

# El problema del área de una superficie

Roberto Pichardo Mendoza

Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas

Universidad Nacional Autónoma de México

[rpm@ciencias.unam.mx](mailto:rpm@ciencias.unam.mx)

## 1. Introducción

Hace unos años tuve el gusto de ser invitado a dar una plática a algunos colegas que trabajan como docentes en el nivel medio superior. Elegí hablar de un resultado atribuido al matemático alemán Hermann Schwarz y usarlo como pretexto para conversar con mi audiencia sobre el justo balance de intuición y formalidad en la docencia. Dos cosas me sorprendieron enormemente al final de la conferencia: primero, que los profesores (matemáticos egresados de diferentes universidades) jamás habían escuchado del resultado de Schwarz y, segundo, que de no ser por lo que les había contado ellos hubiesen jurado que lo hecho por Schwarz era imposible, precisamente porque su intuición y la formación que tuvieron en los primeros años de la carrera les dictaban lo contrario.

Aunque a continuación hablaremos detalladamente del resultado de Schwarz, conviene explicar someramente aquí de qué se trata: por un lado, dada una función  $f$  del intervalo  $[a, b]$  en  $\mathbb{R}$ , uno puede intentar definir la longitud de la gráfica de  $f$  (una curva en el plano) mediante aproximaciones sucesivas de poligonales a esta y, de hecho, esta definición resulta ser adecuada para funciones  $f$  que tienen propiedades muy simples (véase [2, ejer. 26, p. 384]); por otro lado, lo que Schwarz descubrió es que la cuestión de establecer el concepto de área de una superficie no puede ser resuelta a través del uso de poliedros que se aproximan a la superficie.

## 2. Un poco de historia

Suponga que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y que  $P = \{t_0, \dots, t_n\}$  es una partición del intervalo  $[a, b]$ . Entonces,  $(t_0, f(t_0)), \dots, (t_n, f(t_n))$  son puntos sobre la gráfica de  $f$  y la longitud de la poligonal que conecta a estos en orden ascendente es

$$\ell(f, P) := \sum_{i=1}^n \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2}.$$

Dos cosas nos dicta la intuición: (1) la longitud de la gráfica de  $f$  debe ser mayor o igual a cualquier número de la forma  $\ell(f, P)$  y (2) mientras más fina sea la partición  $P$ , más próxima será la cantidad  $\ell(f, P)$  a la longitud de la gráfica de  $f$ . Así, suena razonable definir esta longitud como el supremo de todas las longitudes de las poligonales inscritas a la gráfica de  $f$ , desde luego, suponiendo que la colección de todos los  $\ell(f, P)$  está acotada superiormente.

Las intuiciones del párrafo previo se verifican formalmente con el mínimo de requerimientos (véase [2, ejer. 26, p. 384]): si  $f$  es diferenciable y  $\sqrt{1 + (f')^2}$  es integrable, entonces el supremo existe y es igual a la integral de  $a$  a  $b$  de la función  $\sqrt{1 + (f')^2}$ . Más aún, esta integral nos devuelve los valores esperados en los casos bien conocidos, a saber, la longitud de un segmento de línea, de una semi-circunferencia, etcétera.

El éxito obtenido con la longitud nos motiva a probar suerte con el concepto de área de una superficie. El intento natural sería: dada una superficie  $S$  que satisface algunos requerimientos de diferenciabilidad e integrabilidad, el área de esta es el supremo de todas las áreas de los poliedros inscritos a  $S$  (donde por *poliedro inscrito a  $S$*  entendemos un poliedro con la propiedad de que todos sus vértices yacen sobre la superficie).

De hecho, palabras más, palabras menos, lo expresado en el párrafo previo apareció como definición oficial en las primeras ediciones de «Cours de calcul différentiel et integral» de J. A. Serret, un libro de texto ampliamente usado en la segunda mitad del siglo XIX. Por fortuna, a finales de 1880 el matemático italiano Angelo Genocchi recibió de Schwarz una carta en la que se muestra que el conjunto formado por todas las áreas de los poliedros inscritos a un cilindro ordinario no está acotado superiormente. En la sección siguiente aparece la idea presentada en la misiva.

