



## Euler: navegante de mares y planetas

Arturo Olvera

IIMAS

Universidad Nacional Autónoma de México

aoc@mym.iimas.unam.mx

*En recuerdo de Darío Moreno y Juan Manuel Lozano.*

### Una breve biografía de Euler

El 15 de abril del 2007 celebramos el tricentenatio del nacimiento de Leonhard Euler, el cual nació en la ciudad suiza de Basilea situada en la frontera entre Francia y Alemania. Su padre era un pastor protestante y encaminó la enseñanza de Leonhard hacia la religión, esperando que dedicara su vida como pastor. Acabó la escuela de gramática de latín y muy pronto pudo ingresar a la Universidad de Basilea. El ambiente universitario lo movió a acercarse a la ciencia y en particular a Johann Bernoulli, quien reconoció grandes capacidades en el joven Euler. La relación entre Euler y Johann Bernoulli fue muy intensa, volviéndose

Johann el tutor de Leonhard. Todos los sábados por la tarde los dedicaban a charlar sobre distintos temas de Física y Matemática; en estas tertulias científicas también participaban los hijos de Johann. Podemos decir que los Bernoulli adoptaron al joven Euler como parte de esta ilustre familia. Fue Johann Bernoulli quien convenció al padre de Euler de que Leonhard debía seguir una formación científica y no religiosa.



Johann Bernoulli

En aquellos días en que el joven Euler era instruido por los Bernoulli, Johann le propuso a Euler la siguiente tarea: encontrar la trayectoria más corta entre dos puntos sobre una superficie. Esta tarea fue resuelta de manera brillante por el joven Leonhard, el método de solución del problema fue la base de lo que ahora conocemos como el Cálculo de Variaciones. No cabe duda que todos los Bernoulli reconocían un gran potencial científico en Euler. A principios del siglo XVIII, Pedro I de Rusia tenía el propósito de hacer crecer en tamaño y esplendor la ciudad de San Petersburgo situada en el Báltico. Uno de sus grandes proyectos fue la creación de la Academia de Ciencias de esta ciudad y para ello invitó a pertenecer a dicha institución a las cabezas más brillantes del mundo europeo. Daniel Bernoulli fue uno de los elegidos y se desplazó a esta espléndida ciudad, fundada por Pedro el Grande, en 1725. El gran potencial científico que ofrecía la nueva ciudad motivó a Daniel Bernoulli a promover la candidatura de Euler como miembro de la Academia de San Petersburgo, la cual se concretó en 1727. Juntos de nuevo, Daniel y Leonhard, continuaron su colaboración en muchos proyectos relacionados con la mecánica de los medios continuos. A partir del año de 1731, Euler fue profesor de Física Teórica y Experimental de la Academia, donde encontró un ambiente muy propicio para desarrollar todo su potencial matemático y mecánico. La

sociedad petropolitana acogió muy cálidamente al joven Leonhard, el cual tomó por esposa a una joven rusa llamada Katherine Gsell. Los Euler tuvieron 15 hijos, de los cuales sólo sobrevivieron 5.



Daniel Bernoulli

Euler trabajó en el Departamento de Geografía de la Academia y también fue catedrático de la Facultad de Altas Matemáticas hasta la muerte de la emperatriz Anna Ivannovna; este acontecimiento desencadenó la persecución de los miembros de la Academia en 1740. En ese momento Euler aprovechó una invitación de Federico II de Prusia a trasladarse a Berlín y trabajar en la Academia berlinesa. Durante 20 años Euler trabajó en el Departamento de Matemáticas de la Academia pero no rompió su relación con San Petersburgo. Un conjunto de problemas relacionados con el financiamiento que Federico II daba a la Academia, motivó a Euler y su familia a tomar la decisión de regresar a su segunda patria. La familia Euler se desplazó a San Petersburgo en 1766. Leonhard fue muy bien recibido por la Academia y la sociedad rusa, que estaba gobernada por Catalina la Grande, continuando de esta manera sus estudios científicos. Desde su regreso a Rusia, Euler tuvo muchas limitaciones con su capacidad visual, perdió la vista muy pronto de su llegada. Esto no detuvo su desempeño científico, se valió de una memoria prodigiosa para poder hacer cálculos matemáticos muy complicados en la mente. Los resultados los dictaba a sus colaboradores prácticamente sin error alguno. En esta época, dos de sus hijos trabajaron muy estrechamente con él. El 18 de septiembre de 1783, después de explicar a su nieto sobre el descubrimiento de Urano, Leonhard Euler murió. Sus restos fueron enterrados en San Petersburgo, en su lápida de granito se lee *Leonhardo Eulero Academia Petropolitana*.

