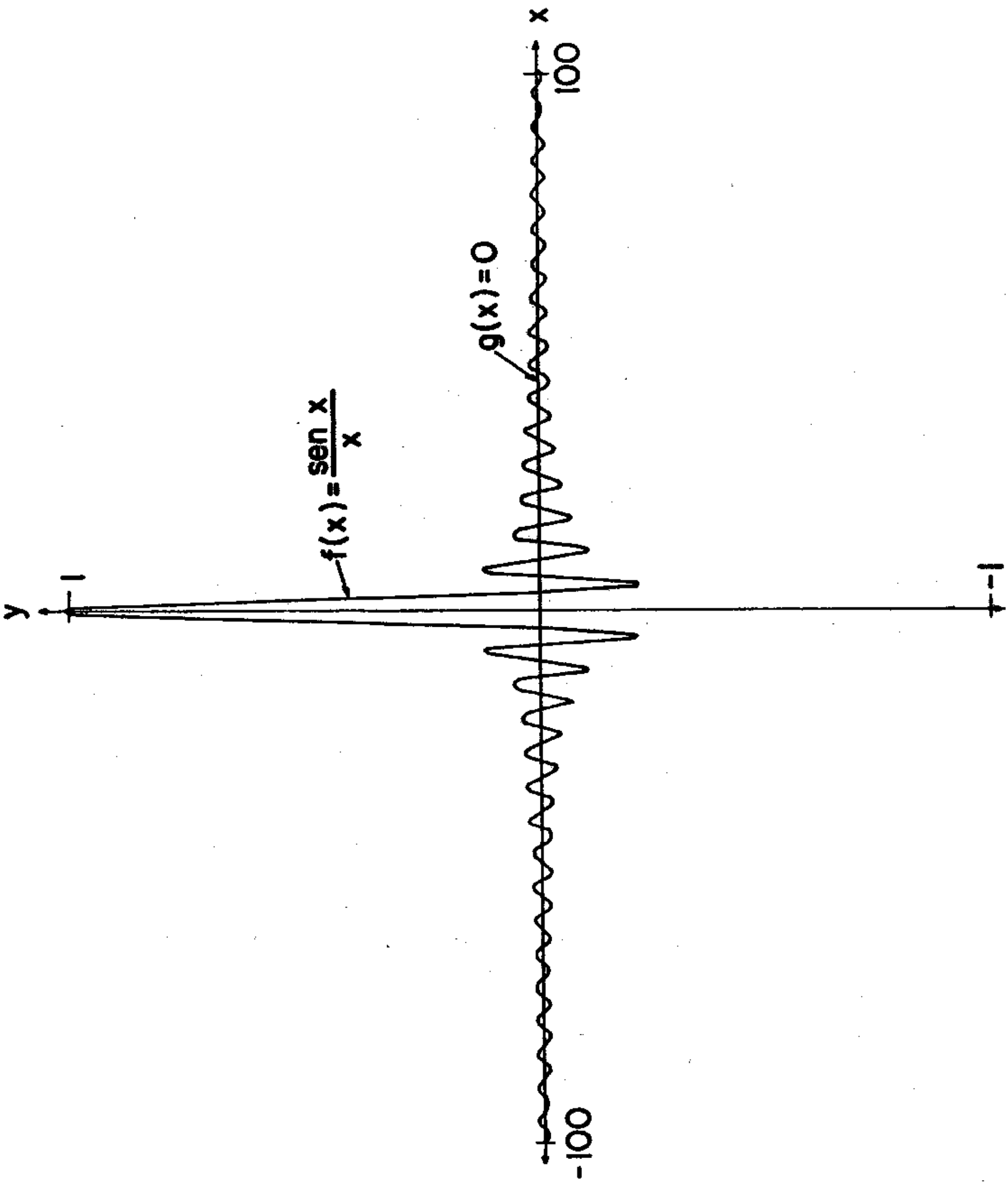
ASINTOTAS

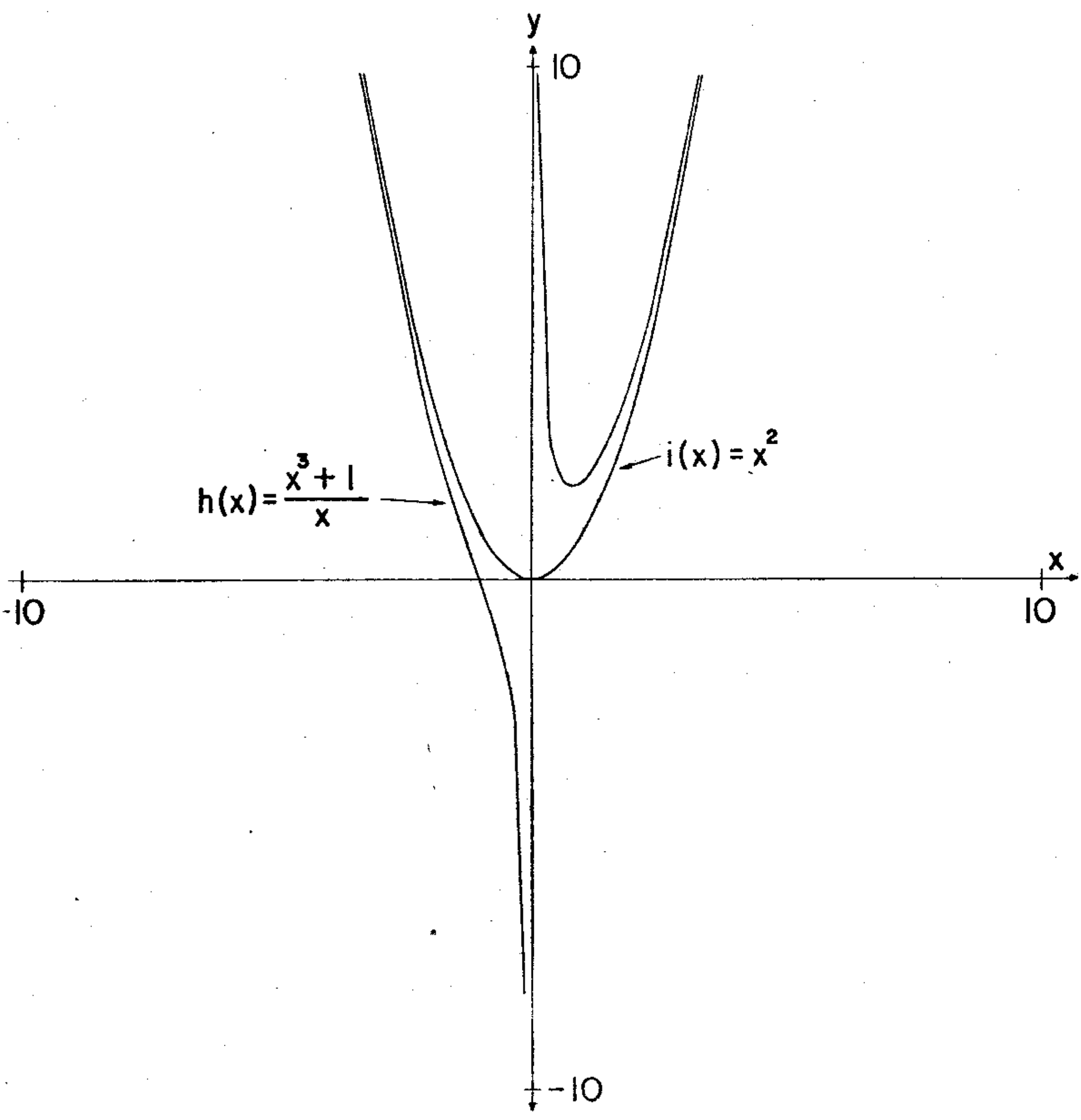
POR

JOSE LEONARDO SAENZ CETINA

1.- Introducción

En este artículo intentaremos aprehender la noción de asintoticidad superando las deficiencias de la clásica definición de asintota "La recta que se va acercando poco a poco a una curva y que en el infinito la toca". Conociendo las limitaciones de ésta, nuestras definiciones tratarán de cubrir diversos e importantes aspectos. El primero de ellos está relacionado con la posibilidad de decidir sin ninguna ambigüedad la asintoticidad. Así tenemos, por ejemplo, que entre la función $f(x)=(\text{Sen } x)/x$ y la recta $g(x)=0$ (ver figura 1) no es muy clara, según la antigua definición, esta relación ya que la recta corta infinidad de veces a la curva "antes" del "infinito". Por otra parte, un segundo punto sería el de permitir asintoticidad entre funciones en general, sin importar su grado de arbitrariedad, en lugar de solamente entre "curvas" por un lado y rectas por otro. En este caso, tomemos como ejemplo el par de funciones $h(x)=\left(x^3+1\right)/x$ e $i(x)=x^2$ (ver figura 2) las cuales pueden considerarse como asintóticas entre sí aunque ninguna de ellas es recta. Finalmente, pero no de menos importancia, sería el poder proveer de métodos efectivos de cálculo para tipos relevantes de asintotas.


y
1
-1
x
100
-100
$f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$
$g(x) = 0$


y
10
x
-10
10
-10
$i(x) = x^2$
$h(x) = \frac{x^3+1}{x}$

2.- Generalidades

La teoría de asintotas que desarrollaremos a continuación será para funciones reales de una variable real.

