Miscelánea Matemática **60** (2015) 59-75 SMM

Procesos de memoria larga

Luis G. Gorostiza
Departamento de Matemáticas
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional.
lgorosti@math.cinvestav.mx

Resumen

En este artículo damos información introductoria sobre procesos estocásticos de memoria larga. Lo hacemos a partir del movimiento browniano quitándole algunas de sus propiedades.

1. Introducción

La teoría de la probabilidad nos permite razonar y hacer cálculos sobre el azar con el rigor de las matemáticas. Jacob Bernoulli dio un paso enorme en la teoría con su libro «Ars Conjectandi». Este artículo es una contribución para la conmemoración de los 300 años de esa obra fundamental.

El propósito de este artículo es dar información de manera simplificada y breve sobre procesos estocásticos de memoria larga (también llamada dependencia de largo alcance), que pueda atraer al lector a interesarse en el tema. Está escrito para lectores que tienen al menos conocimientos básicos de probabilidad y procesos estocásticos de nivel licenciatura, en particular el movimiento browniano, que es el proceso gaussiano más importante (p.e. los libros [22, 21]). El principio de invariancia, o teorema límite central funcional, del movimiento browniano se puede ver p.e. en [28]. Un lector que sienta curiosidad por este tema pero que no tenga conocimientos de procesos estocásticos puede formarse una idea general de lo que son con el artículo [20], donde se explica de manera elemental el movimiento browniano, que es el punto de partida de este artículo.

Los procesos que veremos toman valores en los reales, son centrados, gaussianos (salvo el último), autosimilares, y tienen trayectorias continuas pero no diferenciables (excepto en un caso). El proceso más conocido de este tipo es el movimiento browniano, también llamado proceso de Wiener. Una de sus propiedades principales es la independencia de los incrementos en intervalos ajenos, lo que implica la propiedad de Markov; es decir, que la evolución futura del proceso no depende de su historia pasada. La característica principal de los procesos de memoria larga es que los incrementos en intervalos son dependientes sin importar qué tan alejados entre sí estén los intervalos. El proceso de memoria larga más conocido es el movimiento browniano fraccionario, y hay varios otros que también son estudiados por su interés matemático y por sus aplicaciones.

Tomaremos como punto de partida al movimiento browniano y quitándole propiedades (incrementos independientes, incrementos estacionarios, distribución gaussiana), presentaremos algunos de los procesos de memoria larga más conocidos: el movimiento browniano fraccionario, el movimiento browniano subfraccionario, el movimiento browniano bifraccionario, el proceso de Rosenblatt. Los tres últimos tienen relación con el primero. Hay muchas referencias sobre diversos aspectos de dichos procesos. La bibliografía que aquí se incluye puede servir como guía de iniciación. El capítulo 1 del libro [54] trata sobre el browniano fraccionario y otros procesos gaussianos relacionados con él. El libro [2] contiene información abundante sobre procesos de memoria larga, aplicaciones y aspectos estadísticos. En todos los casos veremos algo sobre la forma como fueron encontrados esos procesos.

Recordemos algunas cosas.

La distribución de un proceso gaussiano centrado $X = (X(t), t \geq 0)$ está determinada por su función de covariancia,

$$C_X(s,t) = \mathrm{Cov}(X(s), X(t)) = E(X(s)X(t)). \tag{1}$$

En general la covariancia de dos variables aleatorias X y Y está definida por

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E((X - EX)(Y - EY)).$$

Para un proceso gaussiano X, dados cualesquiera $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, el vector aleatorio $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ es gaussiano, y todos esos vectores aleatorios determinan la distribución del proceso. La función de densidad de un vector aleatorio gaussiano $(X_1, \ldots, X_n)$ tiene la forma

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\mathrm{det}C}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' C^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\},$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} EX_1 \\ \vdots \\ EX_n \end{bmatrix},$$

C es la matriz de covariancias

$$C = \begin{bmatrix} \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \mathrm{Cov}(X_1, X_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_n, X_1) & \dots & \mathrm{Cov}(X_n, X_n) \end{bmatrix},$$

C^{-1} es la matriz inversa de C y $\det C$ es el determinante de C. Por lo tanto un proceso gaussiano está determinado por su función de valor medio y su función de covariancia.

Una condición necesaria y suficiente para que un proceso gaussiano X tenga la propiedad de Markov es que su función de covariancia cumpla la relación

$$C_X(s,t) = \frac{C_X(s,r)C_X(r,t)}{C_X(r,r)}, \quad s \leq r \leq t, \tag{2}$$

(ver [28], p. 254).

Se dice que un proceso X (no necesariamente gaussiano ni de segundo orden) es autosimilar si existe una constante $K > 0$, llamada exponente de autosimilitud, tal que para cualquier constante $c > 0$ se cumple la igualdad en distribución

$$(X(ct), t \geq 0) \stackrel{d}{=} (c^K X(t),\ t \geq 0). \tag{3}$$

(ver [17]).

