

# Premio Sotero Prieto 2017-2018

Ana Meda

Facultad de Ciencias

UNAM

ana.meda@ciencias.unam.mx

Durante la ceremonia de inauguración del 51 Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana en la Universidad Juárez del Estado de Tabasco, en Villahermosa, se entregaron las Medallas Sotero Prieto a las mejores tesis de licenciatura defendidas durante el periodo del 1 de junio de 2017 al 31 de mayo de 2018. En esta ocasión hubo tres ganadores de la Medalla Sotero Prieto y se otorgaron cinco Menciones Honoríficas.

Recibieron el Premio Sotero Prieto:

- Erik José Amézquita, de la Universidad de Guanajuato (U. de G.),
  - Eduardo Camps Moreno del Instituto Politécnico Nacional (IPN)
- y
- Jorge Garza Vargas de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

Los ganadores de las menciones honoríficas fueron:

- Marco Antonio Flores Martínez,
- Daniel Gregorio Longino,
- Rangel Hernández Ortiz,
- Jorge Rubén Ruvalcaba y
- Gerardo Zago Yáñez.

Marco Antonio Flores es egresado de la U. de Guanajuato y los cuatro restantes estudiaron en la Facultad de Ciencias de la UNAM.

A cada uno le pedimos nos platicara sobre su tesis y le preguntamos qué están haciendo o piensan hacer en el futuro. Les agradecemos a todos sus respuestas, el interés por escribirnos y, finalmente, que hayan hecho trabajos tan interesantes. He aquí lo que nos compartieron.

La tesis de **Erik José Amézquita** se titula «Efficient object classification using the Euler characteristic» (Clasificación eficiente de objetos usando la característica de Euler). Es parte del área de análisis topológico de datos (ATD).

[...] ATD busca usar resultados tradicionales de topología algebraica para darle un nuevo enfoque al estudio de datos.

En mi caso, mi tesis fue una aventura que mezcló un poco de tres disciplinas: homología simplicial, aprendizaje de máquina, y arqueología.

Entre 1978 y 1982, las excavaciones del Templo Mayor en la CDMX revelaron una cámara con más de 160 máscaras de piedra. Es sabido por los arqueólogos que los aztecas nunca elaboraron este tipo de máscaras, sino que eran otras civilizaciones que las producían a modo de tributo o trueque. Una pregunta importante para los arqueólogos es determinar el origen de estas máscaras y así tener una idea más completa de las relaciones de poder o comercio hace 700 años. Es una pregunta difícil, ya que no existen registros de la época. Se sabe que la morfología de las máscaras indica información de origen. Las formas varían así que las máscaras tuvieron que venir de lugares distintos y se busca clasificarlas según su región de procedencia. En varios casos, los arqueólogos confían en su intuición y proponen hipótesis del estilo: «Esta máscara es muy cuadrada y plana; se parece a las máscaras halladas en la costa guerrerense; de ahí que esta máscara en cuestión viene de la costa Pacífico.» Naturalmente esto es muy subjetivo y no hay consenso sobre el origen de varias máscaras.

El enfoque de mi tesis se basa en el artículo «Efficient object classification using the Euler characteristic» de E. Richardson y M. Werman, publicado en el 2014. Nuestro trabajo consistió en extraer «señales topológicas» de las máscaras, y a través de algoritmos de aprendizaje de máquina, proponer una clasificación nueva. El Instituto Nacional de Antropología e Historia (INAH) nos proveyó de modelos digitales 3D de las máscaras. Estos modelos pueden pensarse como complejos simpliciales, con vértices, aristas y triángulos. Definimos una función de filtración sobre los vértices, es decir, asignamos un número real en el intervalo  $[a, b]$  a cada vértice. Por ejemplo, la distancia del vértice al baricentro. Luego partimos el intervalo  $[a, b]$  en  $T$  umbrales equiespaciados. Finalmente, para cada valor umbral, consideramos únicamente los vértices cuyo valor numérico supere dicho umbral. Si un vértice no supera el umbral, lo eliminamos junto al resto de aristas y triángulos que lo contengan.

