MISCELÁNEA MATEMÁTICA **37** (2003) 65–76

SMM

Una revisión del completamiento de Dedekind-MacNeille

Rodrigo De Castro y Gustavo Rubiano
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá

En esta nota reexaminamos una importante y bella construcción matemática: el llamado *completamiento de Dedekind-MacNeille*, $DM(P)$, de un conjunto ordenado $(P, \leq)$. Dicho completamiento, también conocido como *completamiento normal* de P, fue originalmente propuesto por H. M. MacNeille en 1937 [8] como una generalización de la famosa construcción de los números reales a partir de los racionales publicada por R. Dedekind 65 años antes, en 1872 [4].

Presentamos varias maneras diferentes, aunque equivalentes, de definir $DM(P)$ y enunciamos sus propiedades fundamentales. Nos hemos esforzado por obtener las demostraciones más directas y elegantes posibles, simplificando algunos argumentos y conceptos corrientemente utilizados. Nuestro propósito es enriquecer y complementar los tratamientos que de esta construcción matemática fundamental se hacen en la literatura.

En la primera sección ofrecemos una visión histórica del tema y en la última nos referimos a la caracterización categórica de $DM(P)$, para aquellos lectores familiarizados con la teoría de categorías.

1 Perspectiva histórica.

Richard Dedekind fue, sin duda, uno de los matemáticos más notables del siglo XIX. Algunas de sus ideas, al igual que las de su estimado amigo Georg Cantor, eran revolucionarias para su época y sólo fueron comprendidas y adoptadas después de su muerte. Junto con Galois, es considerado además como uno de los fundadores del álgebra moderna.

Dedekind –alumno doctoral de Gauss en Gotinga– fue el primer matemático en construir explícitamente los números reales a partir de los racionales y el primero en destacar la importancia de la "completez" o "completitud". Consciente de lo trascendental de su descubrimiento, él mismo registró la fecha exacta en su memoria [4]: 24 de noviembre de 1872. Según Dedekind, la completitud, llamada por él "continuidad", se obtiene de la siguiente manera (véase [5]):

> "Sepárense todos los puntos de la línea en dos clases, de tal manera que cada punto de la primera clase está ubicado a la izquierda de cada punto de la segunda clase; entonces existe un y sólo un punto que produce esta partición de todos los puntos en dos clases, cortando así la línea en dos trozos".

Con esta formulación de continuidad, Dedekind procede a definir los números reales como "cortes en $\mathbb{Q}$".

Pasaron más de sesenta años para que estas ideas se presentaran en el contexto más general de las estructuras ordenadas. Fue el norteamericano H. M. MacNeille quien, en 1935, presentó en su tesis doctoral ante la Universidad de Harvard, *Extensions of partially ordered sets*, la construcción que es motivo del presente artículo. La tesis doctoral de MacNeille se publicó luego, con algunos resultados adicionales, en forma de artículo, [8].

2 El completamiento de Dedekind-MacNeille.

Suponemos que el lector está familiarizado con las nociones básicas de cota superior, cota inferior, supremo (o sup) e ínfimo (o inf) de subconjuntos de conjuntos ordenados. Una excelente referencia sobre estructuras ordenadas es [3].

Si $(Q, \leq)$ es un conjunto ordenado y $P \subseteq Q$, con la relación $\leq$ restringida a P, $(P, \leq)$ es también un conjunto ordenado. Diremos en tal caso que Q es una *extensión* de P.

Sean $(P, \leq)$ y $(Q, \leq)$ conjuntos ordenados; una función $\varphi : P \to Q$ se dice que es *monótona* si $x \leq y$ en P implica $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ en Q. La función φ es una *inmersión de orden* si

$$x \leq y \text{ en } P \iff \varphi(x) \leq \varphi(y) \text{ en } Q.$$

Un *isomorfismo de orden* es una inmersión de orden sobreyectiva (y por lo tanto, biyectiva).

Si $(P, \leq)$ es un conjunto ordenado y $A \subseteq P$, con $A^{\uparrow}$ denotaremos el conjunto de las cotas superiores de A y con $A^{\downarrow}$ el conjunto de las cotas inferiores de A. Esta notación no es del todo estándar, pero es muy natural y sugestiva. Si $A \subseteq L \subseteq P$, $A^{\uparrow_L}$ representa $A^{\uparrow} \cap L$, es decir, el conjunto de cotas superiores de A en L. Análogamente se define $A^{\downarrow_L}$.