No existe una definición precisa de memoria larga, y esta noción puede concebirse de maneras distintas (ver [44]). Una idea general para procesos X de segundo orden (no necesariamente gaussianos) es que la covariancia de los incrementos en intervalos decaiga de manera lenta cuando la distancia entre los intervalos tiende a infinito; es decir: dados $u < v$ y $s < t$, existe una constante $k > 0$ tal que

$$\begin{aligned} C_X(u,v,s,t;\tau) &= \mathrm{Cov}(X(v) - X(u), X(t+\tau) - X(s+\tau)) \\ &\sim C_{u,v,s,t}\tau^{-k} \text{ cuando } \tau \to \infty, \end{aligned} \tag{4}$$

donde $C_{u,v,s,t}$ es una constante. Algunos autores distinguen entre los casos en que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Cov}(X(1) - X(0), X(n+1) - X(n)) \tag{5}$$

converja o diverja y les llaman memoria corta y memoria larga, respectivamente, pero otros consideran como memoria larga simplemente una propiedad de la forma (4).

En todo lo que sigue, C significa una constante determinada por lo que hay en paréntesis o en subíndices, y puede ser distinta cada vez que aparece.

2. El movimiento browniano

El movimiento browniano (estándar, en dimensión 1), $W = (W(t), t \geq 0)$, es un proceso gaussiano de incrementos independientes y estacionarios. Es el único proceso que tiene esas propiedades. Su función de covariancia es

$$C_W(s,t) = \text{mín}\{s,t\}. \tag{6}$$

De la covariancia es claro que este proceso es autosimilar con exponente $K = 1/2$. Sus trayectorias son continuas y no diferenciables en ningún punto. En todo lo que sigue, W denota al movimiento browniano.

¿Qué procesos existen si se omiten una o varias de las propiedades básicas del movimiento browniano, pero que tengan cierto parecido con él? Si se omite la independencia de incrementos, se tiene el movimiento browniano fraccionario. Si se omite además la estacionariedad de incrementos, se tienen el movimiento browniano subfraccionario y el movimiento browniano bifraccionario. Si se omiten la independencia de incrementos y la propiedad gaussiana, se tiene el proceso de Rosenblatt, que es un caso especial de los procesos de Hermite. Existen muchos otros procesos de memoria larga, pero los mencionados son representativos de ciertas clases de procesos.

3. El movimiento browniano fraccionario

El movimiento browniano fraccionario de parámetro $H \in (0,1), B_H = (B_H(t), t \geq 0)$, es un proceso gaussiano con función de covariancia

$$C_{B_H}(s,t) = \frac{1}{2}[s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}]. \tag{7}$$

El caso $H = 1/2$ corresponde al movimiento browniano, de modo que el fraccionario es una extensión del usual. Hay información básica sobre el movimiento browniano fraccionario en [45, 38, 4, 36, 44].

El movimiento browniano fraccionario fue introducido por Kolmogorov [29] en 1940 (sin ese nombre y sin probabilidad) en relación con curvas en espacio de Hilbert, y fue estudiado inicialmente, más de 20 años después, por Mandelbrot y van Ness [35], motivados en parte por el análisis estadístico que hizo el hidrólogo Hurst [25, 26] de las crecientes del río Nilo, basado en registros hechos entre los años 622 y 1469. Hurst estudió la estadística R/S definida por

$$\frac{R}{S}(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\text{máx}_{1\leq i\leq n}(S_i - \frac{i}{n}S_n) - \text{mín}_{1\leq i\leq n}(S_i - \frac{i}{n}S_n)}{(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \frac{1}{n}S_n)^2)^{1/2}},$$

donde $X_1, \ldots, X_n$ son observaciones del flujo de agua y $S_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$. Si las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots$ fuesen independientes e idénticamente distribuidas, entonces la estadística R/S crecería de acuerdo con $n^{1/2}$ al incrementar n indefinidamente (como en el teorema límite central), pero Hurst encontró que el crecimiento era de orden n^H, donde H es aproximadamente igual a 0.74. Este resultado empírico sugería que debía haber alguna forma de dependencia entre las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots,$ y eso condujo al movimiento browniano fraccionario. Por ello se llamó a H parámetro de Hurst. El efecto de memoria larga en el flujo de los ríos tiene varias causas (ver [47] y sus referencias); uno que no es hidrólogo puede pensar por ejemplo en que el agua de la lluvia que cae en una cuenca llega al río de manera gradual (y aleatoria) durante un intervalo de tiempo que puede ser largo, lo que implica que los incrementos sean dependientes, pero influyen también las descargas de las presas, el cambio climático, y más. El movimiento browniano fraccionario también se puede obtener como límite funcional de manera análoga al teorema de Donsker para el movimiento browniano (ver [48, 46]). Se puede ver algo de la historia de este proceso en [15, 44].

El movimiento browniano fraccionario también ha surgido como modelo matemático en muchos otros campos de aplicación además de la hidrología: turbulencia, meteorología, geofísica, astronomía, física estadística, neurociencias, secuencias de ADN, biofísica, redes de comunicación, finanzas, seguros, ingeniería eléctrica, entre otros (ver [15, 2] para aplicaciones en algunos campos).

El movimiento browniano fraccionario tiene las propiedades siguientes, entre otras.

La covariancia es positiva si $H > 1/2$ y negativa si $H < 1/2$.

Se tiene

$$E(B_H(t) - B_H(s))^2 = |t-s|^{2H}, \tag{8}$$

por lo tanto sus incrementos son estacionarios.

La forma de la covariancia indica que el proceso es autosimilar con exponente $K = H$ y que no es un proceso de Markov (si $H \neq 1/2$) (ver 2)).

El movimiento browniano fraccionario es el único proceso gaussiano autosimilar con incrementos estacionarios. Sus trayectorias son continuas y no diferenciables.