### 3. El ejemplo de Schwarz

En esta sección,  $S$  es el cilindro de radio 1 y altura 1, esto es,

$$S := \{(\cos \theta, \text{sen } \theta, s) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge s \in [0, 1]\}.$$

Fijemos  $m, n \in \mathbb{N}$  con  $m \geq 3$ . A continuación describiremos un poliedro inscrito a  $S$ , digamos  $P(m, n)$ , y calcularemos su área.

Para cada  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  que satisfaga  $k \leq n$  sea

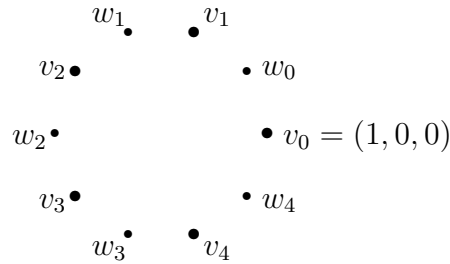
$$C_k := \{(\cos \theta, \text{sen } \theta, k/n) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

es decir,  $C_k$  es la circunferencia que resulta de intersecar a  $S$  con el plano cuya ecuación cartesiana es  $z = k/n$ . Así, nuestro plan para obtener los vértices del poliedro  $P(m, n)$  tiene dos partes: primero, inscribir un  $m$ -ágono regular en  $C_0$  y trasladar los vértices de este a todas las circunferencias  $C_k$  en las que  $k$  es par; segundo, rotar el  $m$ -ágono inscrito a  $C_0$  del primer paso un ángulo  $\pi/m$  y luego trasladar sus vértices a todas las circunferencias  $C_k$  para las que  $k$  es impar. Formalmente, queda como sigue.

Dado  $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  con  $\ell < m$  hagamos

$$\begin{aligned} v_\ell &:= (\cos(2\pi\ell/m), \text{sen}(2\pi\ell/m), 0) \quad \text{y} \\ w_\ell &:= (\cos((2\ell + 1)\pi/m), \text{sen}((2\ell + 1)\pi/m), 0). \end{aligned}$$

De esta manera (véase la figura 1),  $v_0, \dots, v_{m-1}$  son los vértices de un  $m$ -ágono regular inscrito a  $C_0$ , mientras que  $w_0, \dots, w_{m-1}$  son los vértices del  $m$ -ágono regular inscrito a  $C_0$  que resulta de rotar un ángulo  $\pi/m$  alrededor del eje  $Z$  el polígono que tiene por vértices a  $v_0, \dots, v_{m-1}$ .



**Figura 1.** Ejemplo de cómo se ven los puntos  $v_i$  y  $w_i$  para  $m = 5$ .

Con lo anterior en mente, dados  $k, \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  de forma que  $k \leq n$  y  $\ell < m$ , tomemos

$$v_k^\ell := \begin{cases} v_\ell + (0, 0, k/n), & \text{cuando } k \text{ es par} \\ w_\ell + (0, 0, k/n), & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Se sigue que tenemos los siguientes tipos de triángulos (véase la figura 2).

1. Cuando  $k$  es par y  $\ell > 0$ ,

(a) si  $k < n$ , podemos formar los triángulos

$$v_k^\ell, v_{k+1}^{\ell-1}, v_{k+1}^\ell \quad \text{y} \quad v_k^0, v_{k+1}^{m-1}, v_{k+1}^0;$$

(b) bajo la hipótesis  $k > 0$  tenemos los triángulos generados por

$$v_k^\ell, v_{k-1}^{\ell-1}, v_{k-1}^\ell \quad \text{y} \quad v_k^0, v_{k-1}^{m-1}, v_{k-1}^0.$$

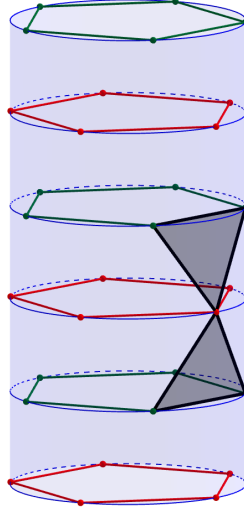
2. En el caso en que  $k$  es impar y  $\ell < m - 1$ ,