Definición

$$\mathbb{F}^{+} = \{f:A\rightarrow\mathbb{R} \mid A\subset\mathbb{R} \text{ y existe } a\in\mathbb{R} \text{ tal que } (a,+\infty)\subset A\}$$

Este será el conjunto de funciones para el cual tendrá sentido definir la noción de asintoticidad por la derecha.

Definición

Sean f, g en $\mathbb{F}^{+}$. Se dice que f es asintótica por la derecha a g, en símbolos $f \underset{+\infty}{\sim} g$, si y sólo si

$$\lim_{x\rightarrow+\infty} [f(x)-g(x)] = 0$$

Nótese que en esta definición no existe la restricción de que las asintotas, en este caso por la derecha, deban ser rectas; cualquier función en $\mathbb{F}^{+}$ que cumpla la condición podrá serlo. Por otro lado, el uso del límite al $+\infty$ da solidez a nuestra definición y formaliza las ideas de "acercarse poco a poco" y "tocar en el infinito".

Análogamente, para precisar los conceptos de asintoticidad por la izquierda y de asintoticidad en general vienen las siguientes definiciones.

Definiciones

$$\mathbb{F}^{-} = \{f:A\rightarrow\mathbb{R} \mid A\subset\mathbb{R} \text{ y existe } a\in\mathbb{R} \text{ tal que } (-\infty,a)\subset A\}$$

Sean f, g en $\mathbb{F}^{-}$. Se dice que f es asintótica por la izquierda a g, en símbolos $f \underset{-\infty}{\sim} g$, si y sólo si

$$\lim_{x\rightarrow-\infty} [f(x)-g(x)] = 0$$

$$\mathbb{F}^{+-} = \mathbb{F}^{+} \cap \mathbb{F}^{-}$$

Sean f, g en $\mathbb{F}^{+-}$. Se dice que f es asintótica a g, en símbolos $f \underset{\infty}{\sim} g$, si y sólo si $f \underset{+\infty}{\sim} g$ y $f \underset{-\infty}{\sim} g$, es decir, si f es asintótica tanto por la derecha como por la izquierda a g.