Al mismo tiempo, en cada umbral calculamos la característica de Euler. Al final, tendremos un vector de  $T$  enteros donde registramos como ha cambiado la característica de Euler a medida que filtramos la máscara. Nuestra hipótesis es



que si filtramos dos máscaras de la misma manera, y sus cambios en característica de Euler son similares, entonces las dos máscaras tienen formas similares y deben de compartir la misma procedencia.

Cuando usamos aprendizaje supervisado, SVMs en particular, obtuvimos resultados razonables a opinión de un arqueólogo. De ahí que nuestra hipótesis parece tener algo de sentido.

Su asesor fue Antonio Rieser, quien actualmente trabaja en el Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) de Guanajuato. Erik cursa el primer año de doctorado en Michigan, EEUU, en el Departamento de Ciencias Matemáticas Computacionales e Ingeniería (Computational Mathematics Science and Engineering). También ha empezado a colaborar con el Departamento de Botánica. **Eduardo Camps Moreno**, del IPN, también recibió la Medalla Sotero Prieto. Nos dice que su tesis, que se titula «El segundo peso generalizado de Hamming de códigos asociados al toro proyectivo»,

[...] es sobre teoría de códigos, un área multidisciplinaria que estudia la transmisión y recepción de información y la posterior detección y corrección de errores.

En particular, mi tesis se enfoca a los códigos de evaluación sobre el toro proyectivo. Mi trabajo consistió en demostrar una fórmula para calcular el segundo peso generalizado de Hamming, que es de interés para algunas aplicaciones en criptografía y que responde cuántos ceros sobre el toro proyectivo puede tener un sistema de dos ecuaciones homogéneas de grado  $d$ .



Esta tesis de licenciatura derivó en la publicación de un artículo en la revista *Finite Fields and Their Applications* con el título «The second generalized Hamming weights of some evaluation codes arising from a projective torus». Su asesor es Eliseo Sarmiento Rosales, del IPN.

Al finalizar 2018 Eduardo Camps volvió a México después de una estancia de 5 meses en Valladolid, España, trabajando con el Dr. Martínez Moro. Escribió ahí el artículo «Vardohus codes: Polar codes based on castle curves kernels», que se encuentra en revisión por parte de la IEEE.

Eduardo está terminando la maestría en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN. Su tema de tesis siguen siendo los códigos y su plan es ingresar al doctorado en matemáticas en agosto de este año.

**Jorge Garza Vargas** trabajó con Octavio Arizmendi Echegaray, quien también es investigador en CIMAT de Guanajuato.

Sobre su tesis, «Espacios de tráfico: Un nuevo método para el estudio de matrices aleatorias» nos escribió:

La teoría de probabilidad libre, introducida en la década de los 80 por Dan-Virgil Voiculescu, ha adquirido gran importancia en el estudio asintótico de familias de matrices aleatorias. En particular, los espacios de probabilidad no conmutativa son utilizados para modelar el comportamiento límite de álgebras de matrices aleatorias cuando la dimensión de estas tiende a infinito, siendo la independencia libre, en muchos de los casos, el concepto clave para describir la relación entre familias de matrices aleatorias generadas de manera independiente.[...]

En la teoría de tráficos, cada gráfica dirigida define una operación entre matrices y de esta manera se obtiene un espacio enriquecido algebraicamente que permite extender la noción de momento no conmutativo. La distribución en tráficos, obtenida a través de esta familia de operaciones, interpola la noción usual de distribución que se usa en probabilidad no conmutativa, y con esto da lugar una nueva noción de independencia, independencia libre en tráficos, la cual unifica distintas nociones de independencia, incluidas la clásica y la libre.

