Miscelánea Matemática **53** (2011) 39–56 SMM

Las revoluciones de Galois

José Antonio de la Peña
jap@matem.unam.mx
Instituto de Matemáticas UNAM y
Centro de Investigación en Matemáticas, AC.

1. El álgebra desde la antigüedad hasta principios del siglo XIX

La ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, como todo estudiante de secundaria sabe hoy en día, tiene dos soluciones:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Este resultado se conoció en casos particulares desde hace más de 4000 años y con esta generalidad desde el tiempo de los griegos. En el siglo XVI, el álgebra recibe un gran impulso con el descubrimiento, por los matemáticos de la escuela italiana en el Renacimiento, de la resolución por radicales de la ecuación cúbica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

El uso de letras para expresar cantidades desconocidas en una ecuación nos parece una idea muy natural hoy en día. Sin embargo, a pesar de la antigüedad de los problemas algebraicos, no fue sino hasta el siglo XVII cuando Descartes introdujo el uso de las letras a, b, c para denotar números conocidos y el resto de las letras para los números desconocidos. Fue también Descartes el primero en utilizar x^2 en lugar de xx. En el siglo XVIII hay varios intentos fallidos en demostrar que todo polinomio real se factoriza como producto de polinomios lineales y cuadráticos, hasta que Gauss establece el llamado *teorema fundamental del álgebra*. Daremos un vistazo rápido a estos desarrollos algebraicos, en su contexto cultural, como marco para entender el genio creativo de Galois y otros matemáticos que en los primeros decenios del siglo XIX crean las bases del *álgebra moderna*.

Historia antigua

Problemas algebraicos que requieren la solución de ecuaciones lineales y cuadráticas son parte de la cultura de civilizaciones antiguas tanto en Mesopotamia como en Egipto. Es, probablemente, un hecho extraordinario que entre los primeros vestigios históricos se encuentren *documentos* que refieren la solución de ecuaciones cuadráticas. Dichos documentos, escritos en símbolos cuneiformes sobre barras de arcilla o en caracteres jeroglíficos sobre papiros, consideran problemas algebraicos que aparecen formulados y resueltos de una manera completamente verbal, sin utilizar símbolos especiales. En los papiros, a menudo aparecen las palabras us (longitud), sag (anchura) y a!a (área) utilizadas para representar las incógnitas, no porque dichas incógnitas representen tales cantidades geométricas, sino porque, seguramente, muchos problemas algebraicos surgieron de situaciones geométricas donde dicha terminología tenía sentido. Por su parte, los babilonios disponían de la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas, pero dado que ellos no conocían los números negativos, nunca se consideraban las posibles raíces negativas de las ecuaciones de segundo grado.

Actualmente se conoce mejor las matemáticas desarrolladas en Mesopotamia hace unos 4000 años. Se sabe que también consideraban problemas que conducen a raíces cúbicas. Uno de estos problemas, formulado en simbolismo moderno, es el siguiente

$$12x = z, \quad y = x, \quad xyz = V$$

donde V es un volumen dado. Para calcular x los babilonios usaban tablas de cubos y raíces cúbicas hechas previamente, extrapolando linealmente los casos tabulados a los casos que deseaban calcular.

Con justa razón se considera a la civilización helénica como la cuna de la cultura occidental y entre los aportes de la Grecia clásica a la cultura, las matemáticas juegan un papel central. Las matemáticas griegas se pueden, esquemáticamente, dividir en tres etapas en las que las figuras de Pitágoras, Platón y Euclides son esenciales. Euclides fue el sintetizador de todos los conocimientos precedentes; su obra *Los Elementos* se convirtió en paradigmática a lo largo de veintidós siglos. La obra de Euclides está formada por trece libros, de los cuales el Libro II y el V son casi completamente algebraicos; pero a diferencia del álgebra actual, que es simbólica, el álgebra de *Los Elementos* es geométrica.

Heredera cercana de la cultura helénica, en Alejandría crece una escuela científica alrededor de Ptolomeo. Ahí surge el más importante de todos los algebristas griegos, Diofanto de Alejandría. Su libro más importante es *Aritmética*, colección de unos 150 problemas sobre aplicaciones del álgebra. Tal vez la innovación más importante de Diofanto es, que manteniendo aún enunciados algebraicos en la forma retórica de la frase, sustituye con abreviaturas una serie de magnitudes, conceptos y operadores frecuentes, es decir, inicia el *álgebra sincopada*.

Poco después, y durante casi 1500 años, la influencia del pensamiento aristotélico en la forma impuesta por la iglesia católica lleva a la ciencia, y en particular, a las matemáticas al periodo oscurantista conocido como Edad Media. La lenta recuperación se inicia en los centros de comercio europeo cuyos contactos con el mundo árabe han sido intensos.

