

El billar a tres hojas

Carlos Bosch Giral

Departamento Académico de Matemáticas

ITAM

bosch@itam.mx

y

Pablo Castañeda

Departamento Académico de Matemáticas

ITAM

pablo.castaneda@itam.mx

1. Introducción

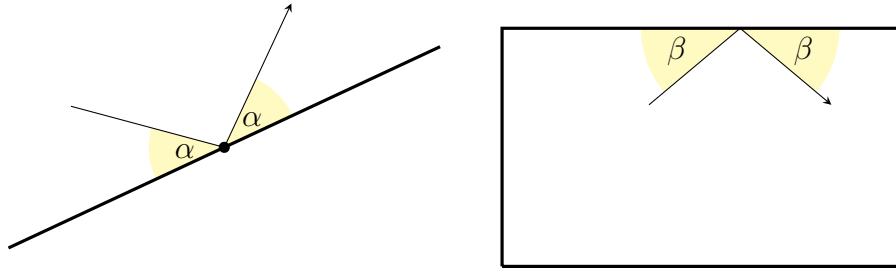
En tiempos del cardenal Richelieu (1585-1642) no se podía ser mosquetero sin saber matemáticas, historia, tácticas militares y... billar. Desde entonces la relación entre las matemáticas y el billar no deja de sorprendernos. Aquí veremos algunos nuevos enfoques sobre esta relación.

Partiremos de una definición sencilla para las trayectorias tipo billar y algunas propiedades clásicas en mesas rectangulares, para después hacer una representación de las trayectorias de billar como arcos de círculos con centro en un punto de una misma recta y así construir billares que no resultan ser rectangulares. Luego veremos algunas propiedades de máximos y mínimos que nos aportan los billares y finalmente usaremos billares a tres hojas para representar dicha situación. De esta manera los billares nos volverán a sorprender al relacionarse con áreas de las matemáticas muy diversas.

2. ¿Con qué billar vamos a jugar?

Es difícil de definir en pocas palabras el billar. Aquí nos vamos a centrar en lo esencial, en los rebotes de tipo billar. Para ello necesitamos una bola (esfera) y un lugar donde esta vaya a rebotar. Un rebote tipo billar es tal que el ángulo de la trayectoria de entrada es igual al de

salida. Como se puede ver en los siguientes dibujos con los ángulos α y β respectivamente.



Típicamente el billar se juega en una mesa construida por dos cuadrados que forman un rectángulo. Nosotros, en general vamos a usar mesas con ángulos rectos, en particular rectángulos que colocaremos con los lados paralelos a las rectas horizontal y vertical; las medidas de los lados podrán ser cualquier número natural. Además, iniciaremos con una bola en la esquina inferior izquierda y su trayecto iniciará con un ángulo de 45° respecto a los lados de la mesa. Una vez que la bola llegue a uno de los vértices del rectángulo la trayectoria se acaba. Es fácil ver que eso siempre sucede. A continuación, en la figura 1 se muestra una trayectoria en una mesa de 3 por 5. Comienza en el nodo marcado con 1 y termina en el marcado con 5.

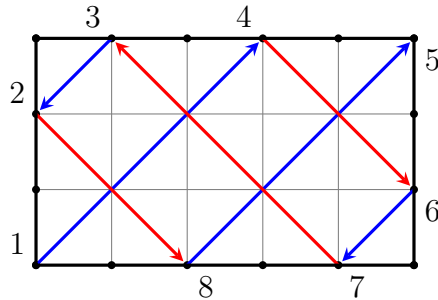
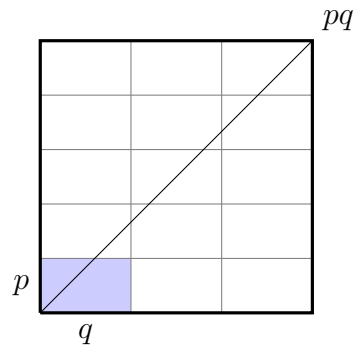


Figura 1. Billar cartesiano. Una mesa de billar de 3×5 comenzando en el origen (1) y terminando su trayectoria en la esquina superior derecha (5).

Una pregunta que surge en este momento es ¿será posible saber cuántos rebotes tiene la trayectoria de la bola antes de llegar a una esquina? En el caso de que los lados de la mesa sean números primos relativos (que se denota por $(p, q) = 1$ y que significa que no tienen divisores comunes distintos a uno), por ejemplo, p vertical y q horizontal, la respuesta es $p + q - 2$ y para ver esto basta reproducir verticalmente la mesa q veces como se



muestra en la figura y p veces horizontalmente para obtener un cuadrado.

Al obtener un cuadrado, la trayectoria de la bola acaba en la esquina superior derecha como se muestra en la figura y para llegar ahí debe de cruzar p lados horizontales y q lados verticales lo que hace que tengamos $p + q$ cruces (rebotes) pero hay que quitar los dos lados de la esquina donde llega, así tenemos $p + q - 2$ cruces o rebotes. Imagina qué sucede cuando los lados son múltiplos del mismo número.

En caso de que los números no sean primos relativos, por ejemplo, con lados a y b tales que su máximo común divisor sea m , la trayectoria va a pasar por el vértice del cuadrado más pequeño que se forme, ese es un cuadrado de lados a/m y b/m . Así que la trayectoria habrá rebotado $(a/m) + (b/m) - 2$ veces.

3. Observando rebotes

Primero vamos a numerar los puntos de rebote de la figura 1 empezando en el origen con 1 y continuamos en el sentido dextrógiro. Llegaremos hasta el punto 8. La trayectoria de tipo billar de la figura 1 se puede graficar de otra manera. En efecto, tomemos una recta y coloquemos los puntos del 1 al 8. Iniciaremos en el punto 1 (el origen) y trazamos medio círculo con diámetro del punto 1 al 4 y colocamos el arco en la parte superior del segmento pues es una trayectoria que va a 45° respecto al eje horizontal. Continuamos con otro semicírculo que va ahora del punto 4 al 6, pues es el siguiente tramo de la trayectoria. Esta vez el tramo lo trazamos como media circunferencia en la parte inferior al segmento pues va en la dirección 135° respecto al eje horizontal. Así continuamos con semicírculos, arriba si su dirección es de 45° respecto al eje horizontal y abajo en caso de estar a 135° respecto al eje horizontal. Obtenemos así una figura equivalente a la figura 1 en la figura 2.