Esta tesis, por un lado busca contextualizar la teoría de tráficos y por el otro presentar sus resultados más interesantes. Contiene trabajo original que fue publicado en la revista *Reports on Mathematical Physics* en el 2018.

Jorge es estudiante de doctorado en la Universidad de California en Berkeley, co-asesorado por Nikhil Srivastava y Dan-Virgil Voiculescu.

**Marco Antonio Flores Martínez** fue distinguido con Mención Honorífica por su trabajo de tesis, con título «Curvas algebraicas y configuraciones de puntos en  $PI$ ». Él nos dice que:

El tema de mi tesis pertenece a la geometría algebraica, específicamente a la teoría de curvas algebraicas. En mi trabajo clasifiqué, hasta por isomorfismo, curvas elípticas e hiperelípticas de acuerdo al conjunto de  $2g + 2$  (donde  $g$  es el género de la curva) puntos de ramificación del morfismo de grado 2 que admiten a  $IP^1$ . Mejor dicho, de acuerdo a la órbita de dichos puntos bajo la acción del grupo de automorfismos de  $IP^1$ . En el caso de curvas elípticas, es decir  $g = 1$ , doy una construcción explícita del espacio móduli de curvas elípticas, vía esta correspondencia con cuartetos de puntos en  $IP^1$ , usando teoría geométrica de invariantes.

Marco Antonio cursó el programa de licenciatura en matemáticas que ofrecen conjuntamente la Universidad de Guanajuato y el CIMAT y sus asesores de tesis fueron César Lozano Huerta del Instituto de Matemáticas de la UNAM con sede en Oaxaca, y Xavier Gómez-Mont del CIMAT.

Él está terminando los cursos de la maestría en matemáticas de la Universidad Libre de Berlín, y planea pronto comenzar el doctorado. Está escribiendo su tesis de maestría en geometría aritmética.

**Daniel Gregorio Longino** obtuvo una Mención Honorífica por su tesis de licenciatura «Reyes y herederos en torneos». Nos cuenta sobre la misma:



Los torneos comprenden una amplia e importante clase de digráficas. Algunas de las áreas de aplicación en las cuales los torneos surgen como modelos incluyen dominación en algunas sociedades de animales, round robin, teoría de votaciones, teoría de la selección social y redes de comunicación.

A lo largo de esta tesis estudiamos los  $(n, m)r$ -torneos, las gráficas  $(r, r)$ -dominantes de torneos y las  $(2, r)$ -soluciones en la digráfica de líneas de torneos. Para el caso de las gráficas  $(2, 2)$ -dominantes de torneos conseguimos plasmar los resultados presentes en el artículo «Kings and Heirs: A characterization of the  $(2, 2)$ -domination graphs of tournaments» de Kim A.S. Factor y Larry J. Langley, el cual está orientado a dar una caracterización estructural de este tipo de gráficas.

En lo que respecta a las gráficas  $(r, r)$ -dominantes de torneos para  $r \geq 3$  hicimos notar . . . que para comprender su estructura era de suma importancia investigar las  $r$ -secuencias reales. Fue así como nos adentramos a examinar cuáles eran posibles. Los objetivos de esta tesis fueron para  $r \geq 2$  estudiar la existencia de torneos con un número específico de  $r$ -reyes. Dada una  $r$ -secuencia  $[m; h_1, \dots, h_m; s]r$ , determinar si es  $r$ -secuencia real de algún torneo. Para  $r \geq 2$  estudiar la gráfica  $(r, r)$ -dominante de un torneo, y finalmente dar una aplicación de las  $r$ -secuencias reales de torneos para encontrar  $(2, r)$ -soluciones ajenas dos a dos en la digráfica de líneas de un torneo.

Su tutora fue Laura Pastrana Ramírez, quien trabaja en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Daniel vive en la Ciudad de México, estudia el tercer semestre de la Maestría en Ciencias con la especialidad en

Matemáticas en el CINVESTAV del IPN, y le gustaría estudiar un doctorado en el extranjero.