En ese periodo de transición del oscurantismo al Renacimiento y de encuentro entre la tradición occidental y el mundo árabe, probablemente la figura más destacada es Leonardo de Pisa (1170 - 250),más conocido como Fibonacci. Fue educado en África y viajó extensamente por Europa y Asia Menor, gracias a lo que pudo aprender el sistema de numeración hindú-arábigo. En 1202, Fibonacci escribió su *Liber Abaci* (el libro del ábaco), un tratado muy completo sobre métodos y problemas algebraicos en el que se recomienda con gran insistencia el uso de los numerales hindú-arábigos. Tanto en el *Liber Abaci* como en su trabajo posterior: *Liber Quadratorum* (1225), Leonardo se ocupó del álgebra. Siguió a los árabes en usar palabras en lugar de símbolos y basar el álgebra en métodos aritméticos. Expuso la solución de ecuaciones de primer y segundo grado, así como de algunas ecuaciones cúbicas. Aunque, al igual que Khayyam (matemático árabe), creía que las ecuaciones cúbicas no podían ser resueltas algebraicamente.

El momento más alto del trabajo de Fibonacci es la observación que no todos los números pueden construirse con regla y compás como lo sugieren *Los Elementos* en el libro X. En efecto, muestra que las raíces de la ecuación

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

no pueden construirse con regla y compás.

El Renacimiento

Durante los siglos XV y XVI hubo un vasto movimiento de revitalización de la cultura en Europa Occidental. El invento de la imprenta ayudó notablemente a que este movimiento cultural pudiese expandirse de una manera rápida por toda Europa.

Los matemáticos del Renacimiento prepararon el terreno para el resurgir del estudio matemático en Europa mediante las traducciones de los trabajos griegos y árabes. Así, Europa continuó aprendiendo su álgebra de forma lenta dado a la escasez de estas traducciones y el poco interés que mostraban muchos humanistas por las ciencias. La tradición científica todavía no se construía y, en particular, los matemáticos eran una clase especial de diletantes. Nunca en la historia hubo un grupo más pintoresco de matemáticos que los de la escuela italiana que resolvió las ecuaciones cúbicas y cuárticas.

A finales del siglo XV la mayoría de los matemáticos eran autodidactas. Se ganaban la vida trabajando en los primeros bancos o jugando a las cartas. Para dar popularidad a sus proezas de agilidad mental, se desafiaban en torneos públicos de resolución de problemas o complicados cálculos mentales.

En 1494 un sacerdote franciscano, Lucas Pacioli, publicó un compendio de toda el álgebra conocida hasta sus días. Terminaba observando que los matemáticos aún no podían resolver las ecuaciones cúbicas por métodos algebraicos. Este reto fue parcialmente resuelto por Scipione del Ferro en Bolonia, quien encontró la solución general de la ecuación $x^3 + ax + b = 0$, pero no publicó su resultado, seguramente para tener una ventaja sobre otros algebristas en las confrontaciones públicas. Sin embargo, en sus últimos años, confió la solución de la ecuación a Antonio Fior, quién retó a un desafió matemático a otro gran algebrista, Nicolo Fontana, llamado Tartaglia, es decir, el tartamudo.

Tartaglia conocía ya entonces la solución de las ecuaciones de la forma $x^3 + ax^2 + b = 0$. Para su desafío, cada cual pidió al otro resolver problemas que involucraban ecuaciones cúbicas. Después de un tiempo en que ambos trabajaron intensamente, Tartaglia pudo resolver los problemas de Fior pero Fior no pudo con los de Tartaglia. Esto estableció a Tartaglia como el más grande calculista de Italia. Hasta que llegó Girolamo Cardano.

Cardano nació en 1501 en Pavia. Hijo natural de un médico y una viuda, tuvo una infancia desventurada. Después de algunos estudios de medicina, vivió en pequeñas poblaciones campesinas donde se dedicaba a jugar cartas, atender pacientes y escribir tratados sobre quiromancia, medicina y aritmética. Finalmente obtuvo una cátedra de medicina en la universidad y llegó a ser uno de los más renombrados médicos europeos.

En 1539 Cardano se acercó a Tartaglia para pedirle que le diera a conocer su solución de las ecuaciones cúbicas (de la forma $x^3+ax^2+b = 0$). Tartaglia se negó, pero tras prolongado intercambio de cartas, cedió. Tartaglia fue a Milán e hizo jurar a Cardano que nunca revelaría su secreto. Este prometió que escribiría la solución de Tartaglia en lenguaje cifrado para que aún después de su muerte nadie la conociese. Sin embargo, una vez conocido el secreto, Cardano lo publicó en su libro *Ars Magna*. Había circunstancias mitigantes para esta traición: Cardano dio completo crédito a Tartaglia por su descubrimiento; por otra parte, el resultado que publicó no era exactamente el que le había comunicado Tartaglia, ya que Cardano encontró la expresión por radicales de la solución de la ecuación cúbica más general $ax^3 + bx^2 + cx = d$.

Tartaglia consideró imperdonable la traición de Cardano. Después de muchas disputas, se decidió dirimir el asunto en una justa matemática entre Tartaglia y Cardano, quien se hizo representar por su brillante alumno Ferrari. La justa terminó con el triunfo de Ferrari, lo que lo hizo el más connotado algebrista italiano. Posteriormente, Ferrari llegaría a resolver por radicales las ecuaciones de cuarto grado.