## Euler, la navegación y la industria naval

El trabajo científico de Euler estuvo fuertemente relacionado con problema de navegación y de la industria naval. La marina de guerra y mercante fueron las grandes promotoras de los desarrollos científicos y técnicos en el siglo XVIII. Podemos comparar el papel que jugaron estas industrias con el desarrollo de la ciencia y técnica debida a las Agencias Espaciales en el siglo pasado y el actual. Los científicos obtenían financiamiento de los Almirantazgos de las Marinas de los distintos países que, en el siglo XVIII, competían por el dominio de los mares. Euler escribió su primer trabajo científico, relativo al posicionamiento óptimo de los mástiles en un barco, sin haber visto antes el mar ni ningún buque de guerra o mercante. Es posible que su contacto con la marina, al realizar su servicio militar como oficial médico, haya sido el detonador que lo impulsó a trabajar arduamente en muchos de los aspectos tecnológicos relativos a la estabilidad, maniobrabilidad y propulsión de los barcos. La navegación de estos buques también constituyó un reto para Euler, llevándolo a involucrarse en los desarrollos de la cartografía y posicionamiento de las flotas en los océanos.

El interés sobre la Marina fue una constante en la vida de Euler, sus publicaciones en estos temas van del 1727 hasta el 1780, un par de años antes de su muerte. Su tutor, Johann Bernoulli lo animó a participar en un concurso convocado por la Academia Real de Ciencias de París sobre el tamaño y posición óptima de los mástiles en los buques. Su trabajo quedó en segundo lugar, siendo el ganador Pierre Bourguer, quien era considerado como el padre de la arquitectura naval. Se dice que dicho premio no fue concedido a Euler debido a su juventud y para no demeritar el prestigio que Bourguer ostentaba en aquella época. A partir de entonces, los trabajos de Euler y Bourguer siguieron caminos muy paralelos, pero fue Euler quien pudo trascender más allá de las técnicas marítimas hacia el desarrollo de las grandes teorías en la Mecánica.

La necesidad de entender qué fuerzas actuaban sobre un buque de vela, llevó a Leonhard Euler a involucrarse en la construcción de la teoría de fluidos. En 1752 publicó los trabajos donde establecía la Ecuación de Euler de la Mecánica de Fluidos. Un año después, establece un conjunto de críticas a la Teoría de Impacto formulada por Newton y en 1755 pone los fundamentos de lo que conocemos ahora como Teoría Potencial del Flujo.

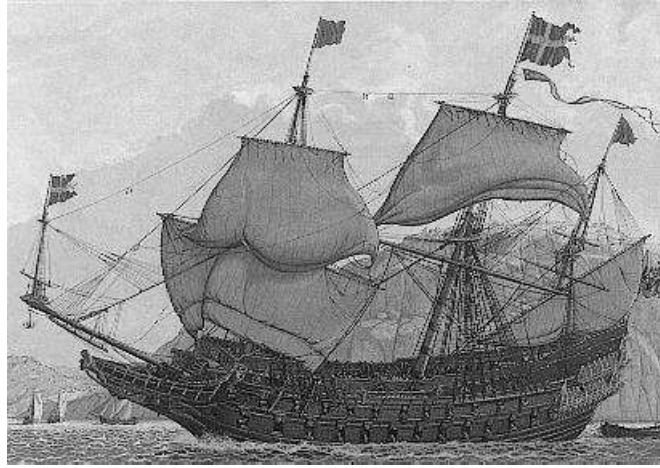
En las siguientes secciones comentaremos brevemente los trabajos hechos por Euler sobre arquitectura naval y cómo estos estudios tras-

cendieron en la formulación de la Mecánica Clásica, Mecánica de Medios Continuos y Mecánica Celeste.

## Hidrostática y Estabilidad

La flotabilidad y estabilidad del casco de un barco había sido estudiada desde los tiempos de Arquímedes. La acción de las fuerzas boyantes en la geometría del buque fue desarrollándose a través de los siglos. El advenimiento de la navegación intercontinental fomentó el interés de los constructores de barco por tomar consideraciones más científicas en sus diseños. La pompa y el orgullo, impulsados por los reyes que querían tener barcos que impresionaran a sus súbditos y enemigos, llevó a grandes desastres. El rey Gustavo II de Suecia ordenó construir el buque insignia de la Marina Real y sus ingenieros navales trataron de construir un barco que tuviera el mayor número posible de cañones y donde los camarotes reales estuvieran colocados a la mayor altura posible de la popa. El barco fue bautizado como *Wasa* y su velamen era impresionante, desde lejos podía observarse el brillo de los metales que adornaban los palos y cubierta del buque. En 1628, frente a toda la corte del rey Gustavo II, se hizo la botadura del *Wasa*, el cual comenzó a navegar majestuoso en las rías de Estocolmo hasta que un ligero viento, que impulsó de forma lateral al barco, lo hizo volcar y hundirse en unos cuantos minutos, y todo esto sucedió frente al mismo rey de Suecia. No vale la pena decir cuántas cabezas rodaron por el incidente, pero algo quedó claro: la construcción de barcos no puede guiarse por la estética y belleza de sus formas, son la ciencia y la técnica quienes deben mostrar el camino para construir buques más rápidos, estables y con mayor capacidad de carga.