Un subconjunto $S \subseteq P$ se llama *conjunto inferior* (o *conjunto decreciente* o *ideal de orden*) si $y \leq x \in S$ implica $y \in S$ para $x, y \in P$. Entre los conjuntos inferiores se destacan los llamados *ideales principales*: para $x \in P$, $\downarrow x := \{y \in P : y \leq x\}$ es el ideal principal generado por x.

Dualmente, un subconjunto $S \subseteq P$ se llama *conjunto superior* (o *conjunto creciente* o *filtro de orden*) si $y \geq x \in S$ implica $y \in S$ para $x, y \in P$. Como caso particular, el conjunto $\uparrow x := \{y \in P : y \geq x\}$ es un conjunto superior para todo $x \in P$.

Un conjunto ordenado $(P, \leq)$ es un *retículo completo* (o reticulado completo) si para todo subconjunto S de P existen $\bigvee S = \sup S$ y $\bigwedge S = \inf S$. Si se quiere resaltar el papel de P se escribe $\bigvee_P S$ y $\bigwedge_P S$, respectivamente. Se puede demostrar fácilmente (véase [3], por ejemplo) que $(P, \leq)$ es un retículo completo si y sólo si P tiene un elemento máximo (necesariamente único) y existe $\bigwedge S$ para todo $S \subseteq P$, $S \neq \varnothing$. Análogamente, $(P, \leq)$ es un retículo completo si y sólo si P tiene un elemento mínimo y existe $\bigvee S$ para todo $S \subseteq P$, $S \neq \varnothing$.

Todo conjunto ordenado $(P, \leq)$ induce un retículo completo: el retículo $\mathcal{O}(P)$ de los subconjuntos inferiores o ideales de P, con el orden de la contenencia. Es un retículo completo porque las uniones y las intersecciones arbitrarias de conjuntos inferiores son conjuntos inferiores. Más aun, la correspondencia

$$\begin{aligned} (P, \leq) &\longrightarrow (\mathcal{O}(P), \subseteq) \\ x &\longmapsto \downarrow x \end{aligned}$$

es claramente una inmersión de orden; es decir, $(\mathcal{O}(P), \subseteq)$ es un completamiento natural de $(P, \leq)$. Este hecho sugiere la siguiente pregunta: ¿existe algún objeto que pueda ser considerado "el más pequeño retículo completo que contiene una copia isomorfa de P"? La respuesta es afirmativa y tal objeto canónico —el completamiento de Dedekind-MacNeille— se define a continuación.

Definición 2.1. *Definición por cotas.*

$$DM_1(P) := \{A \subseteq P : A^{\uparrow\downarrow} = A\}.$$

Definición 2.2. *Definición por ideales principales.*

$$DM_2(P) := \{A \subseteq P : \Delta A \subseteq A\}, \quad \text{donde} \quad \Delta A = \bigcap\{\downarrow y : y \in A^{\uparrow}\}.$$

Definición 2.3. *Definición por cortaduras.* Una cortadura de P es un par (A, B) de subconjuntos A y B de P tales que $A^{\uparrow} = B$ y $B^{\downarrow} = A$.

$$DM_3(P) := \{A \subseteq P : (A, B) \text{ es una cortadura de } P \text{ para algún } B \subseteq P\}.$$

Teorema 2.4. *Las definiciones 2.1, 2.2 y 2.3 son equivalentes; es decir, definen el mismo objeto:*

$$DM_1(P) = DM_2(P) = DM_3(P).$$

Demostración: Obsérvese primero que

$$\begin{aligned} z \in A^{\uparrow\downarrow} &\iff z \text{ es cota inferior de } A^{\uparrow} \\ &\iff z \leq y, \text{ para todo } y \in A^{\uparrow} \\ &\iff z \in \downarrow y, \text{ para todo } y \in A^{\uparrow} \\ &\iff z \in \bigcap\{\downarrow y : y \in A^{\uparrow}\}. \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que

$$A^{\uparrow\downarrow} = \bigcap\{\downarrow y : y \in A^{\uparrow}\} = \Delta A. \tag{1}$$

Puesto que la contenencia $A \subseteq \Delta A$ es siempre válida, se concluye que $DM_1(P) = DM_2(P)$.