Una consecuencia de (8) con $H \neq 1/2$ es que el movimiento browniano fraccionario no es semimartingala (una semimartingala es la suma de una martingala local y un proceso localmente de variación acotada, ver p.e. [6]). Esto se puede probar como en [38], usando la estacionariedad de los incrementos, o de manera más general como en [8], aplicando el hecho de que si un proceso gaussiano centrado continuo X cumple la condición

$$a|t-s|^{2H} \leq E(X(t)-X(s))^2 \leq b|t-s|^2, \tag{9}$$

con $H \in (0,1/2) \cap (1/2,1)$ y constantes positivas a y b, entonces X no es semimartingala.

El cálculo estocástico clásico (cálculo de Itô) es válido solamente para semimartingalas, (ver p.e. en [5] una versión introductoria con movimiento browniano, y en [6] una versión avanzada con semimartingalas). En el artículo [37] se explica la imposibilidad de definir la integral estocástica con respecto al movimiento browniano de la misma manera que en el cálculo clásico. Para desarrollar un cálculo estocástico relativo al movimiento browniano fraccionario es necesario usar nuevos métodos. Esto ha sido hecho de varias maneras (ver p.e. [38, 4, 36, 56]).

La memoria larga del movimiento browniano fraccionario (con $H \neq 1/2$) está dada por (4) con

$$C_{u,v,s,t} = H(2H-1)(v-u)(t-s), \quad k = 2(1-H). \tag{10}$$

El movimiento browniano fraccionario tiene la representación integral [35]

$$B_H(t) = C(H)\int_{\mathbb{R}}((t-r)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-r)_+^{H-\frac{1}{2}})dW(r), \tag{11}$$

que es una integral de Wiener, donde $(\quad)_+$ significa la parte positiva, y para $H > 1/2$,

$$B_H(t) = C(H)\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^t (s-r)_+^{H-\frac{3}{2}}ds\right)dW(r), \tag{12}$$

donde W es el movimiento browniano definido en todo $\mathbb{R}$. En intervalo finito, para $H > 1/2$ se tiene la representación integral

$$B_H(t) = \int_0^t \left[\int_r^t \frac{\partial K_H}{\partial s}(s,r)ds\right]dW(r), \tag{13}$$

donde

$$K_H(s,r) = C(H)r^{\frac{1}{2}-H}\int_0^s (u-r)_+^{H-\frac{3}{2}}u^{H-\frac{1}{2}}du, \quad 0 < s < t. \tag{14}$$

4. El movimiento browniano subfraccionario

El movimiento browniano subfraccionario de parámetro $H \in (0,1)$, $X_H = (X_H(t), t \geq 0)$, fue introducido en [8]. Es un proceso gaussiano con función de covariancia

$$C_{X_H}(s,t) = s^{2H} + t^{2H} - \frac{1}{2}[(s+t)^{2H} + |t-s|^{2H}]. \tag{15}$$

El caso $H = 1/2$ corresponde al movimiento browniano, de modo que el subfraccionario también es una extensión del usual.

La covarianza es positiva si $H > 1/2$ y negativa si $H < 1/2$.

De (15) se sigue

$$E(X_H(t) - X_H(s))^2 = -2^{2H-1}(t^{2H} + s^{2H}) + (t+s)^{2H} + (t-s)^{2H}, \ s \leq t, \quad (16)$$

por lo tanto los incrementos no son estacionarios, y

$$(2 - 2^{2H-1})(t-s)^{2H} \leq E(X_H(t) - X_H(s))^2 \leq (t-s)^{2H} \quad \text{si } H > 1/2, \quad (17)$$

$$(t-s)^{2H} \leq E(X_H(t) - X_H(s))^2 \leq (2 - 2^{2H-1})(t-s)^{2H} \quad \text{si } H < 1/2. \quad (18)$$

La forma de la covariancia indica que el proceso es autosimilar con exponente $K = H$ y que no es un proceso de Markov (si $H \neq 1/2$). Sus trayectorias son continuas y no diferenciables.

De (17) y (18) se tiene que el movimiento browniano subfraccionario no es semimartingala (ver (9)).

La memoria larga del movimiento browniano subfraccionario (con $H \neq 1/2$) está dada por (4) con

$$C_{u,v,s,t} = H(2H-1)(2H-2)(v^2 - u^2)(t-s), \quad k = 3 - 2H. \quad (19)$$

El movimiento browniano subfraccionario tiene representación integral

$$X_H(t) = C(H) \int_{\mathbb{R}} [(t-s)_+^{H-\frac{1}{2}} + (t+s)_-^{H-\frac{1}{2}} - 2(-s)_+^{H-\frac{1}{2}}]dW(s),$$

donde $(\quad)_-$ es la parte negativa.

En [8] se demuestra que los coeficientes de correlación de los incrementos del subfraccionario no son mayores (en valor absoluto y en los mismos intervalos) que los del fraccionario. Este hecho y el decaimiento más rápido en (4) con (19) que con (10) muestran que el subfraccionario está en cierta forma «entre» el browniano usual y el fraccionario. Eso es lo que motivó el haberlo llamado subfraccionario.

Varias otras propiedades del subfraccionario se encuentran en [8, 39, 52, 51, 58] y artículos de otros autores. Algunos autores consideran que el subfraccionario puede ser útil en aplicaciones donde no se puede suponer que los incrementos sean estacionarios.