De esta forma quedan totalmente delimitados todos los tipos de asintoticidad que consideraremos.

<u>Ejemplo 1</u>

Efectivamente tenemos que

$$\frac{\text{Sen } x}{x} \underset{\infty}{\sim} 0$$

Ya que

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\text{Sen } x}{x} - 0\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\text{Sen } x}{x} = 0$$

y también

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\text{Sen } x}{x} - 0\right) = 0$$

Así pues $(\text{Sen } x)/x \underset{\infty}{\sim} 0$ con lo cual nuestra intuición queda confirmada por la definición.

<u>Ejemplo 2</u>

Asimismo tenemos que

$$\frac{x^3+1}{x} \underset{\infty}{\sim} x^2$$

Ya que

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3+1}{x} - x^2\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3+1-x^3}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

y también

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3+1}{x} - x^2\right) = 0$$

De donde que la función $\left(x^3+1\right)/x$ tiene como asintota a la función cuadrática x^2, representada gráficamente como una parábola, y así queda probado que funciones no lineales pueden ser asintotas.

Ejemplo 3

De manera más general, si f es una función racional, es decir, $f=P/Q$ con P, Q en $\mathbb{R}[x]$ y $Q\neq 0$, y C en $\mathbb{R}[x]$ es el polinomio cociente de la división "entera" de P entre Q entonces tenemos que siempre se cumple que $f \underset{\infty}{\sim} C$.

Demostración

Por el algoritmo de la división tenemos

$$P = CQ+R$$

con C, R polinomios y $R=0$ ó grado de R < grado de Q.

En cualquiera de los casos para R se cumple

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{R(x)}{Q(x)} = 0$$

Así pues

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} [f(x)-C(x)] &= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{P(x)}{Q(x)} - C(x)\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty} \left[C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} - C(x)\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{R(x)}{Q(x)} = 0\end{aligned}$$

Usando los mismos razonamientos se obtiene también que

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x)-C(x)] = 0$$

De donde $f \underset{\infty}{\sim} C$.

Nótese que en este ejemplo, como en el anterior, la función asintótica a f puede no ser lineal.

Este ejemplo ilustra un método a veces usado, pero sin justificación alguna, para encontrar asíntotas lineales.

Antes de continuar, puede observarse que las tres definiciones para asíntotas dadas son muy parecidas, es decir, que existe un claro dualismo entre ellas, algo como un cambio de diccionario. Por ello, cualquier proposición que se establezca para una de ellas tendrá un equivalente, una proposición dual, en las otras. Así pues, sería innecesario dar, por ejemplo, tres demostraciones análogas para teoremas que son claramente semejantes. Para evitar esto, en lo que sigue únicamente trabajaremos con la relación de asintoticidad por la derecha y asumiremos que las proposiciones equivalentes son válidas para los demás casos.

Es evidente que una relación de asintoticidad por la derecha del tipo tan general como la que hemos definido deba ser, en particular, independiente del orden en que sean dadas las funciones de $\mathbb{F}^+$. Así, $f \underset{+\infty}{\sim} g$ deberá ser equivalente a decir $g \underset{+\infty}{\sim} f$, esto es, que la simetría tiene que ser una propiedad de la relación $\underset{+\infty}{\sim}$. En realidad ésta cumple algo más que eso, a saber, es una relación de equivalencia en $\mathbb{F}^+$. Esto se establece formalmente en el siguiente teorema cuya demostración se omite por ser muy simple.

<u>Teorema 1</u>

Sean f, g, h en $\mathbb{F}^+$. $\underset{+\infty}{\sim}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{F}^+$, o sea, que tenemos

i) $f \underset{+\infty}{\sim} f$ para toda f en $\mathbb{F}^+$,

ii) si $f \underset{+\infty}{\sim} g$ entonces $g \underset{+\infty}{\sim} f$ y

iii) si $f \underset{+\infty}{\sim} g$ y $g \underset{+\infty}{\sim} h$ entonces $f \underset{+\infty}{\sim} h$.

Así pues, en adelante diremos simplemente que dos funciones en $\mathbb{F}^+$ son asintóticas por la derecha sin tener que mencionarlas en algún orden.

Como relación de equivalencia en $\mathbb{F}^+$, $\underset{+\infty}{\sim}$ descompone a $\mathbb{F}^+$ en clases de equivalencia de funciones asintóticas. Vale la pena definirlas y darles, tanto a ellas como a su conjunto, una notación particular.

Definiciones

Dada f en $\mathbb{F}^+$ definimos la clase de equivalencia de f bajo $\underset{+\infty}{\sim}$ como

$$[f]_{\underset{+\infty}{\sim}} = \left\{ g \in \mathbb{F}^+ \,\middle|\, f \underset{+\infty}{\sim} g \right\}$$

$$\mathbb{F}^+/_{\underset{+\infty}{\sim}} = \left\{ [f]_{\underset{+\infty}{\sim}} \,\middle|\, f \in \mathbb{F}^+ \right\}$$

Ahora que sabemos que la relación $\underset{+\infty}{\sim}$ es de equivalencia conviene averiguar a continuación cómo se comporta ante las operaciones comunes entre funciones de $\mathbb{F}^+$. Bajo la suma se porta adecuadamente como se afirma en el siguiente teorema de demostración trivial.