Notemos que la trayectoria con semicírculos, como era de esperarse, termina en el punto 5. Además, podemos seguir la trayectoria o la órbita $\{1, 4, 6, 7, 3, 2, 8, 5\}$ con estos arcos. Esta representación nos permitirá ir más lejos que una mesa rectangular.

A la curva formada por los semicírculos la llamaremos un *meandro abierto simple*, es decir, es una curva diferenciable transversal al eje horizontal x en el plano euclidiano.

Tomando mesas de billar rectangulares y numerando de este modo, obtenemos siempre meandros con grupos de arcos formando tres arcoíris. Para la mesa p por q tenemos que el primer arcoíris tiene su arco exterior con la trayectoria de 1 a $p + 1$. El segundo arcoíris arriba irá desde $p + 2$ hasta $p + q$ (el punto final). Finalmente, el arcoíris abajo

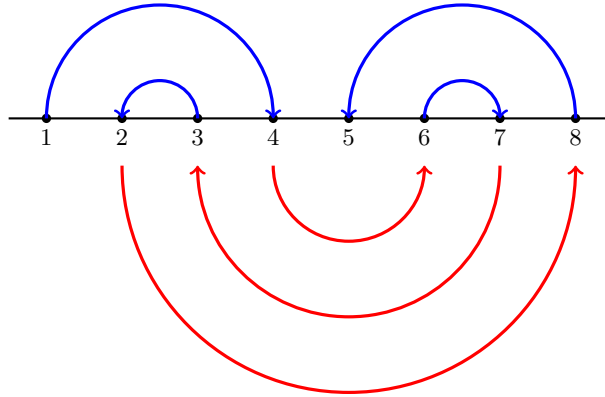


Figura 2. Meandro simple. Una representación de las trayectorias en el billar cartesiano de la figura 1. La órbita en este caso es $\{1, 4, 6, 7, 3, 2, 8, 5\}$.

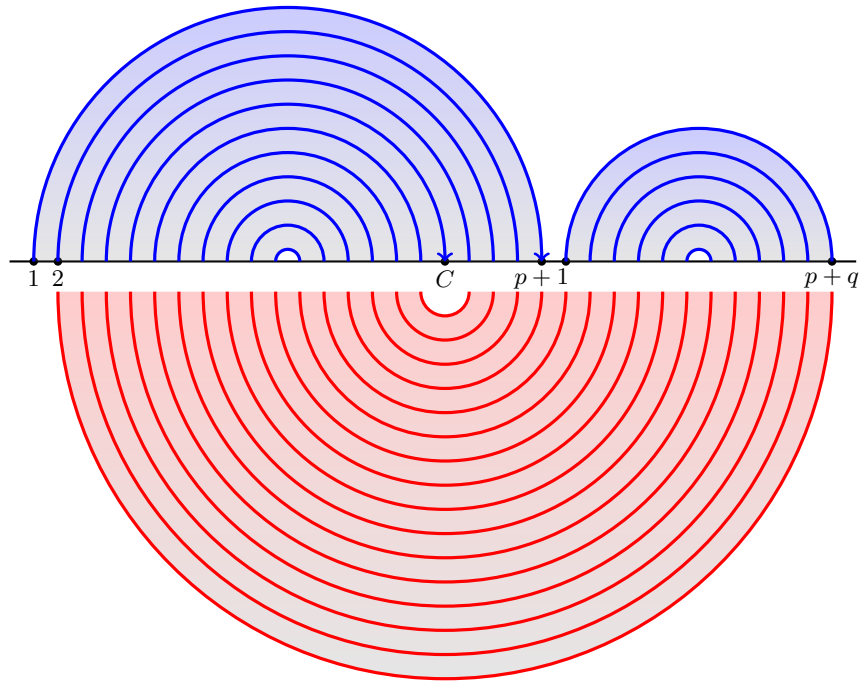


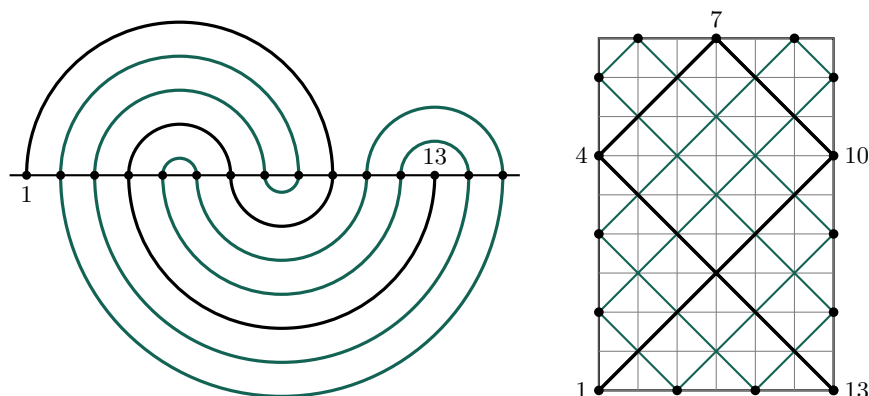
Figura 3. Un meandro abierto. Este caso proviene de $p = 19$ y $q = 13$. Notamos que termina en C ; equivalente a la esquina superior derecha en la Fig. 1 pues p y q son impares. Observamos que solo hemos colocado flechas en la trayectoria de 1 a $p+1$ y la que acaba en C pues típicamente los arcos pueden ser recorridos en una u otra dirección según sean los valores p y q .

tendrá todos sus arcos si $(p, q) = 1$, siendo que el mayor de ellos representa la trayectoria que une 2 con $p+q$. La parte de arriba se completa con todos los arcos interiores concéntricos. Observa la figura 3.

Lugares notables le corresponden a las esquinas. Para p y q impares, el punto final es la terminación de uno de los arcos superiores, justo en $C = (p+q+2)/2$ que es el centro de los arcos inferiores; figura 3.

En los rectángulos, la esquina superior izquierda es punto final cuando p es par (con q impar) y por lo tanto el punto medio entre 1 y $p + 1$ es $p/2 + 1$. Análogamente, la trayectoria termina en la esquina inferior derecha cuando q es par (con p impar). Por lo tanto, el centro del segundo arcoíris será el punto medio entre $p + 2$ y $p + q$ que resulta en $q/2 + p + 1$. Esto es sencillo cuando $(p, q) = 1$.