Las motivaciones para el movimiento browniano subfraccionario fueron los artículos [13] y [27], que tratan sobre tiempos de ocupación de sistemas de Poisson de partículas brownianas y de procesos ramificados en un espacio de medidas, respectivamente. En ellos aparecen casos especiales de covariancias de las formas (7) y (15), respectivamente, pero no hay menciones a procesos de memoria larga, quizás porque tales procesos todavía no eran muy conocidos cuando se escribieron esos artículos. Yo no sabía nada de esos procesos, pero había leído [13, 27]. Cuando supe lo que eran el movimiento browniano fraccionario y la memoria larga, pensé que lo que después se llamó movimiento browniano subfraccionario, con $H > 1/2$, debería poder ser obtenido por medio de un sistema de partículas ramificadas, de manera análoga a [13, 27]. Eso se hizo en [8]. En [12] se obtuvo para $H < 1/2$ con el mismo sistema de partículas pero de manera distinta. Posteriormente, en [11] se encontró que el subfraccionario también se obtiene por medio del sistema de partículas sin ramificación pero con una condición inicial diferente (no Poisson). En el mismo año que [8] apareció el subfraccionario (sin ese nombre) en [16] en un contexto completamente distinto, como la «parte par» de un movimiento browniano fraccionario. Suele suceder que casi lo mismo aparezca de manera simultánea en investigaciones de distintas personas que no sabían nada unas de las otras.

5. El movimiento browniano bifraccionario

Si un proceso gaussiano X definido en todo $\mathbb{R}$ tiene función de covariancia de la forma

$$C_X(s,t) = r(s) + r(t) - r(|t-s|), \qquad s,t \in \mathbb{R},$$

donde r es una función par sobre $\mathbb{R}$ tal que $r(0) = 0$ (un tal proceso tiene incrementos estacionarios porque $E(X(t) - X(s))^2 = 2r(|t-s|)$), entonces a partir de X se pueden obtener otros procesos gaussianos con función de covariancia de la forma

$$C(s,t) = (r(s) + r(t))^k - (r(|t-s|))^k,$$

con una constante $k \in (0,1)$. Esto se puede hacer usando la fórmula

$$\lambda^k = \frac{k}{\Gamma(1-k)} \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) x^{-1-\lambda} dx, \;\; \lambda > 0, \;\; k \in (0,1),$$

y el hecho de que el núcleo

$$e^{x[r(s)+r(t)-r(|t-s|)]} - 1$$

es positivo definido para cualquier x (ver [3], Ejercicio 2.12 (h)). Esos procesos no tienen incrementos estacionarios.

El movimiento browniano bifraccionario fue introducido por Houdré y Villa [24], haciendo lo anterior a partir del movimiento browniano fraccionario (extendido a $(-\infty, 0)$). Definieron el proceso gaussiano

$B_{H,K} = (B_{H,K}(t), t \geq 0)$, parámetros $H \in (0,1]$ y $K \in (0,1]$, con función de covariancia

$$C_{B_{H,K}}(s,t) = \frac{1}{2^K}[(t^{2H} + s^{2H})^K - |t-s|^{2HK}]. \tag{20}$$

Lo llamaron movimiento browniano bifraccionario debido a que tiene dos parámetros y a que el caso $K = 1$ corresponde al fraccionario. Por lo tanto es una extensión de este último, y también es una extensión del browniano usual.

Las propiedades del bifraccionario con parámetros H y K son análogas a las del fraccionario con parámetro HK, pero sus incrementos no son estacionarios, por lo que también es de interés para algunas aplicaciones. Dichas propiedades han sido estudiadas en [24], y también en [31, 43, 55, 54], y en varios artículos de otros autores.

El bifraccionario fue obtenido de manera analítica, como se ha visto, a partir del fraccionario, y también en un resultado tipo Donsker en [31].

6. Un proceso acompañante

Otro proceso gaussiano autosimilar de memoria larga es $A_H = (A_H(t), t \geq 0)$, con función de covariancia

$$C_{A_H}(s,t) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(2H-1)[(s+t)^{2H} - s^{2H} - t^{2H}], \tag{21}$$

$H \in (0, 1/2) \cap (1/2, 1)$, donde sgn es la función signo, $\mathrm{sgn}(x) = 1$ si $x > 0, = -1$ si $x < 0$. Los incrementos no son estacionarios.

Este proceso tiene representación integral

$$A_H(t) = C(H) \int_0^\infty (1 - e^{-st}) s^{-\frac{H+1}{2}} dW(s). \tag{22}$$

Fue introducido y estudiado por Lei y Nualart [30] (ver también [1, 42]). Aunque la covariancia (21) tiene cierto parecido con las covariancias (7) y (15), en contraste con los anteriores este proceso sí es semimartingala y tiene una versión infinitamente diferenciable en $(0, \infty)$.

La memoria larga de este proceso es del mismo tipo que la del browniano fraccionario.

La razón por la que he llamado «acompañante» a este proceso es que nunca ha salido solo (hasta ahora), sino solamente en compañía de otros procesos. En [30] aparece en descomposiciones (en distribución) que relacionan al fraccionario con el bifraccionario, y en [1, 42] aparece en relaciones entre el fraccionario y el subfraccionario. También aparece en [11] en un límite de un sistema de partículas, en compañía del subfraccionario.