Mostraremos ahora que $DM_3(P) = DM_1(P)$. Sea $A \in DM_3(P)$; entonces $A^{\uparrow} = B$ y $B^{\downarrow} = A$ para algún $B \subseteq P$. Por lo tanto, $A^{\uparrow\downarrow} = B^{\downarrow} = A$; es decir, $A \in DM_1(P)$. Por otro lado, si $A \in DM_1(P)$, entonces $(A, A^{\uparrow})$ es una cortadura de P ya que $A^{\uparrow\downarrow} = A$. Esto muestra que $DM_3(P) = DM_1(P)$. □

El conjunto $DM_1(P) = DM_2(P) = DM_3(P)$ se denomina *completamiento de Dedekind-MacNeille de P* o *completamiento normal de P*

y se denota por $DM(P)$. Cabe anotar que MacNeille tomó como definición de completamiento el conjunto de todas las cortaduras (A, B) de P. La definición $DM_3(P)$, en la que se consideran sólo las primeras componentes de las cortaduras, simplifica la construcción.

Las cortaduras de un conjunto ordenado, tal como se han definido en 2.3, se pueden caracterizar completamente. Esto se hace en la siguiente proposición.

Proposición 2.5. *Toda cortadura de $(P, \leq)$ es de la forma $(\Delta A, A^{\uparrow})$ con $A \subseteq P$. Por consiguiente, $DM(P)$ se puede definir también como*

$$DM(P) = \{\Delta A : A \subseteq P\}.$$

Demostración: Sea (A, B) una cortadura de P; entonces $A = B^{\downarrow}$ y $B = A^{\uparrow}$. Usando la igualdad (2.1) se tiene

$$A = B^{\downarrow} = A^{\uparrow\downarrow} = \Delta A.$$

Es decir, $(A, B) = (\Delta A, A^{\uparrow})$; de donde

$$DM(P) = DM_3(P) = \{\Delta A : A \subseteq P\}. \qquad \square$$

$\square$

Ejemplo 2.6. Sea $(P, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado (esto incluye $P = \mathbb{Q}$ pero también los casos en que P es finito o no-enumerable, acotado o no-acotado). ¿Cómo son las cortaduras de P? En primer lugar, si (A, B) es una cortadura, $A \cup B = P$ ya que si $x \in P$ entonces $x < b$ para todo $b \in B$ (en cuyo caso $x \in B^{\downarrow} = A$) o $x \geq b$ para algún $b \in B = A^{\uparrow}$ (en cuyo caso $x \in A^{\uparrow} = B$). Hay dos tipos de cortaduras, dependiendo de si A y B son disyuntos o de si $A \cap B \neq \varnothing$.

Caso 1. $A \cap B \neq \varnothing$. Puesto que $A \subseteq B^{\downarrow}$ y $B \subseteq A^{\uparrow}$, se tiene que $a \leq b$ para todo $a \in A$ y todo $b \in B$. La intersección $A \cap B$ se reduce a un punto: si $x_1, x_2 \in A \cap B$ entonces $x_1 \in A = B^{\downarrow}$ de donde $x_1 \leq x_2$. Similarmente, $x_2 \leq x_1$; por lo tanto $x_1 = x_2$. Sea entonces $A \cap B = \{z\}$; a continuación demostramos que

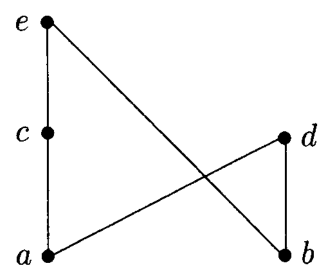
$$z = \sup A = \inf B.$$

Se cumple que $z \geq a$ para todo $a \in A$ porque $z \in B = A^{\uparrow}$. Además, si $y \in A^{\uparrow}$ entonces $y \geq z$ porque $z \in A$. Así que $z = \sup A$ y un razonamiento análogo muestra que $z = \inf B$. Entonces $(A, B) = (\downarrow z, \uparrow z)$.

Caso 2. $A \cap B = \varnothing$. Puesto que $A \subseteq B^{\downarrow}$ y $B \subseteq A^{\uparrow}$, se tiene que $a < b$ para todo $a \in A$ y todo $b \in B$. Además, $\sup A$ no existe ya que, en caso contrario, $\sup A \in A^{\uparrow} = B$ y, por otro lado, $\sup A \leq b$ para todo $b \in B$ (porque $\sup A$ es la mínima cota superior de A y $b \in B = A^{\uparrow}$); es decir, $\sup A \in B^{\downarrow} = A$. Se tendría $\sup A \in A \cap B$ contradiciendo $A \cap B = \varnothing$. Un razonamiento similar muestra que $\inf B$ tampoco existe.

