\mathbf{A}\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{e}_n$ y deja fijo a $\mathbf{A}\mathbf{e}_1$. Por lo tanto, la composición SR es el movimiento buscado.

Para más detalles véase [3, p. 52].

3. Álgebras de Lie de grupos matriciales

En esta sección definimos las álgebras de Lie (nombradas así en honor al matemático noruego Marius Sophus Lie quien las descubrió–inventó) las cuales serán los espacios tangentes a grupos matriciales en la identidad.

Definición 3.1. Sea $\mathfrak{a}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, diremos que $\mathfrak{a}$ *es un álgebra de Lie*, si existe una aplicación bilineal $[\,,\,] : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ (llamada *corchete de Lie*) que satisface las siguientes condiciones:

I. $[x, y] = -[y, x]$;
II. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, (*identidad de Jacobi*),

para todos $x, y, z \in \mathfrak{a}$.

Por ejemplo, la aplicación $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}$ dota a $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ de estructura de álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$.

Como es usual para cualquier estructura algebraica, un subconjunto de un álgebra de Lie es un subálgebra de Lie, si al restringir las operaciones se siguen satisfaciendo las propiedades; de manera más concisa, $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ es un subálgebra de Lie si:

I. $\mathfrak{b}$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{a}$;
II. $[x, y] \in \mathfrak{b}$, para todos $x, y \in \mathfrak{b}$.

Nuestro objetivo inmediato es definir lo que es el espacio tangente a un grupo matricial G en un punto $\mathbf{g}$ y relacionarlo con un álgebra de Lie, para lo cual requerimos el concepto de curva diferenciable en $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$.

Consideremos una curva $\alpha : (a, b) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, diremos que α *es diferenciable*, si su derivada existe para todo $t \in (a, b)$, donde la derivada de α en t se define de manera usual:

$$\alpha'(t) = \lim_{s \to t} \frac{\alpha(s) - \alpha(t)}{s - t}.$$

Para $G \subset \mathbb{R}^m$ grupo matricial y $\mathbf{g} \in G$, definimos *el espacio tangente a G en* $\mathbf{g}$ como:

$$T_{\mathbf{g}}G = \{\alpha'(0) |\ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to G \text{ es diferenciable y } \alpha(0) = \mathbf{g}\}.$$

La definición de $T_{\mathbf{g}}G$ da una manera formal de considerar el conjunto de todos los vectores tangentes a G en $\mathbf{g}$.

Proposición 3.1. *Sea G un grupo matricial, entonces $T_{\mathbf{I}}G$ es un álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$.*

La prueba se hace verificando que $T_{\mathbf{I}}G$ es un subálgebra de Lie de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, para una demostración explícita véase [2, p. 19].

Definición 3.2. Sea G un grupo matricial, definimos *el álgebra de Lie de G* como $\mathfrak{g} = T_{\mathbf{I}}G$ y *la dimensión de G* como la dimensión de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Ejemplo 3.1. *El álgebra de Lie del grupo* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *es el espacio* $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, *pues dada* $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, *la curva* $\gamma(t) = \mathbf{I} + t\mathbf{A}$ *satisface:*

$$\gamma(0) = \mathbf{I} \quad y \quad \gamma'(0) = \mathbf{A},$$

por otro lado, tenemos que $\det(\gamma(0)) = 1$, *así la curva γ restringida a un intervalo suficientemente pequeño cerca de cero está contenida en* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

4. La exponencial de una matriz

Recordemos que la función exponencial real $f(x) = \mathrm{e}^x$ posee muchas propiedades importantes, en particular, para $x, y \in \mathbb{R}$, se satisface $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$. Si trasladamos esta idea al conjunto de matrices el resultado es la aplicación exponencial de una matriz $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Sin embargo, al generalizar esta idea debemos de establecer algunas restricciones para que ciertas propiedades se cumplan, por ejemplo la propiedad $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}\, e^{\mathbf{B}}$ se cumple solo si $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ conmutan.