¿Qué sucede cuando p y q tienen un divisor en común? Aparecen nuevos comportamientos. Si el divisor es par, entonces las otras dos esquinas pueden ser parte de órbitas. En el caso que sea un múltiplo impar, aparecen (con la misma construcción) meandros cerrados. Por ejemplo consideremos la mesa 9 por 6. Sabemos que la trayectoria se comporta como la mesa 3 por 2, pero el diseño anterior para los arcoíris nos muestra mas curvas tanto arriba como abajo. La relación entre esas y estas otras con los rebotes es evidente en la figura siguiente.

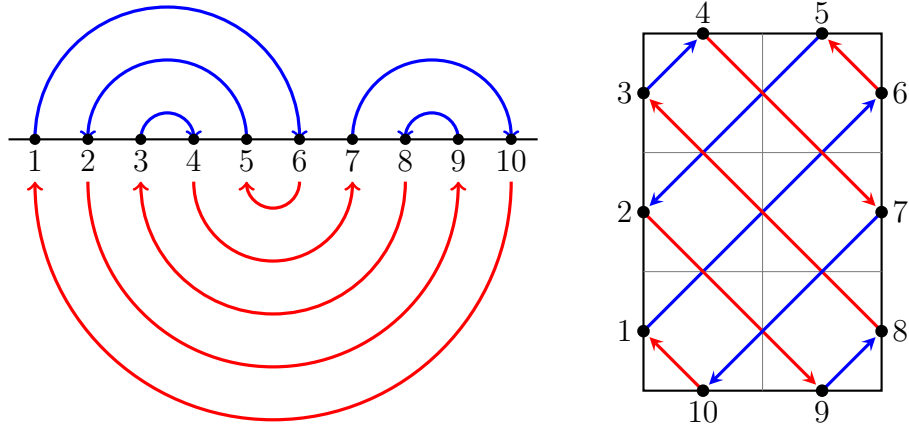


Tomando así, mesas de billar con lados enteros, puede darnos otros problemas interesantes, por ejemplo, si comenzamos en uno de sus lados y con un tiro a 45° , ¿la trayectoria volverá al mismo punto generando una repetición infinita de esa trayectoria? ¿Dónde debemos comenzar para que la bola no termine en una de las esquinas?

Del dibujo arriba, podemos inferir que la primera pregunta se resuelve iniciando con cualquier punto con coordenadas no enteras, en particular un punto medio entre dos de los enteros que hemos marcado en los bordes de la mesa. Además, de una banda a otra incrementará sus coordenadas en valores enteros y nunca llegará a alguna esquinas, pues estas siempre tienen coordenadas enteras.

Entonces, estudiemos las trayectorias como meandros cerrados y simples, es decir que son una curva de Jordan pues regresa al punto de partida cerrándose. Un meandro cerrado múltiple sería un número finito de meandros simples cerrados mutuamente disjuntos; los llamaremos simplemente meandros. Así, nuestra segunda pregunta se resume a saber si el meandro es simple o no.

El caso del meandro simple está representado en la figura siguiente. A su lado derecho vemos que, al numerar los puntos de rebote del billar, la órbita $\{1, 6, 5, 2, 9, 8, 3, 4, 7, 10\}$ volverá al 1. Además, ahora notamos que la coordenada del primer punto es $(0, 1/2)$ y del 7 tiene coordenadas $(2, 3/2)$, por ejemplo, imposibilitando así terminar en una esquina. También observamos la relación entre ambas representaciones.



Esta representación es especialmente útil para estudiar la combinatoria del plegamiento de estampados (ahora también se usa para proteínas), las relaciones con las álgebras de Temperley-Lieb, la física estadística y la teoría de singularidades entre otras. Véase, por ejemplo, [3, 4]. Por otro lado, los meandros abiertos simples también surgen en descripciones de atractores globales de ecuaciones de reacción-advección-difusión parabólicas de la forma $u_t = u_{xx} + f(x, u, u_x)$, digamos en el intervalo unitario $0 < x < 1$ con condiciones de contorno de Neumann $u_x = 0$ en $x = 0, 1$.

El trabajo innovador de Fusco y Rocha [8] introdujo una caracterización de permutación de meandros que surgen del enfoque de disparo al problema de equilibrio $0 = u_{xx} + f(x, u, u_x)$. En [5], Fiedler y Castañeda dieron el diccionario entre meandros y billares cartesianos que aquí te presentamos; hay otras relaciones con trenzas y nudos que pueden ser interesantes. Además, se pueden encontrar bellísimas imágenes al respecto en el libro de Anna Karnauhova [10] o leer sobre avances recientes en Fiedler y Rocha [6].

Sabemos que existe una regla de cómo a partir de un meandro cerrado construir un billar equivalente, *cf.* [5, 10]. (El recíproco está garantizado). Sin embargo, la regla puede ser complicada. Esto no involucra ningún problema si la parte inferior de los arcos está formada por un único arcoíris. Aquí vamos un paso adelante, siguiendo las ideas de [5]. Podemos hacer, de hecho, una asociación entre cualquier meandro y uno con el doble de puntos pero satisfaciendo esta condición, como se

muestra en el esquema de la figura 4. Notamos la importancia del nodo vacío entre 8 y 9; no hay ningún arco superior que pase por arriba de él.

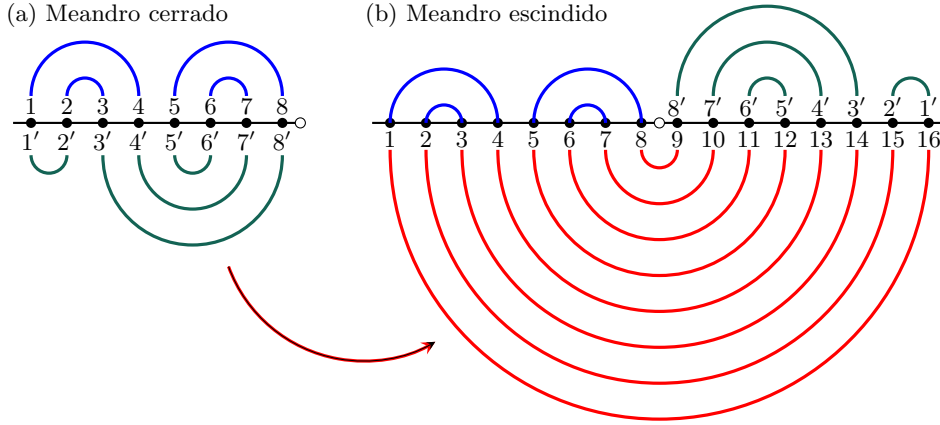


Figura 4. Transformación de meandros prototípicos en meandros con un único arcoíris abajo. Note la rotación al rededor del nodo vacío entre 8 y 8'. De ahí la identificación de los nuevos nodos $n \sim 17 - n'$ para $n = 1, 2, \dots, 8$.