**Rangel Hernández Ortiz** se tituló con la tesis «Conexidad restringida en gráficas y digráficas», misma que fue merecedora de una Mención Honorífica Sotero Prieto. Su asesor fue Diego Antonio González Moreno, quien trabaja en la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa. Sobre su trabajo nos escribe:

Una manera natural de generalizar la conexidad  $\lambda(G)$  de una gráfica  $G$  es imponer ciertas condiciones a los cortes de  $G$  o a las componentes conexas de  $G-S$ , donde  $S$  es un corte por aristas. En la tesis estudiamos un tipo de conexidad conocida como  $\lambda'$ -conexidad, la cual impone ciertas restricciones a los cortes por aristas. Nos enfocamos principalmente en los resultados clásicos que dicen bajo qué condiciones una gráfica o digráfica es  $\lambda'$ -conexa. Además, estudiamos el comportamiento de la  $\lambda'$ -conexidad en el producto cartesiano de digráficas. L. Volkmann resolvió el problema de determinar todas las digráficas fuertes de cuello 2 y 3 que son  $\lambda'$ -conexas. Siguiendo las ideas de Volkmann resolvimos el mismo problema para digráficas fuertes de cuello 4.

Actualmente Rangel está cursando el segundo año de la Maestría en Matemáticas Aplicadas en la UAM-Cuajimalpa, y después planea hacer un doctorado.

**Jorge Rubén Ruvalcaba Álvarez** ganó Mención Honorífica por su tesis. Nos escribe:

Mi trabajo, titulado «El campo de los números flexibles» [consta de] tres partes que tienen la intención de hacer una discusión de la geometría euclideana a través no de sus herramientas tradicionales, sino de la introducción de técnicas del así llamado «One-Fold-Origami».

La primera parte presenta una axiomatización de la geometría con técnicas de doblado de papel a través de seis axiomas [los axiomas de Huzita-Hatori]. Doy una revisión de ellos y los comparo con los axiomas de la geometría en *Los elementos de geometría* de Euclides. Se concluye aquí que los axiomas de origami son en cierto sentido más poderosos que los de Euclides porque entre otras cosas permiten calcular la raíz cúbica de un segmento de doblez (es decir, de recta) y trisecar un ángulo cualquiera.

La segunda parte es una limitación algebraica de los números que pueden construirse con origami. Construí un campo

como extensión algebraica de los números racionales que aloja a todos los números de origami y viceversa, todos los números de esa extensión pueden «doblar»se». Algo muy parecido a lo que se hace al delimitar el campo de los números construibles con regla y compás. Al campo decidí llamarlo campo de los números flexibles.

La tercera parte es un conjunto de reflexiones tangenciales a la discusión principal sobre la pertinencia y la completez de los axiomas de origami, de su equivalencia relativa con los axiomas de Euclides. También presenté la construcción del heptágono regular, imposible con regla y compás pero posible con origami. Decidí que esos capítulos si bien son interesantes, no son parte del esqueleto del tema así que sugerí una lectura desordenada de la tesis (muy al estilo Cortázar) para intercalar estas reflexiones dentro de las primeras dos partes.

Su asesor, Rodolfo San Agustín Chi es profesor del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Jorge Rubén estudia la maestría en Ciencias Matemáticas en la UNAM y busca ampliar sus conocimientos matemáticos para cruzar nuevas fronteras en el mundo del origami. Está interesado sobre todo en geometría, filosofía de las matemáticas, teoría de conjuntos y matemáticas recreativas. Paralelamente, nos comenta, su interés por el origami es más fuerte que nunca y sigue peleando por darlo a conocer, tanto a nivel matemático como recreativo. Tuvo la oportunidad de asistir a un evento sobre origami en Oxford, Inglaterra, y espera asistir, esta vez como ponente, a otro este año en Nueva York; también quisiera formar alguna suerte de *sociedad mexicana de origami* para continuar la difusión del tema tanto dentro como fuera de la UNAM y encontrar a la mayor cantidad de gente apasionada por la geometría y el origami.