La aplicación exponencial es una función muy importante en el estudio de grupos matriciales, pues, entre otras cosas, facilita el cálculo de álgebras de Lie de grupos matriciales y por tanto proporciona un enlace entre el álgebra de Lie de un grupo matricial y el grupo en sí. A continuación definimos formalmente este concepto.

Definición 4.1. Sea $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, definimos *la exponencial de* $\mathbf{A}$ como la matriz $n \times n$ con entradas en $\mathbb{K}$ dada por:

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 + \cdots .$$

A continuación mostramos que la expresión anterior tiene sentido, es decir, que dicha serie es convergente.

Proposición 4.1. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ *y* $t_0 \geq 0$*, entonces la serie* $e^{t\mathbf{A}}$ *converge de manera absoluta y uniforme para todo* $|t| \leq t_0$*.*

Demostración. Supongamos que $\|\mathbf{A}\| = a$, entonces:

$$\left\| \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n t^n \right\| \leq \frac{1}{n!}\|\mathbf{A}\|^n |t|^n = \frac{a^n |t|^n}{n!} \leq \frac{a^n t_0^n}{n!}.$$

Como $\sum_{n\geq 0} \frac{a^n t_0^n}{n!} = e^{at_0}$, por el criterio $M-$Weierstrass[2] la serie $e^{t\mathbf{A}}$ converge absoluta y uniformemente para todo $|t| \leq t_0$. □

De la definición podemos observar inmediatamente que $e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$.

Lema 4.1. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$*, entonces* $\det e^{t\mathbf{A}} = e^{t\cdot \mathrm{tr}(\mathbf{A})}$*.*

La idea para demostrar este lema es considerar la función $f(t) = \det e^{t\mathbf{A}}$, se calcula la derivada de f obteniendo $f'(t) = f(t)\cdot \mathrm{tr}(\mathbf{A})$. Luego la única solución para esta ecuación diferencial, sujeta a la condición inicial $f(0) = 1$, es $f(t) = e^{t\cdot\mathrm{tr}(\mathbf{A})}$, así, $\det e^{t\mathbf{A}} = e^{t\cdot\mathrm{tr}(\mathbf{A})}$.

Lema 4.2. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ *una matriz anti-simétrica, entonces* $e^{\mathbf{A}}$ *es ortogonal.*

Demostración. Como $\mathbf{A}$ es anti-simétrica $-\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, luego:

$$\mathbf{I} = e^{\mathbf{0}} = e^{\mathbf{A}-\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{A}^T} = e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{A}^T} = e^{\mathbf{A}}(e^{\mathbf{A}})^T$$

lo cual implica $(e^{\mathbf{A}})^{-1} = (e^{\mathbf{A}})^T$ y, por lo tanto, $e^{\mathbf{A}}$ es ortogonal. □

[2]Criterio $M-$Weierstrass: sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales definidas sobre un conjunto X tal que existe una serie numérica $\sum M_n$ convergente que satisface:

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \text{para todos } x \in X \text{ y } n \in \mathbb{N},$$

entonces $\sum f_n$ converge uniformemente sobre X.

5. Las álgebras de Lie de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ y $\mathrm{Sp}_1(\mathbb{H})$

En esta sección calcularemos el álgebra de Lie de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ y $\mathrm{Sp}_1(\mathbb{H})$, es decir, sus espacios tangentes en la identidad, a los cuales denotamos por $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ y $\mathfrak{sp}_1(\mathbb{H})$, respectivamente.

Proposición 5.1. $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) : \mathbf{A}$ *es anti-simétrica*$\}$, *en particular,* $\dim \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

La idea de la prueba es como sigue: para ver que cualquier elemento en $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ es una matriz anti-simétrica, damos una curva diferenciable α en $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ que cumpla $\alpha(0) = \mathbf{I}$. Además $\alpha(t) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ implica que $\alpha(t)^T = \alpha(t)^{-1}$. Derivando el producto $\alpha(t)\alpha(t)^T$ obtenemos que $\alpha'(0)^T = -\alpha'(0)$.