Ahora es importante identificar el centro entre ambos grupos. (En la figura es $8+1/2$ marcado con un círculo con relleno blanco.) Escribamos con la notación análoga de paréntesis, «(» cuando comienza un arco y «)» cuando se cierra.¹ Colocaremos un «·» extra para denotar exactamente cuando estemos a la mitad; se ha cerrado siempre un paréntesis y otro abrirá. El meandro en la figura 4(b) es equivalente al símbolo:

$$(()) (()) \cdot ((())) ((),$$

pues solo la parte superior nos interesa. Observamos que tanto antes de «(» como después de él, los paréntesis son pares completos de aquellos que abren y cierran. (Esto es un *meandro escindido*.)

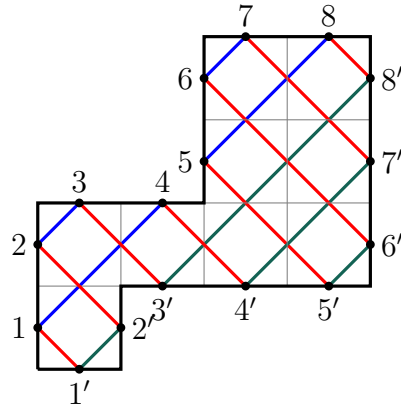
Con simples reglas, viajando en puntos de los *enteros gaussianos*, es decir \mathbb{Z}^2 , formaremos la frontera del billar. Avanzamos una posición en la dirección \uparrow cuando tenemos «(» y una hacia \rightarrow cuando tenemos «)» respectivamente antes del centro «·»; llegaremos a un entero gaussiano sobre la diagonal (x, x) para $x \in \mathbb{R}$. Después de este, avanzamos una posición hacia \downarrow para «(» y una hacia \leftarrow para «)», respectivamente. El trazo lo hacemos con distancias unitarias, de modo que volvemos al origen.

¹Esto relaciona los meandros con los números de Catalan, pues para N pares de paréntesis, el N -ésimo número de Catalan

$$C_N = \frac{1}{N+1} \binom{2N}{N}$$

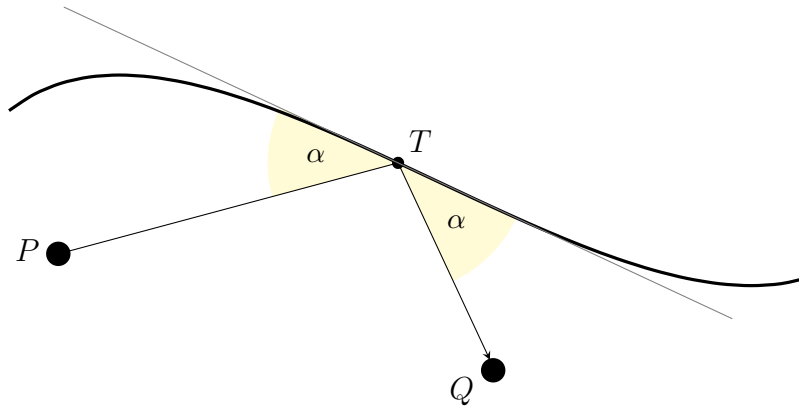
dice el número de combinaciones que existen. Luego el problema combinatorio se reduce a saber cuándo dos juegos de estos paréntesis forman una única curva cerrada como en la figura 4.

En este caso, el meandro derecho de la figura 4, se puede ver como el «billar» que obtenemos en la figura al lado. Es claro que no es una mesa rectangular pero muestra la relación entre ambos mundos, es decir, los multi-meandros y estos *billares cartesianos*. Este punto de encuentro es importante, porque este tipo de billares no los podemos estudiar con las reflexiones que hemos visto antes, [5].

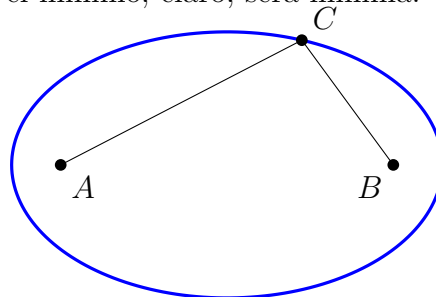


4. Un problema de máximos y mínimos

El problema que trataremos aquí es encontrar el camino más corto que va de un punto dado, toca una curva (suave) y llega a otro punto fijo. Es decir, buscamos un punto tal que la distancia de P a T más la de T a Q sea mínima.



La respuesta es que la trayectoria debe ser de tipo billar. Para ver esto supongamos que una trayectoria que no es de tipo billar no es ni máxima ni mínima, así podremos concluir que una de tipo billar nos va a dar el máximo o el mínimo; claro, será mínima.

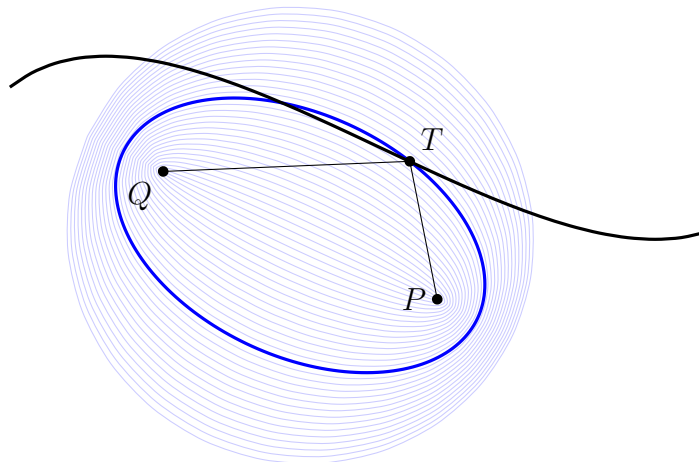


Usaremos aquí dos propiedades importantes de las elipses. Un punto C sobre una elipse de focos A y B se caracteriza por el hecho de que $AC + CB$ es constante y que la trayectoria de A a C y de C a B es de tipo billar.

Sea T un punto tal que $PT + TQ$ no es una trayectoria de longitud «máxima» ni mínima. Consideremos todas las elipses con focos P y Q así como una vecindad del punto T . Una de esas elipses pasa por el punto T . En una vecindad del punto T , la familia de elipses con esos focos corta a la curva (no hay una elipse tangente a la curva, en la vecindad, pues la trayectoria $PT + TQ$ no es de tipo billar respecto a la curva). Supongamos que $PT + TQ = 2a$, es la elipse que pasa por T .