Cardano publicó más de 130 libros de medicina, matemáticas, astrología, ajedrez, juegos de azar, filosofía, historia y otros temas. Sin embargo, los últimos años de su vida no fueron afortunados. En 1557 su hijo favorito asesinó a su esposa. El asesino fue ejecutado tres años más tarde. Fue tanta la tristeza de Cardano que abandonó su cátedra en Milán y fue a vivir a Bolonia. Ahí su segundo hijo contrajo tremendas deudas de juego y terminó en la cárcel en varias ocasiones. En 1570, Cardano fue acusado de herejía y encarcelado. El papa le permitió salir de prisión y le concedió una pequeña pensión. Sin embargo, a Cardano no le fue permitido volver a enseñar en la Universidad hasta su muerte, en 1576.

La solución de Cardano a la ecuación cúbica

Deseamos encontrar las soluciones de la ecuación $ax^3 + bx^2 + cx = d$, cuando a no es 0. Sabemos que tendremos que encontrarlas entre los números complejos. Procederemos en forma parecida a como lo hizo Cardano en el siglo XVI.

Hay tres números complejos que satisfacen la ecuación $x^3 = 1$, uno de ellos es, por supuesto, el 1. Los otros números son $\omega = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ y $\omega = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i)$ en el plano complejo.

Tomemos el número complejo ω. Es sencillo verificar que para cualesquiera números A, B, C se tiene que:

$$(A+B+C)(A+B\omega+C\omega^2)(A+B\omega^2+C\omega) = A^3+B^3+C^3-3ABC.$$

En un momento haremos uso de esta identidad.

Multipliquemos la ecuación que queremos resolver por $27a^2$, de forma que obtenemos:

$$27a^3x^3 + 27a^2bx^2 + 27a^2cx + 27a^2d = 0.$$

Manipulando un poco esta ecuación, podemos reescribirla:

$$\begin{gathered}(3ax+b)^3 - 9ax(-3ac+b^2) + 27a^2d - b^3 = 0,\\ (3ax+b)^3 + (27a^2d - 9abc + 2b^3) - 3(3ax+b)(-3ac+b^2) = 0.\end{gathered}$$

Hagamos $A = 3ax + b$, si podemos además encontrar números B y C con la propiedad de que $B^3 + C^3 = (27a^2d - 9abc + 2b^3)$ y también $BC = -3ac + b^2$, entonces tendríamos que $A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = 0$ y podríamos usar la identidad anterior.

Para calcular B y C, observemos que el sistema:

$$\begin{aligned}B^3 + C^3 &= (27a^2d - 9abc + 2b^3)\\ BC &= (-3ac + b^2)^3\end{aligned}$$

implica que B^3 y C^3 son las raíces de la ecuación cuadrática:

$$t^2 - (27a^2d - 9abc + 2b^3)t + (-3ac + b^2)^3 = 0$$

que sabemos resolver muy bien.

Una vez calculados B y C, podemos hacer uso de que:

$$\begin{aligned}&(A+B+C)(A+B\omega+C\omega^2)(A+B\omega^2+C\omega)\\ &\qquad = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = 0\end{aligned}$$

Para obtener que alguno de los factores $A+B+C$, $A+B\omega+C\omega^2$ o bien $A+B\omega+C\omega^2$ es cero. Así obtenemos que las tres soluciones de la ecuación cúbica son de la forma $x = (A-b)/3a$, donde $A = -(B+C)$, $A = -(B\omega + C\omega^2)$ o bien $A = -(B\omega^2 + C\omega)$.

Por ejemplo, consideremos la ecuación $x^3 + 24x - 56 = 0$. Primero debemos hallar los números B^3 y C^3 como raíces de la ecuación cuadrática $t^2 - 27 \times (-56)t + (-3 \times 24)^3 = 0$, esto es:

$$\begin{aligned}B^3 = -\frac{27 \times 56 + \sqrt{27^2 \times 56 + 4 \times 27 \times 24^3}}{2} &=\\ -(27 \times 28 + 4 \times 3^5) &= -2^6 \times 3^3\end{aligned}$$

y

$$C^3 = -27 \times 28 + 4\times^5 = 2^3 \times 3^3.$$

Luego tenemos que $B = -12$ y $C = 6$. Las soluciones de la ecuación cúbica son: 2, $4\omega - 2\omega^2$ y $4\omega^2 - 2\omega$.

Hacia la modernidad

Uno de los avances más significativos en el álgebra durante el siglo XVI fue la introducción de un mejor simbolismo, lo que hizo posible hacer una ciencia del álgebra. Los símbolos + y − fueron introducidos por los alemanes en el siglo XV para denotar excesos y defectos en los pesos de cofres y arcas; el símbolo & para la multiplicación lo introdujo William Oughtret y el símbolo = fue obra de Robert Recorde, matemático en Cambridge, quien escribió un tratado sobre el álgebra. Sin duda el cambio más significativo en el carácter del álgebra relacionado con el simbolismo fue introducido por François Viète (1540-1603) un abogado francés cuyo interés por las matemáticas era puro entretenimiento y describe su In Artem Analyticam Isagoge como la obra del análisis matemático restaurado. Viète traza la línea divisoria entre la aritmética y el álgebra y propone utilizar una vocal para representar una cantidad que se supone en álgebra desconocida o indeterminada, y una consonante para representar una magnitud o un número que se supone conocido o dado. Esta distinción entre el concepto de parámetro y la idea de incógnita fue un paso previo a la matemática moderna.