Al construir $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$, el caso 1 da lugar a los números racionales y el caso 2 a los irracionales.

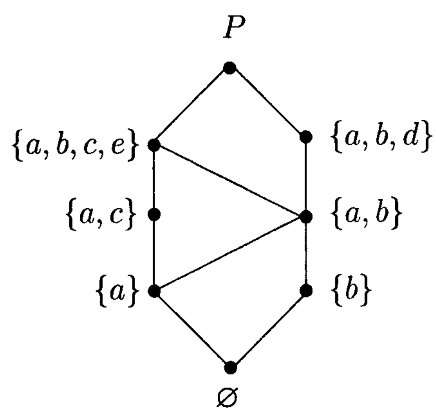
Ejemplo 2.7. Sea $(P, \leq)$ el siguiente conjunto ordenado:



Podemos obtener $DM(P)$ usando la caracterización de la Proposición 2.5, es decir, $DM(P) = \{\Delta A : A \subseteq P\}$:

$$\begin{array}{ll}
\Delta\{a\} = \downarrow a = \{a\}, & \Delta\{b\} = \downarrow b = \{b\}, \\
\Delta\{c\} = \downarrow c \cap \downarrow e = \{a, c\}, & \Delta\{d\} = \downarrow d = \{a, b, d\}, \\
\Delta\{e\} = \downarrow e = \{a, b, c, e\}, & \Delta\{a, b\} = \downarrow d \cap \downarrow e = \{a, b\}, \\
\Delta\{c, d\} = \cap\varnothing = P, & \Delta\varnothing = \bigcap_{x \in P} \downarrow x = \varnothing.
\end{array}$$

Para todos los demás subconjuntos $A \subseteq P$, ΔA coincide con alguno de los anteriores. Por consiguiente, $DM(P)$ es el siguiente retículo completo:



3 Propiedades de $DM(P)$.

En esta sección expondremos las propiedades fundamentales de $DM(P)$. El primer teorema establece que $DM(P)$, con el orden de contenencia, es un retículo completo, en el cual P está sumergido *regularmente.*

Teorema 3.1. (i) *$\downarrow x \in DM(P)$ para todo $x \in P$.*

(ii) *$(DM(P), \subseteq)$ es un retículo completo.*

(iii) *La correspondencia $\varphi : P \to DM(P)$ dada por $\varphi(x) = \downarrow x$ es una inmersión de orden de $(P, \leq)$ en $(DM(P), \subseteq)$. Esta inmersión es* regular*, es decir, preserva los infs y los sups existentes en P.*

Demostración: (i) $\downarrow x \in DM_1(P) = DM(P)$ para todo $x \in P$ ya que es inmediato que $(\downarrow x)^{\uparrow\downarrow} = \downarrow x$.

(ii) Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía de subconjuntos de $DM(P)$. Se tiene claramente que

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^{\uparrow} = \bigcap_{i \in I} A_i^{\uparrow}, \qquad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^{\downarrow} = \bigcap_{i \in I} A_i^{\downarrow}.$$

Por consiguiente, si cada $A_i \in DM(P)$, es decir, si $A_i^{\uparrow\downarrow} = A_i$ para todo $i \in I$,

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^{\uparrow\downarrow} = \left(\bigcap_{i \in I} A_i^{\uparrow}\right)^{\downarrow} = \bigcap_{i \in I} A_i^{\uparrow\downarrow} = \bigcap_{i \in I} A_i.$$

De donde, $\bigcap_{i \in I} A_i \in DM(P)$. Puesto que $P \in DM(P)$, se concluye que $DM(P)$ es un retículo completo ya que es cerrado para intersecciones arbitrarias.

(iii) Es muy fácil ver que φ es una inmersión de orden. Supóngase ahora que $A \subseteq P$ y que $\bigwedge A$ existe. Claramente, $\varphi(\bigwedge A) \leq \varphi(a)$ para todo $a \in A$, porque φ es monótona. Sea $Y \in DM(P)$ una cota inferior arbitraria de $\varphi(A)$; es decir, $Y \subseteq \downarrow a$ para todo $a \in A$. Esto significa que $Y \subseteq A^{\downarrow}$, de donde, $Y \subseteq A^{\downarrow} \subseteq \downarrow \bigwedge A = \varphi(\bigwedge A)$; esto prueba que $\bigwedge \varphi(A) = \varphi(\bigwedge A)$.