7. El proceso de Rosenblatt

El proceso de Rosenblatt fue introducido y estudiado por Taqqu [48]. Empecemos por mencionar la manera como fue encontrado. Esto está tomado de [50].

Comencemos por recordar el teorema límite central clásico. Si $X_j, j = 1, 2, \ldots$, son variables aleatorias independientes, con la misma distribución, $EX = 0, EX_1^2 = 1$ y $S_n = \sum_{j=1}^n X_j, n = 1, 2, \ldots$, entonces $S_n/\sqrt{n}$ converge en distribución cuando $n \to \infty$ a $\mathcal{N}(0,1)$, la distribución gaussiana de media 0 y variancia 1. ¿Qué sucede si las X_j son dependientes?, se sigue obteniendo $\mathcal{N}(0,1)$, o se encuentran otras distribuciones límites?

Un ejemplo. Si $\{X_j, j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ es una sucesión estacionaria con $EX_0 = 0, ES_n^2 = \sigma_n^2 \to \infty$ cuando $n \to \infty$, y la sucesión es fuertemente mezclante, es decir que se cumple

$$\sup_{A,B} |P(A \cap B) - P(A)P(B)| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty,$$

donde A y B pertenecen respectivamente a las σ-álgebras generadas por $\{X_j, j \leq 0\}$ y $\{X_j, j \geq n\}$, entonces S_n/σ_n converge en distribución a $\mathcal{N}(0,1)$ si y sólo si $\{S_n^2/\sigma_n^2\}$ es uniformemente integrable.

Rosenblatt [40] presentó el siguiente contraejemplo. Sea $\{Y_j, j = \ldots - 1, 0, 1, \ldots\}$ una sucesión estacionaria gaussiana, $EY_0 = 0, EY_0^2 = 1$, con correlación $r_j = EY_0Y_j$ tal que

$$r_j = (1 + j^2)^{-D/2} \sim j^{-D} \text{ cuando } j \to \infty,$$

con una constante $D \in (0, 1/2)$, y sea $X_j = Y_j^2 - 1$ para cada $j, S_n = \sum_{j=1}^n X_j$,

$$Z_n = \frac{\sigma}{n^{1-D}} S_n$$

con una constante $\sigma > 0$. Se tiene que Z_n converge en distribución cuando $n \to \infty$ a la variable aleatoria $Z(1)$, cuya distribución está determinada por su función característica

$$Ee^{i\theta Z(1)} = \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2i\theta\sigma)^k}{k} c_k\right\}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{23}$$

donde

$$c_k = \int_{[0,1]^k} |x_1 - x_2|^{-D} |x_2 - x_3|^{-D} \cdots |x_{k-1} - x_k|^{-D} |x_k \cdots x_1|^{-D} dx_1 \ldots dx_k. \tag{24}$$

El valor $\sigma = [(1-2D)(1-D)/2]^{1/2}$ implica la estandarización $E(Z(1)^2) = 1$. (Las sucesiones $\{X_j\}$ y $\{Y_j\}$ no son fuertemente mezclantes.)

Con base en el contraejemplo de Rosenblatt, Taqqu [48] demostró el siguiente resultado del tipo del teorema de Donsker. Sea

$$Z_n(t) = \frac{\sigma}{n^{1-D}} \sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_j, \;\; t \in [0,1]$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ significa parte entera. Entonces Z_n converge cuando $n \to \infty$, en el espacio de Skorohod $D[0,1]$, al proceso $Z = (Z(t), t \in [0,1])$ cuya distribución está determinada por las funciones características de sus distribuciones finito-dimensionales, es decir, de los vectores aleatorios $(Z(t_1), \ldots, Z(t_p))$, que son

$$E\exp\left\{ i \sum_{j=1}^{p} \theta_j Z(t_j) \right\} = \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2i\sigma)^k}{k} R_{H,k}(\theta_1, \ldots, \theta_p; t_1, \ldots, t_p) \right\}, \quad (25)$$

donde

$$\begin{aligned} & R_{H,K}(\theta_1, \ldots, \theta_p; t_1, \ldots, t_p) \\ = & \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_k) |x_1 - x_2|^{H-1} |x_2 - x_3|^{H-1} \cdots \qquad (26) \\ & |x_{k-1} - x_k|^{H-1} |x_k - x_1|^{H-1} dx_1 \ldots dx_k, \\ & \varphi(x) = \sum_{j=1}^{p} \theta_j \mathbb{1}_{[0,t_j]}(x), \\ & H = 1 - D \in (1/2, 1), \\ & \sigma = [H(2H-1)/2]^{1/2} \text{ (implica } E(Z(1))^2 = 1). \end{aligned}$$

La serie en (25) converge para $\theta_1, \ldots, \theta_p$ en una vecindad pequeña del origen, pero eso basta para determinar a la distribución de $(Z(t_1), \ldots, Z(t_p))$. El proceso no está definido para $H = 1/2$.

Taqqu llamó proceso de Rosenblatt al proceso Z (definido para toda $t > 0$), y lo ha estudiado en [48, 50] y otros artículos. Otras personas también lo han estudiado (p.e. [53, 32, 33]).