Como las elipses cortan a la curva tomemos un punto X sobre la curva que determine una elipse que es interior a la que pasa por T , por lo tanto $PX + XQ < 2a$. Algo semejante sucede con un punto Y que corresponde a la intersección de una elipse exterior y la curva, pero esta vez $PY + YQ > 2a$.

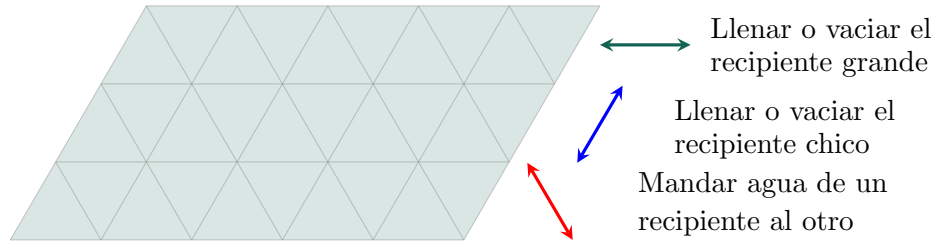
No se tiene ni un «máximo» ni un mínimo.



En conclusión, para tener una trayectoria que sea mínima se debe tener una trayectoria de tipo billar respecto a la curva.

Hagamos una aplicación de esta propiedad. Usando dos recipientes se quiere medir un litro tomando agua y pasando de un recipiente a otro. Ilustraremos como resolver el problema cuando los recipientes son de capacidad 5 y 3 litros.

Para esto usaremos un paralelogramo con un ángulo de 60° y supondremos que los lados del paralelogramo se prolongan de manera que al llegar a un vértice o lado el rebote será de tipo billar.



Cada dirección significa que haremos una operación diferente: coloquemos coordenadas en los *enteros de Eisenstein*² para el paralelogramo. Ahora nuestro problema se convierte en llegar a un punto que tenga alguna de sus coordenadas igual a uno. Iniciemos lanzando la bola por la recta horizontal lo que indica que el recipiente de 5L se llena y luego la bola rebota sobre la recta a 60° de manera que indica que debemos mandar líquido al recipiente de 3L, así la bola llega al punto de coordenadas $(2, 3)$ mostrando que el recipiente de 5L tiene solamente dos litros y el otro se encuentra lleno. Ahora, la bola vuelve a rebotar en la dirección que indica que hay que vaciar el recipiente chico, mira la figura 5(a), con lo cual llegamos al punto $(2, 0)$ donde vuelve a rebotar, y siguiendo con las indicaciones según el rebote de la bola, se va al punto $(0, 2)$, de ahí al $(5, 2)$, luego al $(4, 3)$, al $(4, 0)$ y finalmente al $(1, 3)$ de modo que ya tenemos un litro.

Vemos en la figura 5(b) qué pasa ahora si iniciamos hacia el punto $(0, 3)$. En el primer caso tenemos la trayectoria «máxima» y en el segundo la mínima. Observemos que en la primera trayectoria se desperdician 6 litros en la trayectoria mínima, en la segunda no se desperdicia agua.

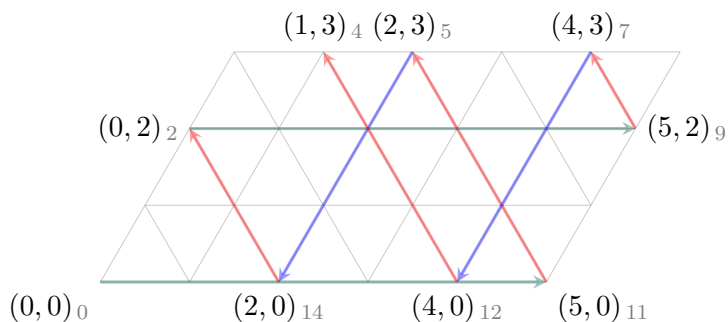
En su libro [9], Clara Grima propone en el capítulo «A propósito del arroz, el sake y un cubo de madera», una versión un poco distinta de esta. Hay un tercer recipiente de ocho litros, el agua solo puede cambiar entre estos tres, ¿cómo conseguir cuatro litros si el de ocho comienza lleno? Es un ejercicio interesante darse cuenta que las trayectorias del tipo billar no se modifican.

5. Manejando rebotes en tres direcciones

Vamos a centrarnos en la idea de los rebotes estudiada en la sección 3, con meandros cerrados, para el problema de los recipientes. Notamos que ahora tenemos tres direcciones al llenar o vaciar sendos recipientes o pasar de uno a otro. Los meandros de la figura 3 no encajan más, pues solo tenemos dos direcciones y necesitamos tres. En la figura 5 usamos

²Estos son un anillo conmutativo de enteros algebraicos en el campo $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Pueden ser descritos como $z = a + b\omega$ para $\omega = e^{2\pi i/3}$ y $a, b \in \mathbb{Z}$, nosotros tomamos las coordenadas (a, b) .

(a) Comenzando con el recipiente grande



(b) Comenzando con el recipiente chico

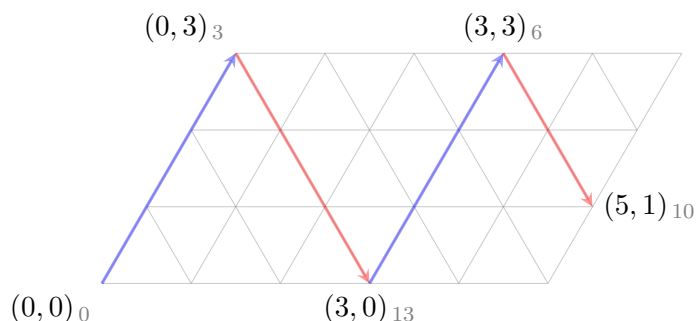


Figura 5. Las coordenadas en negro representan la cantidad de litros en el recipiente grande y chico respectivamente. El subíndice en gris indica el número del nodo comenzando en el $(0, 0)$ y en sentido dextrógiro como antes.