Teorema 2

Sean f, g, h, i en $\mathbb{F}^+$. Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$ y $h \underset{+\infty}{\sim} i$ entonces $f+h \underset{+\infty}{\sim} g+i$.

Con la multiplicación no ocurre siempre lo equivalente como se muestra en el siguiente contraejemplo.

Contraejemplo

Claramente

$$\frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$$

y

$$e^{x} \underset{+\infty}{\sim} e^{x}$$

Pero

$$e^{x} \cdot \frac{1}{x} \underset{+\infty}{\not\sim} e^{x} \cdot e^{-x}$$

ya que

$$\frac{e^{x}}{x} \underset{+\infty}{\not\sim} 1$$

Para conseguir casos positivos de la proposición esperada necesitamos introducir un concepto auxiliar.

Definicion

Sea f en $\mathbb{F}^+$. Se dice que f es acotada por la derecha si existen numeros reales M y N tales que si x>N entonces $|f(x)|<M$.

Es inmediato de las definiciones que si dos funciones son asintóticas por la derecha y una, por lo menos, de ellas es acotada por la derecha entonces ambas lo son. Así pues, en este caso podemos decir simplemente que el par de funciones asintóticas por la derecha es acotado por la derecha.

Teorema 3

Sean f, g, h, i en $\mathbb{F}^+$. Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$ y $h \underset{+\infty}{\sim} i$ y además cada par es acotado por la derecha entonces $fh \underset{+\infty}{\sim} gi$.

Demostración

Sea M>0 una cota común para las cuatro funciones. Así, dado $\varepsilon>0$, existe N_1 tal que si $x>N_1$ entonces, a la vez

$$|f(x)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

y

$$|h(x)-i(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Dada M, existe N_2 tal que si $x>N_2$, a la vez

$$|f(x)| < M,\ |g(x)| < M,\ |h(x)| < M,\ |i(x)| < M$$

Tomando la identidad

$$f(x)h(x)-g(x)i(x)$$
$$= \frac{1}{2}[(f(x)-g(x))(h(x)+i(x))+(h(x)-i(x))(f(x)+g(x))]$$

obtenemos la desigualdad

$$|f(x)h(x)-g(x)i(x)|$$
$$\leq \frac{1}{2}[|f(x)-g(x)|(|h(x)|+|i(x)|)+|h(x)-i(x)|(|f(x)|+|g(x)|)]$$

de la cual, si $x>\text{Máx}(N_1,N_2)$, tenemos

$$|(fh)(x)-(gi)(x)| < \frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon}{2M}\cdot 2M + \frac{\varepsilon}{2M}\cdot 2M\right] = \varepsilon$$

De donde

$$\lim_{x\to+\infty} [(fh)(x)-(gi)(x)] = 0$$

Es decir

$$fh \underset{+\infty}{\sim} gi \quad \blacksquare$$

Un caso ligeramente distinto se da en el siguiente teorema.

Teorema 4

Sean f, g, h en $\mathbb{F}^+$. Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$ y h es acotada por la derecha entonces $fh \underset{+\infty}{\sim} gh$.

Demostración

Sea $M>0$ una cota para h. Así, dado $\varepsilon>0$ existe N_1 tal que si $x>N_1$ entonces

$$|f(x)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Para la cota M existe N_2 tal que si $x>N_2$ entonces

$$|h(x)| < M$$

De donde que si $x>\text{Máx}(N_1,N_2)$ tenemos

$$|(fh)(x)-(gh)(x)| = |h(x)|\,|f(x)-g(x)| < M\cdot\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

O sea

$$\lim_{x\to+\infty} [(fh)(x)-(gh)(x)] = 0$$

Luego

$$fh \underset{+\infty}{\sim} gh \quad \blacksquare$$

Nótese que en el teorema anterior sólo se le pide la acotabilidad por la derecha a la función multiplicadora.

Corolario 4.1

Sean f, g en $\mathbb{F}^+$ y k constante real. Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$ entonces $kf \underset{+\infty}{\sim} kg$.

Pasemos ahora a la operación de composición. Para ella se presenta un caso en cierto sentido opuesto al de la multiplicación.

Teorema 5

Sean f, g, h en $\mathbb{F}^+$. Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ entonces $f \circ h \underset{+\infty}{\sim} g \circ h$.

Demostración

Dado $\varepsilon > 0$ existe M tal que si $y > M$ entonces

$$|f(y) - g(y)| < \varepsilon$$

Ahora bien, para esta M existirá un N tal que si $x > N$ entonces

$$h(x) > M$$

Así pues

$$|(f \circ h)(x) - (g \circ h)(x)| < \varepsilon$$

Luego

$$\lim_{x \to +\infty} [(f \circ h)(x) - (g \circ h)(x)] = 0$$

Es decir

$$f \circ h \underset{+\infty}{\sim} g \circ h \quad \blacksquare$$

La diferenciación no conserva a veces la relación de asintoticidad por la derecha como se muestra en el siguiente contraejemplo.

Contraejemplo

Claramente

$$\frac{\text{Sen } x^2}{x} \underset{+\infty}{\sim} 0$$

pero las derivadas

$$2\text{Cos } x^2 - \frac{\text{Sen } x^2}{x^2} \underset{+\infty}{\not\sim} 0$$

Para la integración tampoco se logra que la asintoticidad por la derecha se preserve siempre como se observa en el siguiente contraejemplo.

<u>Contraejemplo</u>

Claramente

$$\frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} 0$$

pero las antiderivadas

$$\ln x \underset{+\infty}{\not\sim} k$$

para toda constante k en $\mathbb{R}$.