El tema central de la tesis de **Gerardo Zago Yáñez**, otro recipiente de una Mención Honorífica, es abordar el problema de Michael, que es un problema abierto y trata sobre la caracterización de los funcionales lineales multiplicativos en álgebras  $m$ -convexas. Su trabajo se titula «Secuencialidad en álgebras topológicas».

En la tesis trabajamos sobre conceptos llamados de «secuencialidad» en álgebras, que permiten probar resultados que dan una respuesta parcial al problema de Michael. Esta tesis se centra en conceptos que hemos englobado con el término secuencialidad, y con ellos se llega a abordar un problema clásico de la teoría de las álgebras topológicas: la continuidad de las funcionales lineales multiplicativas.



Una clase particular de espacios vectoriales topológicos son las álgebras topológicas. La nueva operación algebraica que en ellas se considera, el producto, añade riqueza y complejidad a los temas y hace que las álgebras topológicas constituyan por sí mismas una área del análisis funcional. Ahí, nuevos objetos a estudiar son las funcionales lineales multiplicativas, también llamadas caracteres, es decir, las funcionales que además de ser lineales, satisfacen que la imagen de un producto es el producto de las imágenes de los factores.

Ernest A. Michael señala, en su célebre monografía «Local multiplicatively-convex topological algebras» (Álgebras topológicas convexas localmente multiplicativas) de 1952 que, de modo similar a lo que sucedió con los espacios lineales topológicos, donde con la convexidad local se generalizó la noción de espacio normado y se dio pie a extender la teoría de los espacios de Banach, se tiene que con las llamadas álgebras localmente multiplicativamente convexas (o simplemente  $m$ -convexas) se generalizó la noción de álgebras normadas, y se abrió la posibilidad de extender la teoría de las álgebras de Banach.

En un álgebra de Banach toda funcional lineal multiplicativa es continua. Michael planteó, en su monografía arriba mencionada, la pregunta: ¿es toda  $F$ -álgebra conmutativa funcionalmente continua?; es decir, ¿es continua toda funcional lineal multiplicativa definida en un álgebra compleja, conmutativa, metrizable, completa y localmente  $m$ -convexa? Esta pregunta se conoce en el área como el Problema de Michael, mismo que sigue abierto y que ha dado origen a muchas investigaciones y a la introducción de nuevos conceptos con el fin de resolverlo, inclusive de manera parcial. Este es el caso de los conceptos de álgebra infrasecuncial, secuencial y fuertemente secuencial, definidos para álgebras localmente convexas por Taqdir Husain, Gerard A. Joseph y Shu-Bun Ng. Estas nociones son el tema central de la tesis, que tiene como base el artículo «Infrasequential algebras» de Husain. En ella presentamos y probamos con todo detalle los resultados que ahí se exponen, algunos sin prueba ofrecida. Asimismo, en la tesis se desarrollan ejemplos de álgebras con alguno de los tipos de secuencialidad. Al final aparece la respuesta parcial de Husain al problema de Michael: la respuesta es afirmativa si el álgebra es además infrasecuncial. Se puede decir que un álgebra es infrasecuncial si los elementos de

cualquier subconjunto acotado son uniformemente acotados en cierto sentido.

Su asesor fue Ángel Carrillo, quien trabaja en el Instituto de Matemáticas de la UNAM. Gerardo estudia la Maestría en Matemáticas en la UNAM y al concluir le gustaría estudiar otro posgrado en el extranjero, no necesariamente en matemáticas.

Felicitamos de manera entusiasta a los ganadores del premio, a los ganadores de las menciones honoríficas y les deseamos mucha suerte en todas sus actividades del futuro.