En 1799 Gauss publica su tesis en la Universidad de Helmstädt que lleva el título de "Nueva Demostración del Teorema Que Toda Función Algebraica Racional y Entera de Una Variable Puede Resolverse en Factores Reales de Primero o de Segundo Grado". Este teorema, al que más tarde se referirá Gauss como el *teorema fundamental del álgebra* era conocido en su tiempo como el teorema de D'Alembert; pero Gauss demostró que todos los intentos de demostración anteriores, incluyendo los de Euler y Lagrange, eran incorrectos. La tesis doctoral de Gauss demostraba que toda ecuación polinómica $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz, ya sean los coeficientes reales o complejos.

Dos años después de la presentación de su tesis, Gauss publicó su libro más conocido, un tratado de teoría de números en latín *Disquisitiones arithmeticae*. Esta obra es la responsable del desarrollo del lenguaje y delas notaciones de la parte de la teoría de números conocida como el álgebra de las congruencias, entre otras muchas cosas. *Disquisitiones* sirvió también para que con dieciséis años un chico noruego llamado Niels Henrik Abel despertara su gran interés por las matemáticas y tres años más tarde, en 1824 publicase un ensayo titulado *Sobre la Resolución Algebraica de Ecuaciones*. En su trabajo, Abel llega a la conclusión de la insolubilidad de la ecuación de quinto grado, es decir, demuestra que no puede existir ninguna fórmula general expresada en términos de operaciones algebraicas explícitas que nos de las raíces de la ecuación si el grado del polinomio es mayor que cuatro. Sin embargo, se sabía que había gran cantidad de ecuaciones en grados arbitrariamente grandes que eran solubles por radicales. La meta ahora era determinar qué ecuaciones eran solubles por radicales. Aquí es donde entra en la historia el joven matemático francés Évariste Galois. El criterio aportado por Galois para la resolubilidad por radicales de las ecuaciones polinómicas rebasa el marco del problema que trataba al crear el concepto abstracto de grupo.

2. El joven revolucionario Évariste Galois

Los elegidos de los dioses mueren jóvenes.

Evariste Galois nació en Bourg-la-Reine, cerca de París en 1811. Murió a los 20 años de edad en 1832.

Galois nació en el seno de una familia acomodada y políticamente activa durante los agitados tiempos de los gobiernos de Napoleón, Carlos X y Luis Felipe de Orleans. Su madre lo instruyó hasta que ingresó al colegio Louis-le-Grand en 1823. A los 15 años y bajo la guía de uno de sus maestros había leído los trabajos de Euclides y Legendre en geometría y de Lagrange en álgebra.

A los 16 años comenzó a considerar un problema fundamental del álgebra: la resolución de ecuaciones por radicales. Hemos visto que las ecuaciones polinomiales de grado 2 y 3 pueden resolverse *por medio* de radicales, esto es, expresiones en los coeficientes de la ecuación que incluyen sumas, multiplicaciones, divisiones y extracciones de raíces (cuadradas y cúbicas). Esto también es posible para las ecuaciones de grado 4. Pero no para todas las ecuaciones de grado 5. Esto había sido probado recientemente por el joven matemático noruego Niels Abel, pero Galois no lo sabía. En realidad lo que intentaba encontrar era un resultado más general. Asociando cada polinomio al grupo de todas las posibles permutaciones de las raíces que determinan automorfismos en los números complejos (el llamado *grupo de Galois* de la ecuación), buscaba condiciones en el grupo que implicaran la solubilidad de la ecuación polinomial por medio de radicales.

A partir de 1827 la vida de Galois estuvo llena de infortunios. Mientras estaba en el Louis-le-Grand, Galois preparó tres publicaciones que corrieron con pésima suerte. En 1829 envió la primera memoria destinada a su publicación a Cauchy, el matemático francés más influyente del momento. Este perdió el manuscrito. Igual suerte corrió su segundo artículo que esta vez envió a Fourier, quien murió a los pocos días de haberlo recibido. Mientras tanto, su padre se había suicidado por problemas políticos y él fue rechazado para ingresar a la Escuela Politécnica, la universidad de mayor prestigio donde podía estudiar un matemático. Decidió entrar a la Escuela Normal Superior para prepararse como maestro. En esos días su activismo político se incrementó al grado de escribir feroces ataques contra el rey Luis Felipe de Orleans. Galois fue expulsado de la Escuela Normal y puesto en prisión en dos ocasiones. En 1831, su tercer artículo fue rechazado por Poisson, quien le envió una nota diciendo que era incomprensible.