No profundizaremos más por el momento en los problemas con la diferenciación e integración. Más adelante veremos un cierto caso positivo que será suficiente para nuestros propósitos.

Finalizamos esta sección exponiendo un resultado clave de unicidad entre polinomios asintotas.

<u>Teorema 6</u>

Sean P, Q en $\mathbb{R}[x]$. $P \underset{+\infty}{\sim} Q$ si y sólo si P=Q.

Demostración

$\Leftarrow$)Es una consecuencia de un teorema anterior.

$\Rightarrow$)Supongamos que $P \neq Q$. Entonces $P-Q=R\neq 0$. Ahora bien, como R es un polinomio no cero se tiene

$$\lim_{x \to +\infty} R(x) \neq 0$$

lo cual es una contradicción.

Luego P=Q. ∎

<u>Corolario 6.1</u>

Sean f en $\mathbb{F}^{*}$ y P en $\mathbb{R}[x]$. Si $f \underset{+\infty}{\sim} P$ entonces P es el único polinomio que es asintótico a f por la derecha.

3 - CÁLCULO

Nos proponemos ahora calcular mecánicamente tipos particulares de asíntotas. Para esto es necesario aclarar dos cuestiones básicas. La primera es, ¿por qué hemos definido las diferentes formas de asintoticidad como lo hemos hecho? Y la segunda es, ¿qué tipos particulares de asíntotas son importantes de calcular?

Estas preguntas tienen respuestas análogas y que se relacionan directamente con el teorema 6 y su corolario. Este nos garantiza que existe a lo sumo una asíntota polinómica en cada clase de equivalencia de $\mathbb{F}^{+}_{+\infty}/\sim$. Así pues, tomando en cuenta esto, la respuesta a la primera pregunta sería la siguiente: estamos acostumbrados a que en el caso de curvas que tienen por asíntotas rectas se da que para cada rama de la curva, tomada por separado, y cada dirección se tiene a lo más una recta asintótica. Como nuestras definiciones nos llevan de la mano al teorema 6 que asegura esto, tenemos entonces que aquéllas han sido, hasta ahora, adecuadas. Por otro lado, la respuesta a la segunda pregunta sería la siguiente: si queremos hallar un método de cálculo para asíntotas tenemos que asegurarnos de antemano que las asíntotas que encontraremos tengan unicidad en su clase para que así el método sea determinístico. Eso es precisamente lo que nos dice el teorema 6 acerca del caso polinómico. Pero, además, los polinomios no son nada indeseables de obtener en casos de aproximación como el que nos ocupa y son, por otra parte, la generalización más inmediata de la asintoticidad rectilínea. Por todo esto, un método satisfactorio sería aquel que se centrara en el cálculo de asíntotas polinomiales.

Para reforzar la importancia de los argumentos anteriores examinemos de cerca la posible definición rival de asintoticidad por la derecha: $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x)=1$. En ésta, bastaría que dos polinomios tengan el mismo grado y coeficiente inicial para que sean asintóticos, lo cual da al traste con la unicidad aún en el caso más simple de rectas. Llegados a este punto, únicamente faltaría demostrar que este desarrollo que hemos venido haciendo nos permite también encontrar fácilmente asíntotas polinómicas. Y éste es precisamente el propósito de esta sección.

El teorema 7, base de nuestro método, valdrá únicamente para un subconjunto de $\mathbb{F}^{+}$, el de las funciones derivables y cuya derivada se encuentre a su vez en $\mathbb{F}^{+}$. Definámoslo.

$$\mathbb{F}'^{+} = \left\{ f \in \mathbb{F}^{+} \middle| f' \in \mathbb{F}^{+} \right\}$$

En general, para $n \geq 1$, definimos

$$\mathbb{F}^{(n)+} = \left\{ f \in \mathbb{F}^{+} \middle| f^{(n)} \in \mathbb{F}^{+} \right\}$$

Naturalmente, se tienen las siguientes inclusiones

$$\mathbb{F}^{+} \supset \mathbb{F}'^{+} \supset \mathbb{F}''^{+} \supset \ldots$$

Enunciando informalmente el teorema 7, éste dice simplemente que si una función y su derivada son asintóticas por la derecha a dos polinomios entonces éstos se hallan relacionados de una manera inequívoca, a saber, el segundo es la derivada del primero.

<u>Teorema 7</u>

Sean f en $\mathbb{F}'^{+}$ y P, Q en $\mathbb{R}[x]$. Si $f \underset{+\infty}{\sim} P$ y $f' \underset{+\infty}{\sim} Q$ entonces $P' = Q$.

Demostración

Dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que si $x > N$ entonces, a la vez

$$|f(x)-P(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |P(x+1)-f(x+1)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f'(x)-Q(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Tomemos un polinomio R tal que $R' = Q$. Por el teorema del valor medio existirá un punto t del intervalo $(x,x+1)$ tal que

$$f(x+1)-R(x+1)-f(x)+R(x) = f'(t)-Q(t)$$

Es decir

$$|f(x+1)-R(x+1)-f(x)+R(x)| = |f'(t)-Q(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Sumando la desigualdad anterior con

$$|f(x)-P(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad y \quad |P(x+1)-f(x+1)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

obtenidas antes obtenemos

$$|P(x+1)-R(x+1)-[P(x)-R(x)]| < \varepsilon$$

$$|(P-R)(x+1)-(P-R)(x)| < \varepsilon$$

Es decir

$$\lim_{x \to +\infty} [(P-R)(x+1)-(P-R)(x)] = 0$$

De donde

$$(P-R)(x+1) \underset{+\infty}{\sim} (P-R)(x)$$

Por lo que por el teorema 6 obtenemos

$$(P-R)(x+1) = (P-R)(x)$$

Ahora bien, como los polinomios reales no constantes no son funciones periódicas tenemos que la igualdad anterior no es posible a menos que P-R sea constante. Así

$$P' = R' = Q \blacksquare$$

Corolario 7.1

Sean f en $\mathbb{F}'^{+}$ y Q en $\mathbb{R}[x]$. Si $f' \underset{+\infty}{\sim} Q$ y si para todo P en $\mathbb{R}[x]$ tal que $P'=Q$ se tiene que $f \underset{+\infty}{\not\sim} P$ entonces para todo R en $\mathbb{R}[x]$ se tiene asimismo $f \underset{+\infty}{\not\sim} R$.