(a) obtenemos los triángulos

$$v_k^\ell, v_{k-1}^\ell, v_{k-1}^{\ell+1} \quad \text{y} \quad v_k^{m-1}, v_{k-1}^{m-1}, v_{k-1}^0;$$

(b) la condición  $k < n$  nos permite formar los triángulos

$$v_k^\ell, v_{k+1}^\ell, v_{k+1}^{\ell+1} \quad \text{y} \quad v_k^{m-1}, v_{k+1}^{m-1}, v_{k+1}^0.$$

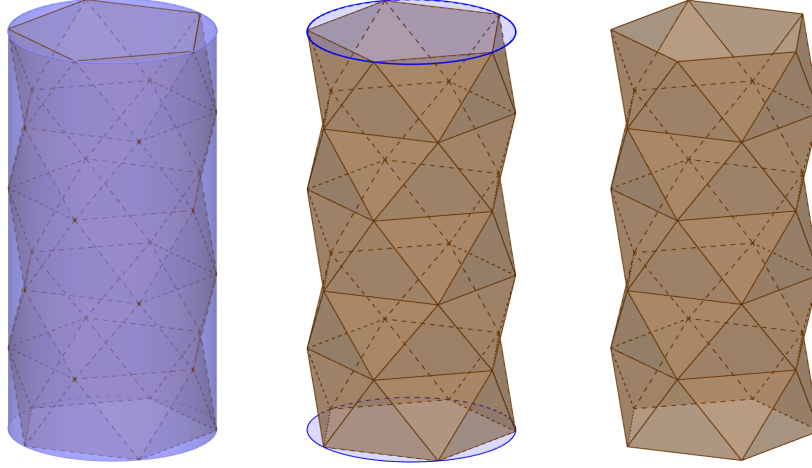


**Figura 2.** Para esta imagen hemos tomado  $n = m = 5$  y resaltado dos de los triángulos descritos en los incisos (1) y (2) (de hecho, ambos son del tipo mencionado en (1)).

En vista de todos estos antecedentes, tiene sentido definir  $P(m, n)$  como el poliedro que resulta de unir todos los triángulos descritos en el párrafo anterior (véase la figura 3). Note que hay  $2mn$  de estos triángulos, todos congruentes entre sí, y que  $P(m, n)$  está inscrito a  $S$ .

Nuestra intención es hallar el área de uno de los triángulos que forman a  $P(m, n)$ . Para esto será conveniente hacer  $\alpha := \pi/m$  y notar que la fórmula del coseno del ángulo doble (véase [1, p. 395]),  $\cos(2x) = 1 - 2\text{sen}^2 x$ , nos da

$$\cos \alpha = \cos(2(\alpha/2)) = 1 - 2\text{sen}^2(\alpha/2);$$



**Figura 3.** La imagen del extremo derecho es el poliedro  $P(5,5)$  (note su similitud con las linternas de papel japonesas). Además, en la imagen del lado izquierdo puede verse el cilindro  $S$  y dentro de este a  $P(5,5)$ .

con lo cual,  $1 - \cos \alpha = 2 \operatorname{sen}^2(\alpha/2)$  y, claramente,  $(1 - \cos \alpha)^2 = 4 \operatorname{sen}^4(\alpha/2)$ .

De acuerdo a lo explicado al final de la sección 8-5, p. 296, de [1], el área del triángulo  $v_0^0, v_1^{m-1}, v_1^0$  es la mitad de la norma del producto vectorial

$$u := (v_1^0 - v_0^0) \times (v_1^{m-1} - v_0^0).$$

Ahora, en virtud de las igualdades  $v_0^0 = (1, 0, 0)$ ,

$$v_1^0 = (\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha, 1/n) \text{ y } v_1^{m-1} = (\cos \alpha, -\operatorname{sen} \alpha, 1/n),$$

se sigue que  $u = ((2 \operatorname{sen} \alpha)/n, 0, 2 \operatorname{sen} \alpha(1 - \cos \alpha))$  y, consecuentemente,