Por otro lado, para demostrar que una matriz anti-simétrica $\mathbf{A}$ está en $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$, consideramos la curva $\alpha(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}}$, la cual está contenida en $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, por los lemas 4.1 y 4.2. Derivando obtenemos $\alpha'(0) = \mathbf{A} \in \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$.

Proposición 5.2. $\mathfrak{sp}_1(\mathbb{H}) = \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$, *en particular,* $\dim \mathrm{Sp}_1(\mathbb{H}) = 3$.

Demostración. Verificaremos las dos contenciones:
$\boxed{\subset}$ Sea $\mathbf{A} \in \mathfrak{sp}_1(\mathbb{H})$, entonces existe una curva diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathrm{Sp}_1(\mathbb{H})$ tal que $\alpha(0) = 1$ y $\alpha'(0) = \mathbf{A}$. Escribamos α de la siguiente manera:

$$\alpha(t) = a_1(t) + a_2(t)\mathbf{i} + a_3(t)\mathbf{j} + a_4(t)\mathbf{k},$$

y $\alpha(0) = 1$ implica $a_1(0) = 1$ y $a_2(0) = a_3(0) = a_4(0) = 0$. Además, como $|\alpha(t)| = 1$, tenemos que a_1 tiene un máximo local en $t = 0$, pues $|a_1(t)| \leq 1$, lo cual implica que $a_1'(0) = 0$, de donde:

$$\mathbf{A} = \alpha'(0) = a_2'(0)\mathbf{i} + a_3'(0)\mathbf{j} + a_4'(0)\mathbf{k} \in \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle.$$

$\boxed{\supset}$ Consideremos la curva $\alpha_1 : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathrm{Mat}_1(\mathbb{H})$ dada por:

$$t \longmapsto \cos t + \mathbf{i} \operatorname{sen} t,$$

la cual es diferenciable. Como $|\alpha_1(t)| = 1$, $\alpha_1(t) \in \mathrm{Sp}_1(\mathbb{H})$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Así, podemos considerar $\alpha_1 : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathrm{Sp}_1(\mathbb{H})$. Notemos que $\alpha_1(0) = 1$ y $\alpha_1'(0) = \mathbf{i} \in \mathfrak{sp}_1(\mathbb{H})$. Análogamente se demuestra que $\mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathfrak{sp}_1(\mathbb{H})$. $\square$

6. La forma geométrica de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$

Los elementos del grupo $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ poseen, entre muchas otras, las siguientes propiedades: preservar orientación y producto interno (lo cual asegura la preservación de ángulos, normas y que manda a la esfera unitaria en sí misma). A continuación nos enfocaremos en el grupo $SO_3(\mathbb{R})$, estableceremos su «forma geométrica» y construiremos un homomorfismo entre él y $Sp_1(\mathbb{H})$.

Para comenzar, para $n \in \mathbb{Z}^+$ definamos el espacio proyectivo real $n-$dimensional, el cual es el conjunto de todos los subespacios lineales $1-$dimensionales de $\mathbb{R}^{n+1}$, es decir:

$$\mathbb{RP}^n = \{\ell : \ell \text{ es un subespacio } 1-\text{dimensional de } \mathbb{R}^{n+1}\}.$$

Notemos que si ℓ es un subespacio de dimensión 1 de $\mathbb{R}^{n+1}$, entonces es una recta que pasa por el origen y que interseca a la esfera unitaria en dos puntos antípodas, por lo cual podemos establecer una correspondencia entre elementos de $\mathbb{RP}^n$ y parejas de puntos antípodas de $\mathbb{S}^n$, es decir, tenemos una biyección entre $\mathbb{RP}^n$ y $\mathbb{S}^n/\{1,-1\}$. De hecho, esta biyección es un homeomorfismo, véase [5, p. 77].