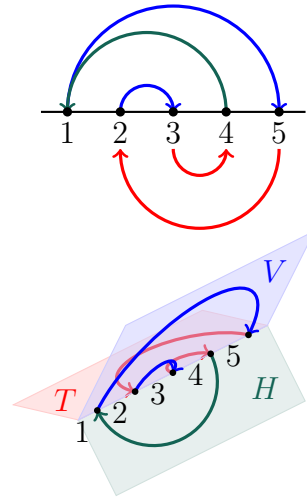
tres colores uno para cada dirección, para los ángulos de 0° , 60° y 120° . Ahora necesitaremos un nuevo y bello objeto matemático.

Definimos un **libro de k -hojas** como el espacio topológico \mathcal{B}_k compuesto por una línea, llamada **lomo** junto con k semiplanos (las **hojas**), en posición tal que el límite de cada página está en el lomo.

Un problema muy importante es el encaje de gráficas en \mathcal{B}_k lo cual se puede consultar en [1]. Nosotros hasta ahora hemos trabajado en \mathcal{B}_2 y en lo que sigue usaremos solo \mathcal{B}_3 para poder trabajar con tres direcciones.

Observemos las gráficas de la derecha: se muestra una trayectoria en nodos genéricos con la órbita (meandro cerrado) $\{1, 5, 2, 3, 4\}$ que vuelve al 1. Al estilo de los meandros tenemos (arriba) el «encaje» de esta trayectoria en el plano marcando cada dirección con un color y (abajo) las mismas trayectorias en tres hojas.

En el caso de arriba, vemos que justo en el punto 1, la curva formada por los arcos no es un meandro en \mathcal{B}_2 , pues deja de ser una curva suave que toca transversalmente el (ahora) lomo. La representación de abajo



muestra un meandro encajado en un libro de 3-hojas; en este caso H (horizontal), T (transversal) y V (vertical).

¿Pero cómo entendemos la suavidad? Dejaremos que la transversalidad a través del lomo sea la suavidad entre hojas. Es decir, veremos las hojas por pares. De este modo, en el esquema de este caso, cuando la trayectoria pasa de la hoja H a la V en el punto 1, de la V a la T en 3 o 5, de la T a la V en 2 o de la T a la H en 4, consideraremos que es una trayectoria suave. Además, es justo por esto que consideramos a la trayectoria entera como un meandro cerrado en \mathcal{B}_3 .

Con esto en mente, ilustraremos con los recipientes de 3L y 5L. Así si iniciamos con la trayectoria que nos indica la figura 5(b) y completamos hasta regresar al punto de partida, colocándolo en un libro de 3-hojas, obtenemos el meandro cerrado de la figura 6. ¡Esto es genial! pues ahora tenemos un nuevo diccionario para responder a la pregunta de cuándo dos recipientes cualesquiera nos permiten encontrar una combinación en la que podamos extraer un litro de agua.

Nuestra misión es entender cómo funciona el juego con los recipientes de agua digamos con n y m litros. En la figura 7 hemos esquematizado esto. Notamos de inmediato que una vez tomada la iniciativa de llenar el balde con n litros, entonces el recorrido está determinado. Primero la trayectoria nos lleva por flechas inclinadas que suben a 60° por la hoja V y bajan a 300° por la hoja T , llenado el primer recipiente y pasando al otro, repetimos hasta que hallamos llenado el segundo recipiente. Ahora, se vacía el segundo llevándonos por una flecha horizontal a la frontera a la izquierda. Vaciamos, una vez más lo que sobró del primer recipiente en el segundo y repetimos la operación. Lo importante en este algoritmo, además de recordar la división euclidea de números naturales, es que nos da las direcciones de los rebotes. Por tanto, podemos ver algunos puntos importantes en los rebotes y ver en la figura 7

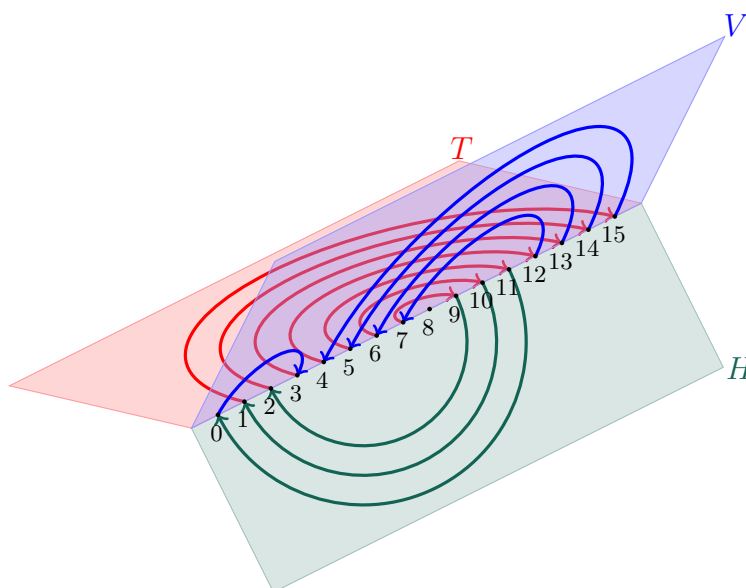


Figura 6. La representación esquemática en un libro de 3-hojas para el problema en la figura 5. Las flechas se encuentran en la dirección de la figura 5(b), comenzando con el llenado del recipiente chico desde $(0, 0)_0$ hasta $(0, 3)_3$ con un arco vertical en la hoja V . Podemos seguir así toda la trayectoria. De hecho, si volteamos las flechas, entonces se obtiene el camino de la figura 5(a); una dualidad muy bonita que solo se ve con la órbita cerrada completa.

que la órbita con algún recipiente con un litro es:

$$\mathcal{O}(1) = \{ \dots, 2n + m - 1, 1, 2n + 2m - 1, n + 1, \dots \},$$

pues el nodo $2n + m - 1$ representa la coordenada $(m, 1)$, el 1 es $(0, 1)$, del mismo modo que $2n + 2m - 1$ representa $(1, 0)$ y $n + 1$ es $(1, n)$; las cuatro posibilidades con 1L.

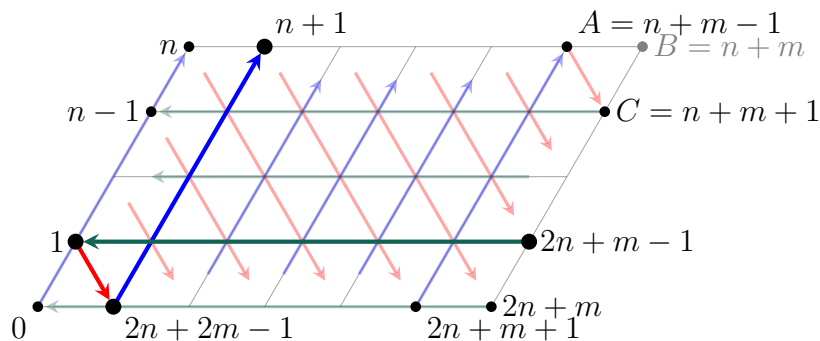


Figura 7. El problema de los recipientes con un recipiente de nL que se comienza llenando y del cual se pasa al de mL .