El 29 de mayo de 1832 Galois fue retado a un duelo a pistola. Las razones son poco claras. Pudo haber sido provocado por la pasión hacia una mujer, o montado por sus enemigos políticos. El caso es que Galois sabía que probablemente moriría al día siguiente. Dedicó toda la noche a escribir sus ideas acerca de los grupos de permutaciones de raíces y la solubilidad por radicales de ecuaciones polinomiales, así como vagas menciones a muchas otras ideas. Este escrito, que dirigió como carta a su amigo Auguste Chevalier, contenía unas pocas páginas garabateadas con comentarios en los márgenes que decían "no tengo tiempo". La carta termina así:

> Pídele a Jacobi o a Gauss que públicamente den su opinión, no sobre la verdad de los resultados, sino sobre su importancia. Después habrá, espero yo, alguien que encontrará provechoso descifrar todos los garabatos.

Al día siguiente, Galois fue herido y murió un día después de peritonitis. Fue enterrado en la fosa común el 2 de junio.

El apoyo y comprensión de los matemáticos que Galois no tuvo en vida, lo encontró después. Joseph Liouville estudió la carta a Chevalier y logró entender las ideas principales de Galois. El 4 de julio de 1843, Liouville se dirigió a la Academia de Ciencias de París con estas palabras:

> Espero interesar a la Academia anunciando que entre los papeles de Evariste Galois he encontrado una solución tan precisa como profunda de este bello problema: ¿cuándo es una ecuación soluble por radicales?

Si bien no podemos aquí entrar en detalles sobre la teoría de Galois, podemos dar un ejemplo de un polinomio que no es resoluble por radicales e indicar superficialmente las razones de que esto suceda.

Teorema 1 *El polinomio* $x^5 - 6x + 3 = 0$ *no tiene solución por radicales.*

Idea de la demostración. Indicamos los principales pasos:

1. La ecuación $x^5 - 6x + 3 = 0$ tiene tres soluciones reales y dos complejas. Para observarlo, podemos graficar el polinomio $p(x) = x^5 - 6x + 3 = 0$ en el plano $X - Y$. La observación se sigue del hecho que el polinomio toma valores negativos en -2 y en 1, valores positivos en -1 y en 2 y sabiendo que la gráfica tiene un solo máximo local en $\sqrt[4]{6/5}$ y un solo mínimo local en $\sqrt[4]{6/5}$ (para la obtención de máximos y mínimos hace falta un poco de análisis).

2. El polinomio $p(x) = x^5 - 6x + 3 = 0$ no puede escribirse como producto de dos polinomios con coeficientes enteros de grado menor que 5. Supongamos que esto no fuera el caso y tuviésemos $q(x)$ y $r(x)$ de grado menor que 5 y tales que $p(x) = q(x)r(x)$. Como el grado de $q(x)$ más el grado de $r(x)$ es 5, entonces podemos suponer que $q(x)$ tiene grado 1 o 2, mientras que $r(x)$ tiene grado 4 o 3, respectivamente.

   Si $q(x)$ tiene grado 1, entonces $q(x) = nx + m$ y $r(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ con $n, m, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0$ números enteros. Luego, $na_4 = 1$, que implica que n es 1 o -1 y además $-m/n = -m$ es una solución de $p(x) = 0$. Pero, por el punto 1 sabemos que $p(x) = 0$ no tiene soluciones enteras.

   Supongamos ahora que $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ y $r(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ con coeficientes enteros. Entonces, igualando los coeficientes de los polinomios $p(x) = q(x)r(x)$, tenemos:

$$\begin{aligned} a_0b_0 &= 3 \\ a_0b_1 + a_1b_0 &= -6 \\ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 &= 0 \\ a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 &= 0 \\ a_2b_2 + a_3b_1 &= 0 \\ a_3b_2 &= 1 \end{aligned}$$

   De la primera ecuación concluimos que uno (y sólo uno) de a_0 y b_0 es divisible entre 3. Supongamos que b_0 es divisible entre 3. De la segunda ecuación obtenemos que b_1 es también divisible entre 3 y finalmente, de la tercera ecuación tenemos que b_2 es divisible entre 3. Esto contradice obviamente la última ecuación. Luego, podemos suponer que $a_0 = 3$ y $b_0 = 1$. Procediendo como antes tenemos que a_1, a_2 y a_3 son divisibles entre 3, lo que otra vez contradice la última ecuación. Esto prueba la afirmación 2.

3. Un polinomio de grado 5 que satisface las condiciones 1 y 2 tiene grupo de Galois S_5. El grupo de Galois G es un grupo de permutaciones de las cinco raíces complejas del polinomio $p(x)$ (son cinco raíces por el teorema fundamental de álgebra). Luego, G es un subgrupo de S_5. Un polinomio (con la propiedad 2) tiene siempre un elemento de orden 5 en el grupo de Galois, esto es, hay una permutación g en G tal que $g^5 = 1$, pero $g^i \neq 1$ para $i \leq i \leq 4$. Por otra parte, como hay dos raíces no reales de $p(x)$, estas tienen la forma $s + ti$ y $s - ti$, lo que produce un elemento de grado 2 en G. En efecto, la transformación de plano complejo g que consiste en enviar cualquier número complejo $x_1 = s+ti$ en su conjugado complejo $x_2 = s - ti$ tiene la siguiente propiedad: o bien x_1 y x_2 son reales y ambas raíces quedan fijas, o bien envía la raíz x_1 en la segunda raíz x_2 (esto sucede en caso de que x_1 y x_2 no sean reales). Esta transformación satisface también que $g^2(z) = z$ para todo número complejo z.