Pascal y Hurgones mostraron interés en los aspectos del diseño naval y para principios del 1700 ya había surgido un número considerable de ingenieros navales que habían publicado tratados de construcción de barcos, tales como Hoste, La Croix y Bourguer. Euler no fue ajeno a este interés y publicó, en 1746, un trabajo titulado *Traité du Navire* y en 1749 *Scienctia Navalis*. Estos trabajos versaban sobre la teoría general de posición y movimiento de los cuerpos flotantes y las reglas de maniobrabilidad y construcción de buques. En dichos trabajos Euler estudió el problema de cómo actúan las fuerzas boyantes en el casco del buque; la presión es una fuerza que actúa en la dirección normal al plano tangente de la superficie del casco en todo punto, la fuerza boyante



Wasa, el buque de su majestad

total es la suma de todas estas fuerzas, lo cual expresó Euler como  $\int p dS$ , siendo  $p$  la presión y  $dS$  el elemento de superficie en el casco. El equilibrio del casco se da al establecer la posición donde se aplica la fuerza boyante respecto al centroide del casco. Debemos notar cómo Euler consideró las fuerzas como un continuo, que debe sumarse vía una integración. Cuando el centroide del barco está por debajo del punto de aplicación de la fuerza boyante entonces el cuerpo del barco está en equilibrio. Euler estudió el efecto de las fuerzas de restitución cuando el barco se desplaza de su punto de equilibrio, lo cual se expresaba como un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, obteniendo una expresión para el momento de restitución del casco,  $M_R$ :

$$M_R = \Delta(GB + I_T/V) ,$$

siendo  $\Delta$  el desplazamiento del equilibrio de flotación,  $V$  el volumen del casco que se encuentra por debajo de la línea de flotación,  $GB$  la distancia del centroide del casco al punto donde se aplica la fuerza boyante e  $I_T$  el momento de inercia del casco que es normal a la superficie transversal del casco. Esta fórmula, que aún se utiliza por los ingenieros navales, fue también encontrada por Bourguer.

El trabajo de flotabilidad de los barcos fue la punta de lanza que condujo a Euler a desarrollar la Teoría de Cuerpo Rígido de la Mecánica Clásica. Es interesante reflexionar sobre cuáles fenómenos físicos podrían haber llevado a Euler en el camino del estudio del Cuerpo Rígido. El movimiento del casco de un barco era donde se podían observar los tres grados de libertad rotacionales al flotar libremente en el

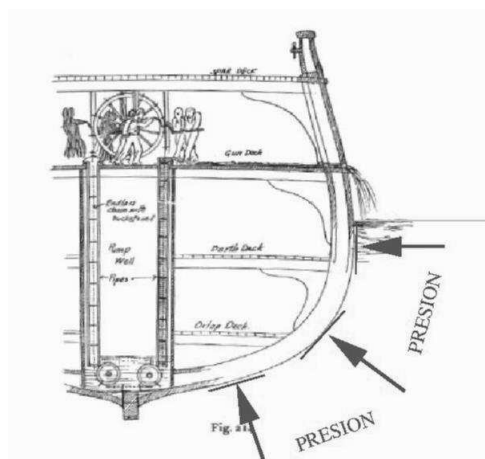


Pierre Bourguer

mar. Euler reconoció que era posible entender dichos movimientos rotacionales por medio de los momentos de inercia principales. La acción de las torcas que aparecen cuando el barco se desplaza de su punto de equilibrio de flotación hace que el momento angular cambie y lleve al barco a su punto de equilibrio. Éstas son las bases que fundamentan el desarrollo del Cuerpo Rígido en Mecánica, llevando a Euler a establecer su fórmula sobre la Dinámica de Cuerpo Rígido cuando no hay constricciones.

Como lo indicamos anteriormente, fue por primera vez Euler quien utilizó de forma sistemática los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden. El concepto de estabilidad lineal se lo debemos a él, el comportamiento de las oscilaciones alrededor de los puntos de equilibrio determinan así el concepto de estabilidad marginal. La modificación de la posición de la carga en un barco altera la respuesta de la oscilación del casco. Los desplazamientos del equilibrio y las torcas que se aplican para restituir esta posición de equilibrio son función de los momentos de inercia del casco.