Corolario 7.2

Sean f en $\mathbb{F}'^{+}$ y P en $\mathbb{R}[x]$. Si $f \underset{+\infty}{\sim} P$ y $f' \underset{+\infty}{\not\sim} P'$ entonces para todo Q en $\mathbb{R}[x]$ se tiene que $f' \underset{+\infty}{\not\sim} Q$.

Corolario 7.3

Sean f en $\mathbb{F}^{(n)+}$ y $P_o,\dots,P_n$ en $\mathbb{R}[x]$. Si $f^{(i)} \underset{+\infty}{\sim} P_i$ para toda i entonces $P_o^{(i)}=P_i$.

Probablemente el lector esté familiarizado con el cálculo de asintotas, por medio de ciertos trucos, para algún tipo especial de funciones, como, por ejemplo, el de las funciones racionales presentado en el ejemplo 3. El método que emana del teorema 7 requiere, además de suficiente diferenciabilidad de la función dada, de integraciones sucesivas sencillas y el cálculo de límites y prescinde de cualquier otro truco adicional particular, lo cual permite aplicarlo a un conjunto muy grande de funciones que incluye naturalmente a las ya mencionadas.

El método en su forma más simple parte de un polinomio constante. Es decir, supongamos que tenemos una función f que es muchas veces diferenciable y que una de sus derivadas, digamos la n-ésima, es asintótica por la derecha a una constante a_n. Entonces, por el teorema 7, el único polinomio que puede ser asintótico a la n-1 derivada debe ser del tipo lineal $a_n x + a_{n-1}$, o sea, una antiderivada de la función constante a_n. Como sólo conocemos por el momento a a_n, para hallar a_{n-1} debemos calcular el límite, si existe, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f^{(n-1)}(x) - a_n x\right]$. Si no existe, por el corolario 7.1, $f^{(n-1)}$ no puede ser asintótica a ningún polinomio por lo que no se puede concluir nada al respecto de f por este medio. Por el contrario, si existe, este límite es el escalar a_{n-1} buscado y $f^{(n-1)}$ es asintótica por la derecha a $a_n x + a_{n-1}$. Ahora bien, para la n-2 derivada puede decirse lo propio: si tiene algún polinomio asintótico por la derecha éste debe ser de la forma $a_n/2 \cdot x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}$ función cuadrática antiderivada de $a_n x + a_{n-1}$. Se calcula asimismo el límite $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f^{(n-2)}(x) - a_n/2 \cdot x^2 - a_{n-1}x\right]$ el cual, de existir, nos dará la constante a_{n-2} buscada o, por el contrario, nos indicará la ausencia de polinomio asintota a la derivada n-2 truncando el método. Y así sucesivamente, pueden seguirse aplicando los razonamientos anteriores a las demás derivadas y, si el método no falla en alguno de los pasos sucesivos, concluir en el hallazgo de un polinomio de la forma $\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i x^i}{i!}$ asintótico por la derecha a la función original f.

El método puede igualmente aplicarse, con las modificaciones adecuadas, a los demás tipos de asintoticidad.

<u>Corolario 7.4</u>

Sea f en $\mathbb{F}'^{+}$. Si $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=a_1$ entonces $f \underset{+\infty}{\sim} a_1x+a_0$ si y sólo si $\lim_{x\to+\infty} [f(x)-a_1x]=a_0$.

Como puede verse, este corolario no es sino uno de los casos más simples del método expuesto antes. Si lo enunciamos es porque puede ser que el lector lo reconozca como otro de los recursos más usados, pero también muy pocas veces justificado, para hallar asíntotas lineales.

<u>Ejemplo 4</u>

Hallar las asíntotas polinómicas, tanto por la derecha como por la izquierda, de cada una de las ramas de la hipérbola general

$$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$$

con a, b, h, k en $\mathbb{R}$ y $a,b>0$.

Solución

Las dos ramas de la hipérbola son

$$f(x) = k+\frac{b}{a}\sqrt{(x-h)^2+a^2}$$

y

$$g(x) = k-\frac{b}{a}\sqrt{(x-h)^2+a^2}$$

Hallemos las asíntotas de f.

Derivando f obtenemos

$$f'(x) = \frac{b}{a}\left[\frac{x-h}{\sqrt{(x-h)^2+a^2}}\right]$$

Nos interesa hallar la asintota por la derecha. Siguiendo el método, tomemos el límite a $+\infty$ de f'.

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-h}{\sqrt{(x-h)^2+a^2}}\right] = \frac{b}{a}$$

Existe, luego podemos aplicar el siguiente paso del método.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{b}{a}x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[k+\frac{b}{a}\sqrt{(x-h)^2+a^2}-\frac{b}{a}x\right] = k-\frac{b}{a}h$$

Por lo tanto

$$f \underset{+\infty}{\sim} k+\frac{b}{a}(x-h)$$

En otras palabras, la recta $(y-k)/b-(x-h)/a=0$ es asintótica por la derecha a la rama superior de la hipérbola $(y-k)^2/b^2-(x-h)^2/a^2=1$.