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \left(\frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{n}\right)^2 + (2 \operatorname{sen} \alpha)^2(1 - \cos \alpha)^2 \\ &= \left(\frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{n}\right)^2 + (2 \operatorname{sen} \alpha)^2 \cdot 4 \operatorname{sen}^4(\alpha/2) \\ &= \left(\frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{n}\right)^2 (1 + 4n^2 \operatorname{sen}^4(\alpha/2)). \end{aligned}$$

El empleo de la relación  $m \geq 3$  nos garantiza que  $\operatorname{sen} \alpha > 0$  y así, el área del triángulo  $v_0^0, v_1^{m-1}, v_1^0$  es

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{n} \sqrt{1 + 4n^2 \operatorname{sen}^4(\alpha/2)} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/m)}{n} \sqrt{1 + 4n^2 \operatorname{sen}^4(\pi/(2m))}.$$

De los párrafos anteriores se colige que si  $A(m, n)$  es el área de  $P(m, n)$ , entonces

$$\begin{aligned} A(m, n) &= 2m \operatorname{sen}(\pi/m) \sqrt{1 + 4n^2 \operatorname{sen}^4(\pi/(2m))} \\ &= 2\pi \cdot \frac{\operatorname{sen}(\pi/m)}{\pi/m} \sqrt{1 + 4n^2 \operatorname{sen}^4(\pi/(2m))}. \end{aligned}$$

Finalmente, para mostrar que  $\{A(m, m^3) : m \in \mathbb{N} \wedge m \geq 3\}$  no está acotado superiormente, recordemos (véase [2, probl. 27(b), p. 453]) que  $\lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{sen}(t)/t = 1$  y usemos la identidad

$$4(m^3)^2 \operatorname{sen}^4(\pi/(2m)) = \frac{\pi^4 m^2}{4} \left( \frac{\operatorname{sen}(\pi/(2m))}{\pi/(2m)} \right)^4$$

para concluir que  $\lim_{m \rightarrow \infty} A(m, m^3) = \infty$ , tal y como se requería.

#### 4. De nuevo la intuición

Creo que para la mayoría de nosotros la sensación con la que nos quedamos después de haber seguido los razonamientos presentados es que nos falló la intuición. Sin embargo, como a menudo sucede en matemáticas, aún estamos interesados en intuir qué fue lo que sucedió, ¿por qué obtuvimos este resultado?

Una posible explicación es la diferencia de velocidades entre  $m$  y  $n$ . Me explico, el hacer  $n = m^3$  hace que  $n$  avance mucho más rápido que  $m$ , esto es, el número  $n$  de divisiones verticales que le hacemos a  $S$  es muy grande comparado con la cantidad  $m$  de vértices de nuestro poliedro y por este motivo la suma de las áreas de los triángulos que conforman a  $P(m, n)$  se hace arbitrariamente grande conforme  $m$  toma valores cada vez más elevados. Intentemos ilustrar esta idea con un ejemplo: cálculos similares a los presentados para hallar  $\lim_{m \rightarrow \infty} A(m, m^3)$  pueden usarse para confirmar que  $\lim_{m \rightarrow \infty} A(m, m) = 2\pi$ , esto es, cuando  $m$  y  $n$  van a la misma velocidad, las áreas de los poliedros  $P(m, n)$  convergen efectivamente al área del cilindro.

Una conclusión indiscutible es que dar una definición general y satisfactoria de área de una superficie es una cuestión harto difícil. A las personas interesadas en el tema les recomendamos revisar lo que Spivak tiene que decir en [3, pp. 118–120].

#### Bibliografía

- [1] E. F. Beckenbauch, F. J. Fleming y W. Wooton, *Geometría analítica moderna*, 2.<sup>a</sup> ed., Publicaciones Cultural S. A. de C. V., 1985.

- [2] M. Spivak, *Cálculo infinitesimal*, 2.<sup>a</sup> ed., Editorial Reverté, 1993.
- [3] ———, *Cálculo en variedades*, 1.<sup>a</sup> ed., Editorial Reverté, 1998.