Recordemos que *un difeomorfismo entre $X \subset \mathbb{R}^n$ y $Y \subset \mathbb{R}^m$* es una función $f : X \to Y$ biyectiva, suave con inversa f^{-1} suave. En tal caso, diremos que *X y Y son difeomorfos*.

Teorema 6.1. *Los grupos matriciales* $SO_3(\mathbb{R})$ *y* $Sp_1(\mathbb{H})$ *son variedades* $3-$*dimensionales.*

Una idea de cómo demostrar este resultado es la siguiente: la función exponencial es un difeomorfismo de una *pequeña* vecindad de cero en $\mathfrak{g}$ con una de $\mathbf{I}$ en G:

$$\mathrm{e} : \mathcal{U} \to e(\mathcal{U}), \qquad \mathbf{A} \longmapsto \mathrm{e}^{\mathbf{A}};$$

además, la traslación por $\mathbf{g} \in G$ (multiplicando a la izquierda por $\mathbf{g}$) también lo es:

$$L_{\mathbf{g}} : G \to G, \qquad \mathbf{h} \longmapsto \mathbf{gh};$$

así, trasladando la vecindad $\mathcal{U}$ por cada elemento de G se cubre al grupo completo con vecindades de $\mathbf{g} \in G$. La composición de dichas funciones, $L_{\mathbf{g}} \circ \mathrm{e}$, es un difeomorfismo, para más detalles véase [4, p. 106].

Dado un grupo matricial G y $\mathbf{g} \in G$ consideremos *la conjugación por* $\mathbf{g}$:

$$C_{\mathbf{g}}(\mathbf{A}) = \mathbf{gAg}^{-1}$$

la cual es una aplicación diferenciable (véase [4] pág. 114) y considerando la derivada de $C_{\mathbf{g}}$ en $\mathbf{I}$ obtenemos una transformación lineal $Ad_{\mathbf{g}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, la cual está dada por:

$$Ad_{\mathbf{g}}(\mathbf{B}) = \mathbf{gBg}^{-1},$$

de hecho para cada $\mathbf{g} \in G$ tenemos que $Ad_{\mathbf{g}}$ es un isomorfismo lineal.

Elijamos una base $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{g}$ y consideremos la función $Ad : G \to GL_d(\mathbb{R})$ dada por:

$$\mathbf{g} \longmapsto Ad_{\mathbf{g}},$$

donde $Ad_{\mathbf{g}}$ está considerada como la matriz asociada a la transformación lineal $Ad_{\mathbf{g}}$, respecto a la base $\mathcal{B}$, y $d = \dim \mathfrak{g} = \dim G$; a esta función la llamaremos *la acción adjunta*. Una de las propiedades de esta función es que es un homomorfismo suave (véase [4, p. 118]).

En particular, si consideramos la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ de $\mathfrak{sp}_1(\mathbb{H})$ y $\mathbf{g} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in Sp_1(\mathbb{H})$, la matriz asociada a $Ad_{\mathbf{g}}$ respecto a dicha base es:

$$Ad(\mathbf{g}) = \begin{pmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2bc-2ad & 2ac+2bd \\ 2bc+2ad & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2cd-2ab \\ 2bd-2ac & 2ab+2cd & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{pmatrix},$$

la cual es un elemento de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Esto nos permite restringir el contradominio de la acción adjunta de $\mathrm{Sp}_1(\mathbb{H})$, $Ad : \mathrm{Sp}_1(\mathbb{H}) \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Definición 6.1. Sean X y Y variedades y $f : X \to Y$ una función. Diremos que *f es un cubriente doble*, si f es un difeomorfismo local sobreyectivo 2 a 1.