Hallemos ahora la asintota por la izquierda de f.

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \frac{b}{a}\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x-h}{\sqrt{(x-h)^2+a^2}}\right] = -\frac{b}{a}$$

Apliquemos ahora el segundo paso.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+\frac{b}{a}x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[k+\frac{b}{a}\sqrt{(x-h)^2+a^2}+\frac{b}{a}x\right] = k+\frac{b}{a}h$$

De donde

$$f \underset{-\infty}{\sim} k-\frac{b}{a}(x-h)$$

Es decir, la recta $(y-k)/b+(x-h)/a=0$ es asintótica por la izquierda a la rama superior de la hipérbola $(y-k)^2/b^2-(x-h)^2/a^2=1$.

Análogamente se demuestra que

$$g \underset{+\infty}{\sim} k-\frac{b}{a}(x-h)$$

y

$$g \underset{-\infty}{\sim} k+\frac{b}{a}(x-h)$$

O sea, que las rectas $(y-k)/b+(x-h)/a=0$ y $(y-k)/b-(x-h)/a=0$ son asintóticas, respectivamente, por la derecha y por la izquierda a la rama inferior de la hipérbola $(y-k)^2/b^2-(x-h)^2/a^2=1$.

A veces es más fácil calcular un límite dividiendo previamente la función dada por x que tener que derivarla antes. Cuando tenemos la certeza de que una cierta función tiene una asíntota lineal por la derecha el siguiente recurso puede ser usado con ventaja.

Corolario 7.5

Sea f en $\mathbb{F}'^{+}$. Si $f \underset{+\infty}{\sim} a_1x+a_0$ y $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=a_1$ entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x=a_1$.

Demostración

Por la regla de L'Hospital

$$a_1 = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \blacksquare$$

Invitamos al lector a repetir el ejemplo 4 usando el corolario anterior.

Veamos otro ejemplo.

Ejemplo 5

Hallar las asíntotas polinómicas, tanto por la derecha como por la izquierda, de la función

$$f(x) = \sqrt[3]{x^6+1}$$

Solución

Derivemos f una vez.

$$f'(x) = \frac{2x^5}{\left(\sqrt[3]{x^6+1}\right)^2}$$

Intentemos hallar primero la asíntota por la derecha. Veamos **entonces si existe el límite a +∞.**

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5}{\left(\sqrt[3]{x^6+1}\right)^2} = +\infty$$

No es finito. Siguiendo el método, derivemos f otra vez.

$$f''(x) = \frac{2x^{10}+10x^4}{\left(\sqrt[3]{x^6+1}\right)^5}$$

Tomemos de nuevo el límite a $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f''(x) = \lim_{x\to+\infty} 2\left[\frac{x^{10}+5x^4}{\left(\sqrt[3]{x^6+1}\right)^5}\right] = 2$$

Existe. Luego podemos aplicar el siguiente paso.

$$\lim_{x\to+\infty} [f'(x)-2x] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{2x^5}{\left(\sqrt[3]{x^6+1}\right)^2} -2x\right] = 0$$

De nuevo existe. Aplicamos por esto el paso final.

$$\lim_{x\to+\infty} \left[f(x)-\frac{2x^2}{2}\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x)-x^2\right] = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^6+1} -x^2\right) = 0$$

Por lo tanto

$$f \underset{+\infty}{\sim} x^2$$

Cabe notar que en los desarrollos anteriores da lo mismo tomar el límite a $+\infty$ que a $-\infty$ (lo cual no ocurrió en el ejemplo 4). Así pues, tenemos asimismo que