   Podemos así suponer que a G pertenecen la trasposición $(1, 2)$ y la rotación $(5, 4, 3, 2, 1)$. Estos elementos generan a S_5. Luego $G = S_5$.

4. El grupo S_5 no es soluble. Esto es, no hay una cadena de subgrupos $S_5 = G_0, G_1, \ldots, G_m$ de forma que G_i sea normal en G_{i-1} y el cociente G_{i-1}/G_i tenga orden primo. En efecto, esto es así porque S_5 tiene como subgrupo normal a A_5, que no tiene subgrupos normales.

5. El teorema de Galois indica que: si $p(x) = 0$ es soluble por radicales, entonces el grupo de Galois G del polinomio $p(x)$ es soluble.

La idea de la prueba del teorema de Galois es la siguiente: si G es un grupo soluble, tenemos una cadena $G = G_0, G_1, \ldots, G_m$ de forma que G_i es normal en G_{i-1} y el cociente G_{i-1}/G_i tiene orden primo. Asociada a la cadena hay una cadena de subconjuntos de los números complejos $F_0 \subset \cdots \subset F_m$ tales que F_i es el conjunto de números complejos z que quedan fijos bajo la acción de G_i (esto es, $g(z) = z$ para todo elemento en G_i). El conjunto F_0 contiene a los coeficientes de $p(x)$, mientras que todas las raíces de $p(x) = 0$ están en F_m. El hecho de que G_{i-1}/G_i tenga orden primo implica que los elementos de F_i se puedan construir por radicales a partir de elementos de F_{i-1}. Luego, las raíces de $p(x) = 0$ se pueden construir por radicales a partir de los coeficientes del polinomio $p(x)$.

En nuestro caso, y debido a que S_5 no es soluble se sigue que el polinomio $p(x) = x^5 - 6x + 3 = 0$ no es soluble por radicales.

3. El desarrollo de la noción de grupo

La noción de simetría es sin duda más antigua que las matemáticas. En el lenguaje cotidiano el adjetivo simétrico se usa para calificar un objeto bien proporcionado, bien equilibrado; la simetría denota belleza. Otro significado de este adjetivo entra en la composición simetría bilateral, que quiere decir que lados derecho e izquierdo son iguales, como en el cuerpo humano. Esa segunda acepción determina un concepto geométrico muy preciso.

Muchas de las culturas antiguas tenían una idea de la simetría acorde con las acepciones anteriores. Los griegos pensaban, por ejemplo, que sólo un cuerpo humano simétrico (en el sentido geométrico) podía ser bello. Sin embargo, comenzaron a observar otras formas de simetría. En la naturaleza hay múltiples ejemplos de organismos con formas más complicadas de simetría que la simetría bilateral del cuerpo humano. Por ejemplo, las estrellas del mar presentan simetrías alrededor de un centro, si rotamos la estrella en un ángulo de 72°, no notaremos ningún cambio. Las flores presentan también simetrías centrales que pueden ser altamente complicadas. Los copos de nieve, que se presentan en una variedad infinita, presentan siempre simetría hexagonal (es decir, un giro de 60° los hace verse iguales).

Cuando los moros de España desarrollaron sus estudios de simetría ornamental, deben de haber contado con una idea clara de las simetrías y probablemente con métodos sistemáticos de análisis. Sin embargo, la noción matemática de grupo de simetrías se estableció mucho más tarde.

El grupo de simetrías de una estructura cristalina se llama *grupo cristalográfico*. Debido a su interés por los cristales, los químicos comenzaron por clasificar los grupos cristalográficos en tres dimensiones y solo más tarde consideraron el problema de los grupos de embaldosados planos. Los grupos cristalográficos fueron clasificados por el químico alemán Johan Christian Hessel en 1830. Un grupo cristalográfico G deja invariante una red infinita de puntos en el plano o en el espacio. Por tanto es una extensión de un grupo abeliano libre A y un grupo finito F. En notación matemática moderna:

$$0 \to A \to G \to F \to 1$$

es sucesión exacta y se escinde por la izquierda. Hay exactamente 32 grupos cristalográficos hasta isomorfía.

Si bien la clasificación de los grupos cristalográficos solo se completó al final del siglo pasado, los moros en España ya sabían bastante de esto: ¡los 17 grupos cristalográficos planos se encuentran en embaldosados de la Alhambra! Seguramente los moros no sabían entonces que ya no podían hallar otros grupos pero sus conocimientos y práctica en el diseño eran tales que encontraron todos.