Por otro lado, supóngase que $A \subseteq P$ y que $\bigvee A$ existe; mostraremos que $\varphi(\bigvee A)$ es la mínima cota superior de $\varphi(A)$ en $DM(P)$, o sea que, $\bigvee \varphi(A) = \varphi(\bigvee A)$. Puesto que φ es monótona, $\varphi(a) \leq \varphi(\bigvee A)$ para todo $a \in A$; por lo tanto, $\varphi(\bigvee A)$ es cota superior de $\varphi(A)$. Sea

$Y \in DM(P)$ una cota superior arbitraria de $\varphi(A)$, es decir, $Y \supseteq \downarrow a$ para todo $a \in A$, lo cual implica que $A \subseteq Y$. Como $\bigvee A$ existe, de la igualdad (1) se concluye que $A^{\uparrow\downarrow} = \bigcap\{\downarrow y : y \in A^{\uparrow}\} = \downarrow \bigvee A$. Tenemos entonces

$$\varphi(\bigvee A) = \downarrow \bigvee A = A^{\uparrow\downarrow} \subseteq Y^{\uparrow\downarrow} = Y.$$

Esto demuestra que $\bigvee \varphi(A) = \varphi(\bigvee A)$. □

En [7] se demuestra una generalización de la parte (iii) del anterior teorema, a saber:

Teorema 3.2 (Harding). *Un retículo dado se puede sumergir regularmente en el completamiento de Dedekind-MacNeille de un retículo distributivo.*

La demostración del Teorema 3.2 es bastante intrincada —muy lejos de la sencillez y transparencia del teorema 3.1— por lo que la inmersión de Harding está muy lejos de ser "natural".

Sea $(Q, \leq)$ una extensión de P y $x \in Q$. Para simplificar la notación, en lo sucesivo $(\downarrow x)_P$ representa $(\downarrow x) \cap P$ y $(\uparrow x)_P$ representa $(\uparrow x) \cap P$, es decir,

$$(\downarrow x)_P := \{y \in P : y \leq x\}, \qquad (\uparrow x)_P := \{y \in P : y \geq x\}.$$

Definición 3.3. Sea $(Q, \leq)$ una extensión de P. Se dice que P es sup denso en Q si para todo $x \in Q$ existe $A \subseteq P$ tal que $x = \bigvee_Q A$. Dualmente, P es inf denso en Q si para todo $x \in Q$ existe $A \subseteq P$ tal que $x = \bigwedge_Q A$.

En la siguiente proposición se presentan propiedades muy útiles, equivalentes a las nociones de subconjunto sup e inf denso, respectivamente.

Proposición 3.4. *Sea P un subconjunto de un conjunto ordenado $(Q, \leq)$.*

(i) *P es sup denso en Q si y sólo si $x = \bigvee_Q (\downarrow x)_P$ para todo $x \in Q$.*

(ii) *P es inf denso en Q si y sólo si $x = \bigwedge_Q (\uparrow x)_P$ para todo $x \in Q$.*

Demostración: (i) La dirección ($\Leftarrow$) es inmediata. Sean $x \in Q$ y $A \subseteq P$ tales que $\bigvee_Q A = x$. Vamos a demostrar que $\bigvee_Q A$ es la mínima cota superior de $(\downarrow x)_P$ en Q, es decir, $\bigvee_Q (\downarrow x)_P = \bigvee_Q A = x$. Claramente, x es una cota superior de $(\downarrow x)_P$ en Q. Sea $y \in Q$ una cota superior arbitraria de $(\downarrow x)_P$. Puesto que $A \subseteq (\downarrow x)_P$, se tiene $y \geq a$ para todo $a \in A$, o sea $y \in A^{\uparrow}$; de donde $\bigvee_Q A \leq y$.

(ii) La demostración es análoga a la de (i). □

Los siguientes dos resultados son importantes aplicaciones de la Proposición 3.4 y conducen a la caracterización presentada en el Teorema 3.7.