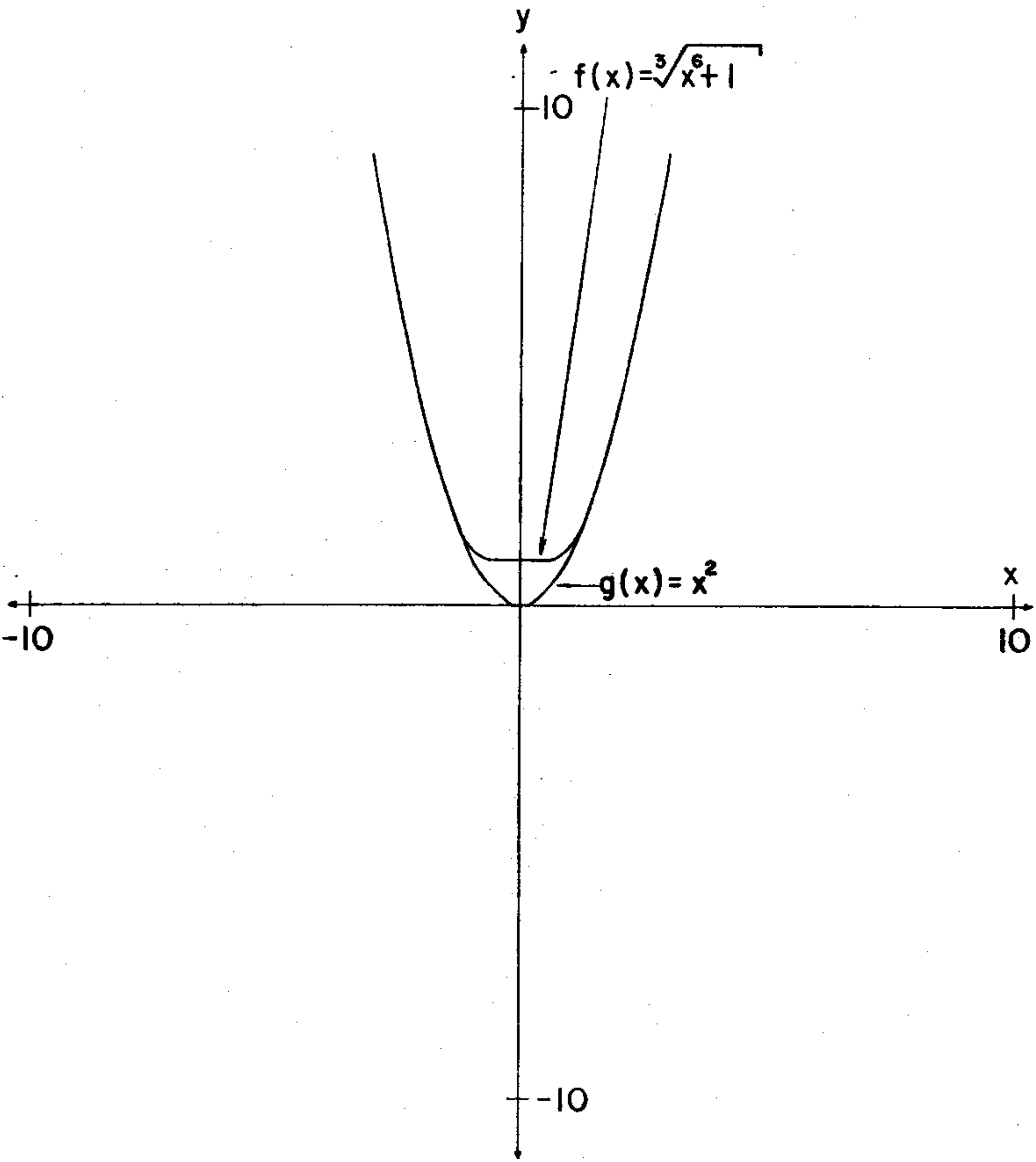
$$f \underset{-\infty}{\sim} x^2$$

De donde

$$f \underset{\infty}{\sim} x^2$$

(ver figura 3).

Estrictamente hablando, para explotar en su totalidad al teorema 7 no necesitamos el que alguna derivada de la función dada deba ser asintótica a una constante ya que bien podría serlo a un polinomio en general. Sin embargo, este caso es mucho más difícil de detectar que el presentado debido a que no parte de una base simple, fácil de calcular. De todos modos, deberá aplicarse siempre que el polinomio en cuestión sea fácilmente distinguible.


y
$f(x)=\sqrt[3]{x^6+1}$
10
$g(x)=x^2$
x
-10
10
-10

4.- Aclaraciones finales

Para terminar, presentamos a continuación algunas aclaraciones y conclusiones finales.

Como se habrá podido observar, hemos omitido, deliberadamente, el tratamiento de asíntotas verticales; esto por varias razones. La primera es que hemos tratado de apegarnos siempre a la definición más comúnmente usada de función (ver, por ejemplo, [4], pág. 26) y las asíntotas verticales más importantes no pueden ser funciones. Tal es el caso de las rectas. Por otro lado, el caso más interesante, que sería el polinómico, pierde su dificultad ya que las asíntotas verticales polinomiales son necesariamente las rectas. Por último, este tema suele ser tratado con suficiente extensión en la mayoría de los libros de Cálculo (ver, por ejemplo, [3], págs. 118-119).

Los conjuntos $\mathbb{F}^{+}$, $\mathbb{F}^{-}$ y $\mathbb{F}^{+-}$ pueden ser, en realidad, más grandes de lo que los hemos definido, basta con tomar funciones cuyos dominios no sean acotados en las direcciones necesarias. Preferimos, sin embargo, no complicar excesivamente las definiciones.

Intentamos que, entre otras cosas, el artículo fuera una recopilación de definiciones y recetas sencillas para las asíntotas. Así, el corolario 7.4 es la definición de asíntota que se da en [2], pág. 161. Por otro lado, el corolario 7.5 es un método dado sin demostración en [1], pág. 285. La diferencia esencial con estos tratados es la de que nosotros deducimos todo a partir de una raíz común.

Si el lector se ha tomado la molestia de calcular detalladamente los límites de los últimos dos ejemplos se habrá dado cuenta de que son bastante largos. Tuvimos que recurrir a ellos ya que los más inmediatos, las funciones racionales, fueron prácticamente exterminados desde el ejemplo 3. Creemos que el ejemplo 4 tiene particular importancia ya que aunque es probable que muchas personas conocerán cuáles son las asíntotas para las hipérbolas seguramente muy pocas habrán construido o demostrado matemáticamente que son las que efectivamente se dan. Aún así, podría pensarse que debe existir algún otro método menos complicado para calcular las asíntotas de los últimos dos ejemplos. Tal método existe y esperamos exponerlo con detalle en una publicación posterior.

Bibliografía

[1] Bronshtein, Ilya y Semendiaev, Konstantin, "Manual de Matemáticas para Ingenieros y Estudiantes", cuarta edición, Mir, Moscú: 1982.

[2] Kuratowski, Kazimierz, "Introducción al Cálculo", primera edición, Limusa, México: 1978.

[3] Leithold, Louis, "El Cálculo con Geometría Analítica", cuarta edición, Harla, México: 1982.

[4] Rudin, Walter, "Principios de Análisis Matemático", tercera edición, McGraw-Hill, México: 1980.