Examinemos la idea predominante de grupo en tiempos de Galois y el impacto de su trabajo. Nuestro concepto actual de grupo abstracto es como sigue:

Un grupo es un conjunto G junto con una operación entre los elementos del grupo. El resultado de la operación entre dos elementos a y b se denota $a \cdot b$. El grupo G con esta operación cumple las siguientes propiedades:

asociatividad: dados cualesquiera tres elementos a, b y c del grupo G se tiene $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

neutro: existe un elemento e en el grupo con la propiedad de que $a \cdot e = a$ y también $e \cdot a = a$, para todo elemento a del grupo.

inverso: para cada elemento a del grupo existe otro elemento a^{-1} con la propiedad de que $a \cdot a^{-1} = e$ y también $a^{-1}a = e$.

Aún en pleno siglo XX, por grupo abstracto se entendían dos cosas diferentes. Además de la definición axiomática dada anteriormente, también era aceptada la de un grupo definido por generadores y relaciones. Atenderemos solo el desarrollo de la versión axiomática.

El famoso artículo de Galois sobre la resolución de ecuaciones por radicales cuyas sucesivas versiones de 1829, 1830 y 1831 pasaron por las manos de Cauchy, Fourier y Poisson, hacia uso extensivo de la noción de grupo abstracto pero no incluía ninguna definición. Tal vez, el mismo Evariste no estaba plenamente consciente de la definición más adecuada, como muestra la nota manuscrita la noche final del 29 de mayo de 1832,donde dice:

> Si en dicho grupo se tienen las sustituciones S y T, también se tiene ST.

En esas condiciones, no es de asombrarse que Poisson no comprendiese la profundidad del trabajo de Galois. De hecho, la definición de grupo dada por Liouville en la publicación póstuma de Galois de 1846 es simplemente la de la nota de 1832. Sin embargo, un año antes, en 1845, Cauchy escribió una memoria que incluía la definición de sistema conjugado de sustituciones, que corresponde a un conjunto con una operación binaria. Dado que las sustituciones corresponden a permutaciones de un conjunto finito, los otros axiomas (asociatividad, neutro e inversos) se siguen automáticamente. El nombre de grupo solo se impuso por la influencia del trabajo de Jordan *Traite des substitutions et des equations algebraiques.*

El primer intento por definir un grupo abstracto se debe a Cayley en 1854. Sin embargo la definición es confusa y el intento fallido. Posteriormente, en 1878, Cayley escribiría:

> Un grupo está definido por la ley de composición de sus miembros.

Esto es, por su tabla de multiplicar. Retomando esta línea, Burnside define, en su libro de 1897 *The theory of groups of finite order*, un grupo como un conjunto de operadores cerrado bajo composición y existencia de inversos. Sin embargo, postula innecesariamente la asociatividad y no requiere la existencia del elemento neutro.Todavía faltaba un poco para la definición correcta.

4. El mito de Galois

Tal es la carga romántica y dramática de la vida de Évariste Galois que ha resultado difícil separarla de su obra. El dramatismo de la última noche tratando de plasmar sus ideas matemáticas cuando lo espera un duelo que resultara fatal, queda expresado indeleblemente en el libro de E.T. Bell:

> All night long he had spent the fleeting hours feverishly dashing off his scientific last will and testament, writing against time to glean a few of the great things in his teeming mind before the death he saw could overtake him. Time after time he broke off to scribble in the margin "I have not time; I have not time," and passed on to the next frantically scrawled outline. What he wrote in those last desperate hours before the dawn will keep generations of mathematicians busy for hundreds of years. He had found, once and for all, the true solution of a riddle which had tormented mathematicians for centuries: under what conditions can an equation be solved?

Como toda historia que está llamada a convertirse en mito, esta cuenta una historia humana embellecida por el halo del genio científico, salpicada de exageraciones, ingredientes que juntos han de despertar la imaginación de los futuros admiradores. Así, Freeman Dyson escribe:

> In those days, my head was full of the romantic prose of E.T. Bell's *Men of Mathematics*, a collection of biographies of the great mathematicians. This is a splendid book for a young boy to read (unfortunately, there is not much in it to inspire a girl, with Sonya Kovalevsky allotted only half a chapter), and it has awakened many people of my generation to the beauties of mathematics. The most memorable chapter is called "Genius and Stupidity" and describes the life and death of the French mathematician Galois, who was killed in a duel at the age of twenty.

Varios mitos han crecido junto con el mito dramático de la vida de Galois, todos ellos generalizaciones ligeras de un ejemplo particular al ámbito global de las matemáticas. Mencionamos dos de los más poderosos:

- La incomprensión del *establishment* por el trabajo de los científicos jóvenes.
- Las matemáticas importantes son obra de jóvenes talentosos. De hecho, según el mito, la barra de 35 años es infranqueable en la producción de resultados matemáticos importantes. En palabras de Hardy, en su famosa *A mathematician's Apology*:

  > No mathematician should ever allow himself to forget that mathematics, more than any other art or science, is a young man's game

La mejor forma de disipar un mito es confrontarlo contra datos duros. La tabla en la siguiente página compara las edades de producción en diferentes disciplinas. Nuestra conclusión es que el comportamiento en todas las ciencias es similar.