Proposición 3.5. *Dado $(P, \leq)$, el subconjunto $\mathcal{P} = \{\downarrow x : x \in P\}$ de $DM(P)$ (el cual es isomorfo a P según el Teorema 3.1) es sup e inf denso en $DM(P)$.*

Demostración: Sea $A \in DM(P)$, es decir, $A \subseteq P$, $A^{\uparrow\downarrow} = A$. Por la igualdad (1), $\mathcal{P}$ es inf denso en $DM(P)$ ya que $\downarrow y \in DM(P)$ para todo $y \in P$ y las intersecciones son infs en el retículo $(DM(P), \subseteq)$.

Para probar que $\mathcal{P}$ es sup denso en $DM(P)$ recurrimos a la Proposición 3.4 y al hecho de que

$$\bigcup_{a \in A} \downarrow a = A^{\uparrow\downarrow} = A. \tag{2}$$

Es inmediato que $A \subseteq \bigcup_{a \in A} \downarrow a$ lo cual establece la contenencia $\supseteq$ de (2). Para probar la otra contenencia, sea $x \in \bigcup_{a \in A} \downarrow a$ y $y \in A^{\uparrow}$. Claramente, $x \leq a \leq y$, lo cual implica $\bigcup_{a \in A} \downarrow a \subseteq A^{\uparrow\downarrow}$. Como en el retículo $(DM(P), \subseteq)$ las uniones son sups, de la igualdad (2) se concluye que $\mathcal{P}$ es sup denso en $DM(P)$. □

Lema 3.6. *Sea Q un retículo completo, $A \subseteq P \subseteq Q$, siendo P sup e inf denso en Q.*

(i) $A^{\uparrow_P \downarrow_P} = (\downarrow \bigvee_Q A)_P$.

(ii) *Si $x \in Q$ entonces $(\downarrow x)_P^{\uparrow_P \downarrow_P} = (\downarrow x)_P$. Esto quiere decir que $(\downarrow x)_P \in DM(P)$.*

Demostración: (i) Puesto que $A^{\uparrow_P} = (\uparrow \bigvee_Q A)_P$, se deduce que $A^{\uparrow_P \downarrow_P} = [(\uparrow \bigvee_Q A)_P]^{\downarrow_P}$. Sea $z = \bigvee_Q A$; como P es inf denso en Q, se sigue de la Proposición 3.4.(ii) que $\bigwedge_Q (\uparrow z)_P = z$. De donde $[(\uparrow z)_P]^{\downarrow_P} = (\downarrow z)_P$. En conclusión,

$$A^{\uparrow_P \downarrow_P} = [(\uparrow \bigvee_Q A)_P]^{\downarrow_P} = [(\uparrow z)_P]^{\downarrow_P} = (\downarrow z)_P = (\downarrow \bigvee_Q A)_P.$$

(ii) Como P es sup denso en Q, por la Proposición 3.4.(i) se tiene $\bigvee_Q (\downarrow x)_P = x$. Aplicando la parte (i) del presente lema, con $A = (\downarrow x)_P$, concluimos que $(\downarrow x)_P^{\uparrow_P \downarrow_P} = (\downarrow x)_P$. □

Teorema 3.7. *Salvo isomorfismo, $DM(P)$ es el único retículo completo en el cual P es sup e inf denso. Más precisamente, si P es un subconjunto sup e inf denso de un retículo completo Q, entonces existe un isomorfismo $\psi : DM(P) \to Q$.*

Demostración: La Proposición 3.5 afirma que $\mathcal{P} = \{\downarrow x : x \in P\}$, el cual es isomorfo a P, es sup e inf denso en $DM(P)$. Sea ahora Q un retículo completo en el cual $P \subseteq Q$ es sup e inf denso. Se define ψ como

$$\begin{aligned} \psi : DM(P) &\longrightarrow Q \\ A &\longmapsto \psi(A) = \textstyle\bigvee_Q A. \end{aligned}$$

ψ resulta ser una inmersión de orden; es decir, para $A, B \subseteq P$ tales que $A^{\uparrow_P \downarrow_P} = A$ y $B^{\uparrow_P \downarrow_P} = B$,

$$A \subseteq B \iff \textstyle\bigvee_Q A \leq \bigvee_Q B. \tag{3}$$

La dirección ($\Rightarrow$) de (3) es inmediata. Para mostrar la otra dirección, obsérvese primero que $\bigvee_Q A \leq \bigvee_Q B$ es equivalente a $\downarrow\bigvee_Q A \leq \downarrow\bigvee_Q B$; por consiguiente, usando el Lema 3.6.(i) se tiene

$$A = A^{\uparrow_P \downarrow_P} = (\downarrow\textstyle\bigvee_Q A)_P \subseteq (\downarrow\bigvee_Q B)_P = B^{\uparrow_P \downarrow_P} = B,$$

lo que demuestra la dirección ($\Leftarrow$) de (3).