El proceso de Rosenblatt tiene las propiedades siguientes, entre otras. Valor medio 0, versión continua no diferenciable. Es autosimilar con exponente $K = H$, y sus incrementos son estacionarios, lo que implica

$$E(Z(t) - Z(s))^2 = \sigma^2 (t-s)^{2H}, \qquad (27)$$

y que su función de covariancia sea

$$C_Z(s,t) = \frac{\sigma^2}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}), \tag{28}$$

que tiene la misma forma que la del movimiento browniano fraccionario ($\sigma = 1$, ver (7)). Los incrementos de Z son positivamente correlacionados y se tiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} E[Z(1)(Z(k+1) - Z(k)] = \infty, \tag{29}$$

de modo que el proceso tiene memoria larga en el sentido mencionado anteriormente. No es semimartingala. Es infinitamente divisible, lo cual fue probado recientemente en [57, 33] (los procesos vistos antes son infinitamente divisibles por ser gaussianos).

En todas las propiedades anteriores el proceso de Rosenblatt se parece mucho al movimiento browniano fraccionario, pero la diferencia esencial es que el proceso de Rosenblatt no es gaussiano.

El proceso de Rosenblatt aparece también como límite en el teorema límite no central [14].

El proceso de Rosenblatt es un caso especial de los procesos de Hermite, estudiados en [49]. Al respecto nótese que la variable aleatoria $X_j = Y_j^2 - 1$, definida antes, corresponde a $X_j = H_2(Y_j)$, donde H_2 es el polinomio de Hermite de orden 2. Los polinomios de Hermite de orden $m = 0, 1, 2, \ldots$, están definidos por

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2/2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2/2},$$

y por medio de ellos se obtienen los procesos de Hermite como límites, análogamente al proceso de Rosenblatt.

El proceso de Rosenblatt tiene las siguientes representaciones integrales.

Integral estocástica en tiempo,

$$Z(t) = C(H) \int'_{\mathbb{R}^2} \left(\int_0^t (s-r_1)_+^{\frac{H}{2}-1} (s-r_2)_+^{\frac{H}{2}-1} ds \right) dW(r_1) dW(r_2), \tag{30}$$

donde W es el movimiento browniano definido en todo $\mathbb{R}$, con

$$C(H) = \frac{[H(2H-1)/2]^{1/2}}{\beta(H/2, 1-H)},$$

$\beta(\cdot,\cdot)$ es la función beta. ($\int'_{\mathbb{R}^2}$ significa que se excluye la diagonal $r_1 = r_2$).

Integral estocástica en intervalo finito [53],

$$Z(t) =$$
$$C(H)\int_{[0,1]^2}\left(\int_{r_1\vee r_2}^{t}\frac{\partial K_{H'}}{\partial u}(u,r_1)\frac{\partial K_{H'}}{\partial u}(u,r_2)du\right)dW(r_1)dW(r_2), \quad (31)$$

$K_{H'}$ como en (14) con $H' = \frac{H+1}{2}$.

Las expresiones en los lados derechos de (30) y (31) son integrales múltiples de Wiener-Itô de orden 2. El movimiento browniano fraccionario, expresado por (11), está en el primer caos de Wiener, y el proceso de Rosenblatt, expresado por (30), está en el segundo caos de Wiener. Los procesos de Hermite en general tienen representaciones como integrales múltiples de Wiener-Itô [49]. Unas referencias para integrales múltiples de Wiener-Itô son [23, 34].

Si se intercambian los órdenes de integración en las representaciones integrales (12) y (30) (lo cual no está permitido porque aparecen integrales estocásticas que no están definidas), se obtiene

$$Z(t) = C(H)\int_0^t (B'_{H'}(s))^2 ds,\ \ H' = \frac{H+1}{2}. \quad (32)$$

Esta expresión (fórmula (43) en [50]) es interesante porque relaciona al proceso de Rosenblatt Z con un movimiento browniano fraccionario, $B_{H'}$, pero es una relación informal porque no existe la derivada de $B_{H'}$ en el sentido ordinario. Se le puede dar un sentido riguroso a la fórmula (32) por medio de variables aleatorias generalizadas y producto de Wick [7].

No he podido encontrar información acerca de que el proceso de Rosenblatt tenga o no la propiedad de Markov. Debido a que tiene memoria larga y por analogía con el movimiento browniano fraccionario, se podría suponer que no la tiene, pero hace falta una demostración.

8. Comentarios adicionales

Hay otros procesos autosimilares de memoria larga. Por ejemplo, movimientos brownianos fraccionarios ponderados [10], procesos de Rosenblatt de dos parámetros [32], y otros.

La memoria larga de los procesos de segundo orden caracterizada por (4) se ha referido solamente al caso de decaimiento de la covariencia de los incrementos, ya que se ha supuesto $k > 0$, y así ha sido con los procesos gaussianos que hemos visto, pero también existen procesos gaussianos para los que (4) ocurre con $k \leq 0$, lo que también puede ser considerado como memoria larga; hay ejemplos en [18]. Para procesos que no son de segundo orden, se puede usar la codiferencia (ver definición en [45, 41]) en lugar de la covariancia. Esto se ha hecho en [9] para un proceso estable de memoria larga que surge de un sistema de partículas.

Además de las representaciones integrales anteriores del movimiento browniano fraccionario y del proceso de Rosenblatt, esos procesos tienen representaciones espectrales, que son integrales estocásticas con respecto a una medida gaussiana compleja (ver p.e. [50]).