Además se puede rastrear las órbitas según el tipo de arco, es decir, la dirección que necesitamos, pues para un nodo k tenemos los mapeos:

«Vertical»:

$$k \mapsto \begin{cases} n, & \text{si } k = 0, \\ 3n + 2m - k, & \text{si } k \in \{2n + m + 1, \dots, 2n + 2m - 1\}, \end{cases}$$

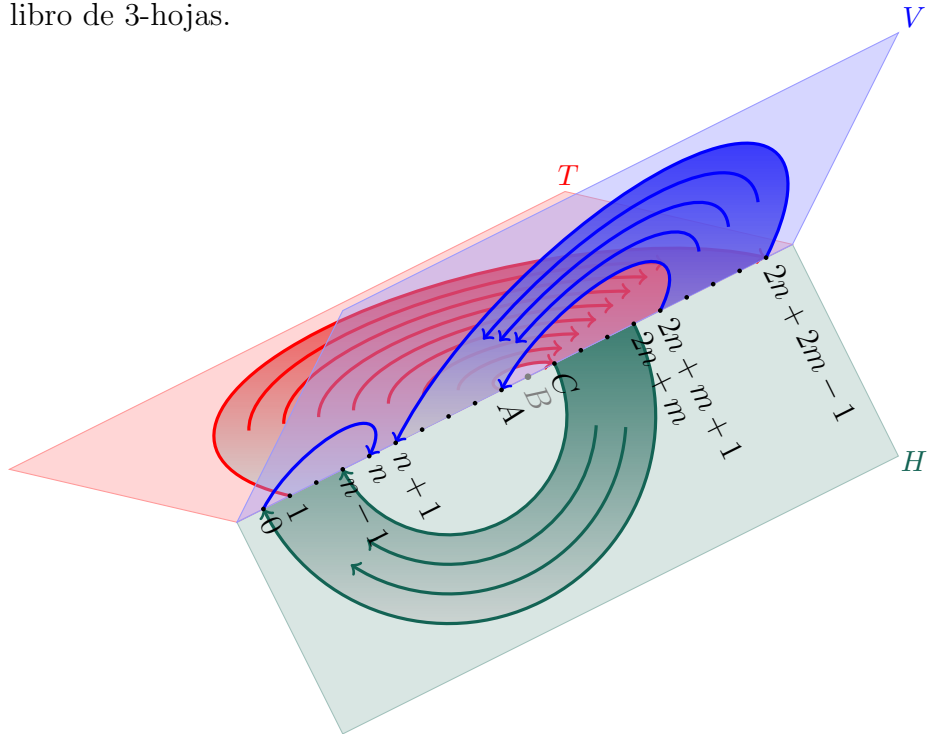
«Transversal»:

$$k \mapsto 2n + 2m - k, \quad \text{si } k \in \{1, \dots, n + m - 1\},$$

«Horizontal»:

$$k \mapsto 2n + m - k, \quad \text{si } k \in \{n + m + 1, \dots, 2n + m\}.$$

Observa que no hay regla para el valor $B = n + m$, pues en la figura 7 vemos que este nodo no interactúa. Tenemos el siguiente desarrollo en el libro de 3-hojas.



El problema de si es posible encontrar un litro a partir de recipientes genéricos se vuelve a resolver con la cuestión de si n y m son primos relativos entre sí, es decir, si $(n, m) = 1$ se satisface. Ahora nos preguntamos si podemos construir dado cualquier meandro en 3-hojas, un «billar» siguiendo el paralelogramo de 60° . Tendremos algunas restricciones.

Así como con el meandro en \mathcal{B}_2 necesitamos hacer el arcoíris único en la parte de abajo (figura 3) y escindir los paréntesis en la parte de arriba, aquí necesitaremos que los arcos en la hoja T también sean completos. Pero además necesitaremos que todo arco horizontal o vertical, en las hojas H o V , vayan de la primera mitad a la segunda, es decir, se

encuentren ambos extremos con el punto B entre ellos. Esta restricción ayuda a generar dos fronteras formadas por segmentos crecientes desde el origen $(0, 0)$ hasta la localización de B , en el entero de Eisenstein (b, b) con $b = (N + 1)/2$ si el total de nodos es N .

Veamos un ejemplo, colocando solamente las trayectorias *H*orizontales y *V*erticales. Conservamos solamente dos hojas, la tercera hoja (implícita) contiene todas las trayectorias *T*ransversales; estas van desde $17 - n$ hasta n para $n = 1, 2, \dots, 8$.

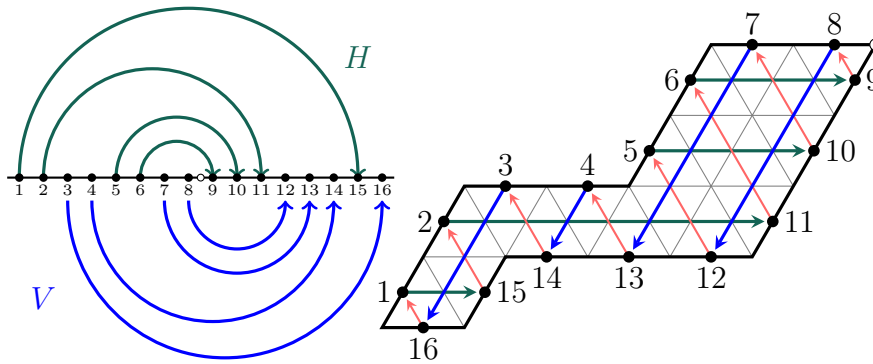


Figura 8. Del lado izquierdo tenemos un meandro en 3-hojas al olvidar la hoja de los viajes transversales, pues todos existen ($16 \rightarrow 1, 15 \rightarrow 2, \dots, 9 \rightarrow 8$). Al lado derecho el billar oblicuo que lo representa.

Observamos que como en los meandros cerrados de la sección 3, hemos comenzado fuera de la esquina; con el elemento 1 en la coordenada $(0, 1/2)$. Esto resuelve problemas de rebotes que tendríamos al llegar a alguna esquina. Con este desplazamiento podemos ir a los puntos medios de los lados y crear así *billares oblicuos*. Observemos las dos representaciones en la figura 8.