Una discusión detallada de ejemplos de precocidad en matemáticas y otras disciplinas se puede ver en el artículo de Gutterman. No abundaremos más aquí, En cambio regresaremos brevemente al mito de la figura de Galois.

La vida de Galois deja poco espacio para la especulación puesto que se cuenta con todos los documentos escritos por él y sobre él, con declaraciones de testigos. La compilación más completa es el trabajo de Dupuy (1896) y recientemente el esfuerzo de clarificación histórica por Rothman. De esas fuentes debería quedar claro a todo lector desapasionado que los recuentos más conocidos de la vida de Galois por Bell, Infeld y otros crean un personaje romántico y rebelde, víctima de infortunios e incomprensión, pero, desafortunadamente, no del todo real.

Discipline	Mean age of first contribution	Mean age of best contribution
Mathematics	27.3	38.8
Astronomy	30.5	40.6
Physics	29.7	38.2
Chemistry	30.5	38.0
Biology	29.4	40.5
Medicine	32.3	42.1
Technology	31.6	39.7
Earth sciences	30.9	42.5
Others	33.4	41.6

FUENTE: Dean K. Simonton, University of California at Davis.

Citamos dos ejemplos que ilustran momentos importantes de la vida de Galois.

El primero proviene de una carta escrita en abril de 1832 por la matemática Sophie Germain a su colega Libri:

> ...Decidedly there is a misfortune concerning all that touches upon mathematics. Your preoccupation, that of Cauchy, the death of M. Fourier, have been the final blow for this student Galois who, in spite of his impertinence showed signs of a clever disposition. All this has done so much that he has been expelled from l'Ecole Normale. He is without money and his mother has very little also. Having returned home, he continued his habit of insult, a sample of which he gave you after your best lecture at the Academy. The poor woman fled her house, leaving just enough for her son to live on, and has been forced to place herself as a companion in order to make ends meet. They say he will go completely mad and I fear this is true.

El segundo proviene de las memorias de Raspail, que llegaría a ser un destacado estadista, y que en ese momento comparte la celda con un borracho Galois que parece profetizar su propia muerte unos meses después:

> How I like you, at this moment more than ever. You do not get drunk, you are serious and a friend of the poor. But what is happening to my body? I have two men inside me, and unfortunately, I can guess which is going to overcome the other. I am too impatient to get to the goal. The passions of

> my age are all imbued with impatience. Even virtue has that vice with us. See here! I do not like liquor. At a word I drink it, holding my nose, and get drunk. I do not like women and it seems to me that I could only love a Tarpeia or a Graccha. And I tell you, I will die in a duel on the occasion of some coquette de bas etage. Why? Because she will invite me to avenge her honor which another has compromised. Do you know what I lack, my friend? I confide it only to you: it is someone whom I can love and love only in spirit. I have lost my father and no one has ever replaced him, do you hear me...?

Ambas escenas nos muestran un Evariste Galois atormentado, tormentoso, menos espíritu puro de lo que Bell o Infeld pretenden, con causas menos nobles que aquellas de la figura idealizada, y tal vez, causasmás complejas.

Pero, finalmente, el mito de la vida de Galois importa menos, mucho menos que la realidad de la inspiración intelectual que lo llevó a la creación, en pocos meses, de lo que llegaría a ser una fructífera rama de las matemáticas. Inspiración que marca el nacimiento del álgebra moderna. Parafraseando a Hilbert, cuando se refiere a las matemáticas de Cantor, podemos concluir diciendo:

> Nadie nos echará del paraíso que Galois creó para nosotros.

Bibliografía

1. Wikipedia.
2. E. Bell, *Men of Mathematics*, Simon and Schuster, New York, 1937.
3. N. Bourbaki, *Elementos de Historia de las Matemáticas. Versión española Jesús Hernández*, Ed. Alianza.
4. C. B. Boyer, *Historia de la matemática*, Ed. Alianza.
5. J. A. de la Peña, *Algebra en todas Partes. La Ciencia para Todos 166*, Fondo de Cultura Económica (1999). 5a. Reimpresión, 2010.
6. P. Dupuy, La vie d'evariste galois, *Annales de l'Ecole Normale* **13** (1896).
7. F. Dyson, *Disturbing the Universe*, Harper and Row, New York, 1979.
8. L. Gutterman, *Are Mathematicians Past Their Prime at 35? Chronicle of Higher Education*, Dec. 2000.
9. L. Infeld, *El Elegido de los Dioses. La vida de Evariste Galois, Original: To whom the Gods love (1948)*, Ed. Siglo XXI, 2001.
10. M. Kline, *El pensamiento matemático de la antigüedad hasta nuestros días*, Ed. Alianza.

11. P. Neumann, *The abstract group concept. Conferencia dictada en la Universidad de Sussex en marzo de 2011*, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Abstract_groups.html.
12. T. Rothman, Genius and biographers: The fictionalization of evariste galois, *American Mathematical Monthly* **89, 84** (1982).