De los procesos que hemos visto, el movimiento browniano fraccionario, el subfraccionario y otros pueden ser obtenidos por medio de límites de sistemas de partículas. Eso es interesante porque permite darles representaciones o interpretaciones «físicas» a esos procesos. El principio de invariancia del movimiento browniano, que lo representa como un límite de caminatas aleatorias, es un resultado de ese tipo, si se piensa en una sola partícula que se mueve haciendo saltos aleatorios. El proceso de Rosenblatt también puede ser obtenido por medio de un sistema de partículas [7]. El movimiento browniano bifraccionario y el proceso acompañante han sido definidos de manera analítica. Es natural preguntarse si dichos procesos pueden relacionarse con sistemas de partículas y obtenerse por medio de límites (por sí solo en el caso del proceso acompañante).

Para las aplicaciones es conveniente tener formas de simular trayectorias de procesos. En muchos casos las simulaciones se sustentan en aproximaciones en distribución. Para algunas aplicaciones es útil tener aproximaciones fuertes (para que tenga sentido la diferencia $X(t) - X_n(t)$, donde X es el proceso dado y X_n es el proceso aproximante, es necesario que ambos estén definidos en el mismo espacio de probabilidad) y que tengan una rapidez de convergencia. Una aproximación de ese tipo para el proceso de Rosenblatt está en [19], donde se encuentran los antecedentes para esa clase de aproximaciones.

Bibliografía

[1] X. Bardina y D. Bascompte, «Weak convergence towards two independent Gaussian processes from a unique Poisson process», *Collect. Math.*, vol. 61, 2010, 191–204.

[2] J. Beran, Y. Feng, S. Gosh y R. Kulik, *Long Memory Processes*, Springer, 2013.

[3] C. Berg, J. Christensen y P. Ressel, *Harmonic Analysis on Semigroups, Theory of Positive Definite and Related Functions*, Springer, 1984.

[4] F. Biagini, Y. Hu, B. Oksendal y T. Zhang, *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*, Springer, 2008.

[5] L. Blanco Castañeda, V. Arunachalam y S. Dharmaraja, *Introduction to Probability and Stochastic Processes with Applications*, Wiley, 2012.

[6] T. Bojdecki, «Aport. mat. textos 6», en *Teoría General de Procesos e Integración Estocástica*, Soc. Mat. Mex., 2004.

[7] T. Bojdecki, L. Gorostiza y A. Talarczyk, «From intersection local time to the Rosenblatt process», por aparecer en J. Theoret. Probab. 2016.
[8] ———, «Sub-fractional Brownian motion and its relation to occupation times», *Statist. Probab. Lett.*, vol. 69, 2004, 405–419.
[9] ———, «A long range dependence stable process and an infinite variance branching system», *Ann. Probab.*, vol. 35, 2007, 500–527.
[10] ———, «Some extensions of fractional Brownian motion and sub-fractional Brownian motion related to particle systems», *Elect. Comm. Probab.*, vol. 12, 2007, 161–172.
[11] ———, «Particle systems with quasi-homogeneous initial states and their occupation time fluctuations», *Elect. J. Probab.*, vol. 15, 2010, 191–202.
[12] T. Bojdecki y A. Talarczyk, «Particle picture interpretation of some Gaussian processes related to fractional Brownian motion», *Stoch. Proc. Appl.*, vol. 122, 2012, 2134–2154.
[13] J.-D. Deuschel y K. Wang, «Large deviations for the occupation time functional of a Poisson system of independent Brownian particles», *Stoch. Proc. Appl.*, vol. 52, 1994, 183–209.
[14] R. Dobrushin y P. Major, «Non-central limit theorems for non-linear functions of Gaussian fields», *Z. Wahr. Verw. Geb.*, vol. 50, 1987, 27–52.
[15] P. Doukhan, G. Oppenheim y M. T. (Eds.), *Theory and Applications of Long-Range Dependence*, Birkhäuser, 2003.
[16] K. Dzaparidze y J. van Zanten, «A series expansion of fractional Brownian motion», *Probab. Theory Related Fields*, vol. 130, 2004, 39–55.
[17] P. Embrechts y M. Maejima, *Selfsimilar Processes*, Princeton University Press, 2002.
[18] J. Garzón, «Convergence to weighted fractional Brownian sheets», *Comm. Stoch. Anal.*, vol. 3, 2009, 1–14.
[19] J. Garzón, S. Torres y C. Tudor, «A strong convergence to the Rosenblatt process», *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 391, 2012, 630–647.
[20] L. Gorostiza, «La probabilidad en el siglo xx», *Misc. Mat.*, vol. 33, 2001, 69–92.
[21] G. Grimmett y D. Stirzaker, *Probability and Random Processes*, 2.ª ed., Oxford, 1993.
[22] P. Hoel, S. Port y C. Stone, *Introduction to Stochastic Processes*, Houghton Mifflin, Boston, 1972.
[23] C. Houdré, V. Pérez-Abreu y S. Üstünel, *Multiple Wiener-Itô integrals: An introductory survey, en "Chaos Expansions, Multiple Wiener-Itô integrals and Their Applications" (C. Houdré, V. Pérez-Abreu, eds.)*, CRC Press, 1994.
[24] C. Houdré y J. Villa, «An example of infinite dimensional quasi-helix», en *Stochastic Models*, ed. A. Meda J.M. González-Barrios J.A. León, Contemp. Math., vol. 336, A.M.S., 2003, 195–202.
[25] H. Hurst, «Long-term storage capacity of reservoirs», *Trans. Amer. Soc. Civil Engineers*, vol. 116, 1951, 400–410.
[26] ———, «Methods of using long-term storage reservoirs», en *Proc. Inst. Civil Engineers Part I*, 1955, 519–550.
[27] I. Iscoe, «A weighted occupation time for a class of measure-valued branching processes», *Probab. Theory Related Fields*, vol. 71, 1986, 85–116.
[28] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, 2.ª ed., Springer, 2002.
[29] A. Kolmogorov, «Wieneresche Spiralen und einige andere interessante Kurven in Hilbertschen Raum», *Comptes Rendus (Doklady) Acad. Sci. USSR (N.S.)*, vol. 26, 1940, 115–118.
[30] P. Lei y D. Nualart, «A decomposition of the bifractional Brownian motion and some applications», *Statist. Probab. Lett.*, vol. 79, 2009, 619–624.
[31] M. Maejima y C. Tudor, «Limits of bifractional noises», *Comm. Stoch. Anal.*, vol. 2, 2008, 369–683.
[32] ———, «Selfsimilar processes with stationary increments in the second Wiener chaos», *Probab. Math. Statist.*, vol. 32, 2012, 167–186.