Tomando los símbolos de los paréntesis, tenemos:

Horizontal: $((0 0 ((0 0 \cdot))) 0 0 0) 0$
Transversal: $((((((((\cdot))))))))$
Vertical: $0 0 ((0 0 ((\cdot 0 0 0))) 0)$

donde ahora colocamos «0» cuando la curva no toca esa hoja y otra vez «·» representa el punto medio. Las bandas de la parte superior del billar oblicuo (del origen al nodo medio, *i.e.*, del nodo 1 al 8) viene de la primera mitad de los signos de viajes en la horizontal y las bandas de la parte inferior (*i.e.*, del nodo 9 al 16) de la segunda mitad de los viajes en la vertical.

Similarmente al billar cartesiano, para la primera mitad, construimos el lado avanzando una unidad en los enteros de Eisenstein en la dirección ↗ (equivalente a sumar ω) cuando tenemos «(» y una hacia → (sumamos 1) cuando tenemos «0» respectivamente antes del centro

«·». Después de este, avanzamos una posición hacia \swarrow para «0» y una hacia \leftarrow para «)», respectivamente en los elementos de la vertical. El trazo lo hacemos con distancias unitarias.

Si observamos los símbolos de los paréntesis por columnas, notamos que siempre hay un cero y dos paréntesis. Estas combinaciones implican cómo formar un billar oblicuo cuando los arcos no necesariamente incluyen el centro. Sin embargo, la notación cambia para antes y después del centro, hay triadas distintas que representan el mismo movimiento y algunas que no tienen significado. Por si fuera poco, esto deja de lado, órbitas (meandros cerrados) como la del inicio de esta sección, a saber, $\{1, 5, 2, 3, 4\}$. Podríamos decir que al ser un número impar de nodos, la situación se complica. Esta no es la razón, pues $\{1, 5, 2, 3, 4, 6\}$ con un número par de nodos, tampoco tiene ningún billar asociado. Esta conclusión es triste.

La solución a esto, es construir una transformación análoga a la que vimos en la figura 4 para meandros en 3-hojas. Recuerda que lo único que necesitamos es completar los arcos transversales y los otros tienen que comenzar y terminar en lados opuestos del centro. Habrá que encontrar un algoritmo que nos ayude en esta dirección.

6. Algunas palabras finales

Es muy bueno siempre tener un diccionario entre dos ramas de las matemáticas. Pues, a veces es más fácil decir una idea en uno u otro idioma; esta no es la excepción. El ejemplo más claro de esto es la geometría cartesiana donde se usa el álgebra para explicar ciertas propiedades geométricas y vice versa. Así los billares cartesianos y los multi-meandros han resultado en relaciones interesantes en el pasado. Ahora tenemos los meandros en 3-hojas y los billares oblicuos.

Un ejemplo importante en el área de la combinatoria es la clasificación de permutaciones utilizando pilas, [2, 13]. El problema aparece en el trabajo pionero de Donald E. Knuth [11], el cual muestra que en un sistema que se maneja un flujo de información, se pueden ordenar los datos al meterlos ordenadamente en pilas de las que se sacan posteriormente. El número de pilas es el mismo que el número de hojas, por tanto, olvidando la mitad de los trayectos (los que regresan en el meandro, por ejemplo) tenemos las permutaciones que necesitan tres pilas. En este sentido hay algunas ideas en camino. Pero debemos tener cuidado para no entrar al dominio de los cruces, véase por ejemplo [7] y sus referencias.

Además, hay otras relaciones en las que se puede profundizar, como la ya existente entre trenzas, el álgebra de Temperley-Lieb y los números

de Catalan, por ejemplo [5]. Sería interesante entender también cómo los malabares y el teorema de Shannon [12] entran en juego al relacionar objetos a lanzar con hojas.

Agradecimientos

Queremos agradecer a Rubén Martínez Avendaño por dirigir exitosamente la edición de este número tan especial celebrando el 50 aniversario de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas en el ITAM. Asimismo agradecemos las revisiones detalladas que colegas anónimos han realizado y que han mejorado sustancialmente este trabajo. Este trabajo ha sido apoyado por la Asociación Mexicana de Cultura A.C.

Bibliografía

- [1] J. Balogh y G. Salazar, «Book embeddings of regular graphs», *SIAM J. Discrete Math.*, vol. 29, 2015, 811–822.
- [2] F. R. K. Chung, F. T. Leighton y A. L. Rosenber, «Embedding graphs in books: a layout problem with applications to VLSI design», *SIAM J. Alg. Disc. Meth.*, vol. 8, 1987, 33–58.
- [3] P. Di Francesco, O. Golinelli y E. Guitter, «Meanders and the Temperley-Lieb algebra», *Commun. Math. Phys.*, vol. 186, 1997, 1–59.
- [4] P. Di Francesco y E. Guitter, «Geometrically constrained statistical systems on regular and random lattices: From folding to meanders», *Physics Reports*, vol. 415, 2005, 1–88.
- [5] B. Fiedler y P. Castañeda, «Rainbow meanders and Cartesian billiards», *São Paulo J. Math. Sci.*, vol. 6, 2012, 247–275.
- [6] B. Fiedler y C. Rocha, «Design of Sturm global attractors 1: Meanders with three noses, and reversibility», *Chaos*, vol. 33, 2023, 083127.
- [7] A. P. Figueroa y J. Fresán-Figueroa, «The biplanar tree graph», *Bol. Soc. Mat. Mex.*, vol. 26, 2020, 795–806.
- [8] G. Fusco y C. Rocha, «A permutation related to the dynamics of ascalar parabolic PDE», *J. Differential Eqs.*, vol. 91, 1991, 75–94.
- [9] C. Grima, *¡Que las matemáticas te acompañen!*, 5.^a ed., Ariel, 2020.
- [10] A. Karnauhova, *Meanders: Sturm global attractors, seaweed lie algebras and classical yang-baxter equation*, Walter de Gruyte, 2017.
- [11] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming: Fundamental Algorithms*, 3.^a ed., Addison Wesley, 1997.
- [12] C. E. Shannon, «Scientific aspects of juggling», *Claude Elwood Shannon: Collected Papers*, vol. IEEE Press, 1993, 850–864.
- [13] E. Stöhr, «A trade-off between page number and page width of book embeddings of graphs», *Inf. Comput.*, vol. 79, 1988, 155–162.