Teorema 6.2. *La aplicación $Ad : \mathrm{Sp}_1(\mathbb{H}) \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ es un cubriente doble.*

Demostración. Primero observemos que $\ker Ad = \{1, -1\}$. En efecto, si $\mathbf{g} \in \ker Ad$, entonces $Ad_{\mathbf{g}}(v) = Ad_{\mathbf{e}}(v)$. Esto implica que $\mathbf{g}v\mathbf{g}^{-1} = v$ para todo $v \in \mathfrak{sp}_1(\mathbb{H})$, es decir, $\mathbf{g} \in \mathrm{Sp}_1(\mathbb{H})$ conmuta con los cuaternios puramente imaginarios, pero los únicos elementos que conmutan con los cuaternios son los números reales, por lo tanto, $\mathbf{g} = \pm 1$. De donde, Ad es 2 a 1.

Ahora veamos que Ad es un difeomorfismo alrededor de $\mathbf{I}$. Por el teorema de la función inversa, bastará verificar que $d(Ad)_{\mathbf{I}} : \mathfrak{sp}_1(\mathbb{H}) \to \mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ envía la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ a una base de $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$. Consideremos la curva $\alpha_1(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{i}t} \in \mathrm{Sp}_1(\mathbb{H})$, la cual satisface $\alpha_1(0) = 1$ y $\alpha_1'(0) = \mathbf{i}$, luego

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Ad_{\alpha_1(t)}(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{e}^{\mathbf{i}t}\, v\, \mathrm{e}^{-\mathbf{i}t} = \mathbf{i}v - v\mathbf{i} = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad v = \mathbf{i}, \\ 2\mathbf{k}, & \text{si} \quad v = \mathbf{j}, \\ -2\mathbf{j}, & \text{si} \quad v = \mathbf{k}, \end{cases}$$

de donde, $d(Ad)_{\mathbf{I}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Análogamente para $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, utilizando las curvas $\alpha_2(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{j}t}$ y $\alpha_3(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{k}t}$, se obtienen las matrices:

$$d(Ad)_{\mathbf{I}}(\mathbf{j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad d(Ad)_{\mathbf{I}}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de manera que $\{d(Ad)_{\mathbf{I}}(\mathbf{i}), d(Ad)_{\mathbf{I}}(\mathbf{j}), d(Ad)_{\mathbf{I}}(\mathbf{k})\}$ es una base de $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$. Así, Ad es un difeomorfismo local.

Por último observemos que Ad es sobre. Como $\mathrm{Sp}_1(\mathbb{H})$ es compacta y Ad es continua, $Ad(\mathrm{Sp}_1(\mathbb{H}))$ es compacta en $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ y en particular cerrada. Pero también $Ad(\mathrm{Sp}_1(\mathbb{H}))$ es abierta, pues Ad es un difeomorfismo local, así $Ad(\mathrm{Sp}_1(\mathbb{H})) = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, puesto que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ es arco-conexa. $\square$

Usando el teorema fundamental de homomorfismos de grupos y el isomorfismo existente entre $\mathrm{Sp}_1(\mathbb{H})$ y $\mathbb{S}^3$ tenemos:

$$\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \cong \mathrm{Sp}_1(\mathbb{H})/\{1,-1\} \cong \mathbb{S}^3/\{1,-1\} = \mathbb{RP}^3.$$

Bibliografía

[1] A. Barr, B. Currin, S. Gabriel y J. Hughes, «Smooth interpolation of orientations with angular velocity constraints using quaternions», *Computer Graphics (ACM)*, vol. 26, 1992, 313–320.

[2] M. Farinati y P. Jancsa, *Grupos y álgebras de Lie*, Trabajos de matemática, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, 2010.

[3] J. Stillwell, *Naive Lie Theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2008.

[4] K. Tapp, *Matrix Groups for Undergraduates*, vol. 29, American Mathematical Society, 2005.

[5] L. W. Tu, *An introduction to Manifolds*, 2.ª ed., Springer, 2011.

[6] M. Zefran, V. Kumar y C. Croke, «Metrics and connections for rigid-body kinematics», *The International Journal of Robotics Research*, vol. 18-2, 1999, 242–1–242–16.