Supóngase ahora que P es sup e inf denso en Q y sea $x \in Q$. Por la Proposición 3.4.(i), $\bigvee_Q (\downarrow x)_P = x$, y por el Lema 3.6.(ii), $(\downarrow x)_P \in DM(P)$. Entonces $\psi((\downarrow x)_P) = x$. Esto muestra que ψ es sobreyectiva y por tanto $DM(P) \simeq Q$. □

4 Caracterización categórica de $DM(P)$.

Suponemos que el lector está familiarizado con los conceptos fundamentales de la teoría de categorías. Una excelente referencia sobre el tema es [1].

Tomando como objetos los conjuntos ordenados y como flechas (o morfismos) los morfismos de orden se forma la *categoría $\mathcal{P}$ de los conjuntos ordenados.* Se puede demostrar que en la categoría $\mathcal{P}$ los epimorfismos son exactamente las funciones monótonas sobreyectivas mientras que los monomorfismos son exactamente las funciones monótonas 1 a 1 o inyectivas.

En [2], Banaschewski y Bruns se proponen caracterizar categóricamente la noción de completamiento de MacNeille tomando como punto de partida el Teorema 3.7. Así, si se define la noción abstracta de *extensión de MacNeille de un conjunto ordenado* P como una extensión Q de P tal que P es sup e inf denso en Q, ¿se puede caracterizar categóricamente dicha noción?

Definición 4.1. Las siguientes nociones se definen en una categoría cualquiera.

(i) Un objeto C es *inyectivo* si para toda inmersión $A \xrightarrow{m} B$ y cualquier morfismo $A \xrightarrow{f} C$, existe un morfismo $B \xrightarrow{g} C$ que extiende a f, es decir, tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "m"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

conmuta.

(ii) Un monomorfismo $f : P \to Q$ es *estricto* si para cualquier morfismo $g : T \to Q$ y cualquier par de morfismos $u, v : Q \to S$ que satisfacen

$$u \circ f = v \circ f \quad \text{implica} \quad u \circ g = v \circ g,$$

existe $h : T \to P$ tal que $g = f \circ h$.

(iii) Un objeto es *estrictamente inyectivo* si satisface la condición de inyectividad (i) con respecto a monomorfismos estrictos.

(iv) Un monomorfismo $P \to Q$ es *esencial* si es estricto y si cualquier morfismo $g : E \to Q$, tal que $g \circ f$ es un monomorfismo estricto, es también un monomorfismo estricto.

Se puede demostrar (véase [2]) que un morfismo de orden $f : P \to Q$ es una inmersión si y sólo si f es un monomorfismo estricto.

El siguiente teorema establece la caracterización categórica.

Teorema 4.2 (Banaschewski-Bruns). *Sea P un conjunto ordenado. Una extensión E de P es una extensión de MacNeille de P si y sólo si E es una extensión esencial estrictamente inyectiva de P.*

Referencias

[1] J. Adámek, H. Herrlich & G. E. Strecker, Abstract and Concrete Categories, John Wiley & Sons, 1990.

[2] B. Banaschewski & G. Bruns, *Categorical characterization of the MacNeille completion*, Arch. Math. **18** (1967), 369–377.

[3] B. A. Davey & H. A. Priestley, Introduction to Lattices and Order, Cambridge University Press, 1990.

[4] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig, 1872. Traducción al inglés en [5].

[5] R. Dedekind, Essays on the theory of numbers I. Continuity and irrational numbers. II. The nature and meaning of numbers, Dover, 1948.

[6] M. Erné, *Order extensions as adjoint functors*, Quaestiones Math. **9** (1986), 149-206.

[7] J. Harding, *Any lattice can be regularly embedded into the MacNeille completion of a distributive lattice*, Houston J. Math. **19** (1993), 39–44.

[8] H. M. MacNeille, *Partially ordered sets*, Trans. Amer.Math. Soc. **42** (1937), 416–460.