[33] ———, «On the distribution of the Rosenblatt process», *Stat. Prob. Lett.*, vol. 83, 2013, 1490–1495.

[34] P. Major, «Wiener-Itô integrals», en *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 849, Springer, 1981.

[35] B. Mandelbrot y J. van Ness, «Fractional Brownian motions, fractional noises and applications», *SIAM Review*, vol. 4, 1968, 422–437.

[36] Y. Mishura, *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*, Springer, 2008.

[37] A. Murillo Salas y J. Villa Morales, «¿Por qué no es posible definir una integral tipo Lebesgue-Stieltjes con respecto al movimiento browniano?», *Misc. Mat.*, vol. 57, 2013, 85–101.

[38] D. Nualart, «Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion and applications», en *Stochastic Models*, ed. A. Meda J.M. González-Barrios J.A. León, Contemp. Math., vol. 336, A.M.S., 2003, 3–39.

[39] B. Prakasa Rao, «Singularity of subfractional Brownian motions with different Hurst parameters», *Stoch. Anal. Appl.*, vol. 30, 2012, 538–542.

[40] M. Rosenblatt, «Independence and dependence», en *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium Mathematical Statistics and Probability*, Univ. of California Press, 1961, 431–433.

[41] J. Rosiński y T. Żak, «The equivalence of ergodicity and weak mixing for infinitely divisible processes», *J. Theoret. Probab.*, vol. 10, 1997, 73–86.

[42] J. Ruiz de Chávez y C. Tudor, «A decomposition of sub-fractional Brownian motion», *Math. Rep. (Bucur.)*, vol. 11, núm. 61, 2009, 67–74.

[43] F. Russo y C. Tudor, «On bifractional Brownian motion», *Stoch. Proc. Appl.*, vol. 116, 2006, 830–856.

[44] G. Samorodnitsky, «Long range dependence», *Found. Trends Stoch. Syst.*, vol. 1, 2006, 163–257.

[45] G. Samorodnitsky y M. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman & Hall, New York, 1994.

[46] T. Sottinen, «Fractional Brownian motion, random walks and binary market models», *Finance Stochast.*, vol. 5, 2001, 343–355.

[47] S. Szolgayova, G. Laaha, G. Blöschl y G. Bucher, «Factors influencing long range dependence in streamflows in European rivers», *Hydrol. Process.*, vol. 28, 2014, 1573–1586.

[48] M. Taqqu, «Weak convergence to the fractional Brownian motion and to the Rosenblatt process», *Z. Wahr. Verw. Geb.*, vol. 31, 1975, 287–302.

[49] ———, «Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank», *Z. Wahr. Verw. Geb.*, vol. 50, 1979, 53–83.

[50] ———, «The Rosenblatt process», en *Selected Works of Murray Rosenblatt*, Selected Works in Probability and Statistics, Springer, 2011.

[51] C. Tudor, «On the Wiener integral with respect to a sub-fractional Brownian motion», *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 351, 2009, 456–468.

[52] ———, «Some properties of the sub-fractional Brownian motion», *Stochastics*, vol. 79, 2009, 431–448.

[53] C. Tudor, «Analysis of the Rosenblatt process», *ESAIM: Probab. Stat.*, vol. 12, 2008, 230–257.

[54] ———, *Analysis of Variations for Self-Similar processes, Probability and its Applications*, Springer, 2013.

[55] C. Tudor y Y. Xiao, «Sample path properties of bifractional Brownian motion», *Bernoulli*, vol. 13, 2007, 1023–1052.

[56] J. Unterberger, «Stochastic calculus for fractional Brownian motion with Hurst exponent $H > \frac{1}{4}$: a rough path method by analytic extension», *Ann. Probab.*, vol. 37, 2009, 265–614.

[57] M. Veillette y M. Taqqu, «Properties and numerical evaluation of the Rosenblatt distribution», *Bernoulli*, vol. 19, 2013, 982–1005.

[58] L. Yan, G. Shen y K. He, «Itô's formula for a sub-fractional Brownian motion», *Comm. Stoch. Anal.*, vol. 5, 2011, 135–139.