Los ingenieros navales modernos utilizan los mismos conceptos pero aprovechando capacidades técnicas que no eran posibles hace tres siglos; los buques actuales estabilizan su flotabilidad variando dinámicamente los momentos de inercia del casco, esto lo logran colocando un doble casco donde hay fluidos que son desplazados por aire a presión. Este control dinámico anula buena parte de los movimiento sobre el casco debido a la acción de las olas.



Presión sobre el casco del barco

## Resistencia y arrastre

En el diseño del barco no sólo se debe tomar en cuenta la estabilidad hidrostática del buque, la forma del casco determina la resistencia que ejerce el agua cuando el barco se desplaza en el mar. El arrastre que siente el barco cuando fluye una corriente de agua a través de su casco o la resistencia que tiene al desplazarse depende de manera importante de la forma geométrica del casco. Euler no fue ajeno a este problema de arquitectura naval y se interesó en dar soluciones prácticas a los ingenieros navales.

Desde la época de Newton, se sabía que la resistencia que ejerce un cuerpo a ser desplazado sobre un fluido es proporcional al cuadrado de la velocidad. Ya en el siglo XVIII, los experimentos mostraban que la resistencia  $R$  estaba determinada por la siguiente ley,  $R = C_D \rho v^2 S$ , donde  $\rho$  es la densidad del fluido y  $v$  su velocidad,  $S$  es el área del corte transversal del casco del barco desde su línea de flotación a la quilla y  $C_D$  es una constante. La pregunta que se hacían Euler y los ingenieros navales era cómo depende  $C_D$  de  $S$ . Para obtener una respuesta, Euler retoma la Teoría de Impacto formulada por Newton, la cual supone al fluido como un conjunto de partículas puntuales masivas. En este modelo, cuando un objeto se desplaza por el fluido, la fuerza de resistencia es debida al impacto de las partículas sobre la superficie del objeto. Newton había propuesto este modelo para gases y no para fluidos como el agua. Sin embargo, dada la ausencia de otra teoría que explicara los efectos de arrastre y resistencia en los fluidos, los científicos de aquella época tuvieron que asumirla para fluidos densos.



En 1727, Daniel Bernoulli formuló un conjunto de experimentos donde se mostraba una serie de inconsistencias de la Teoría de Impacto. Al mismo tiempo, Johann Bernoulli propuso la idea de considerar en los fluidos el concepto de elemento de volumen y asociar a cada uno de estos elementos una presión, la cual designó como presión interna del fluido. Éstos eran los primeros pasos para definir al fluido como un medio continuo.

Euler se preocupó por los problemas que generaba la Teoría de Impacto, sin embargo la tuvo que utilizar para poder calcular las fuerzas de arrastre de distintos objetos en el agua. Su interés se centró en calcular el coeficiente de arrastre  $C_D$  para cuerpos con geometrías sencillas, suponiendo colisiones elásticas e inelásticas al aplicar la Teoría de Impacto. El valor de coeficientes no correspondía al que se obtenía de manera experimental. La idea de encontrar un diseño óptimo que tuviera la resistencia mínima llevó a Euler a utilizar el cálculo de variaciones para determinar la forma del casco que minimizara el arrastre. En esta investigación utilizó la descripción paramétrica de superficies en el espacio. Las herramientas matemáticas que Euler aplicó en dicho estudio, pasaron a formar parte del currículum del ingeniero naval. Sin embargo, no pudo encontrar las soluciones correctas debido al uso de la Teoría de Impacto.

## Teoría de campos en fluidos

La necesidad de encontrar una alternativa a la Teoría de Impacto, estimuló a varios estudiosos de los fluidos del siglo XVIII a desarrollar lo que ahora conocemos como Teoría del Flujo Potencial. Entre otros encontramos a Daniel Bernoulli, quien introdujo por primera vez las leyes de conservación de flujos y la utilización de la segunda ley de Newton para determinar las ecuaciones dinámicas del elemento de fluido. Esta dinámica se aplica a una línea de corriente, la cual se representa por la conocida Ecuación de Bernoulli. Otras contribuciones importantes fueron hechas por Jean Le Rond D'Alembert, las cuales sentaron las bases para una teoría de campos para fluidos que no incluía variables internas referidas a la presión y fuerzas en cada elemento de volumen.

Partiendo de los trabajos de Daniel Bernoulli y D'Alambert, Euler trabajó del 1752 al 1756 en formular una teoría de campos que permitiera entender los efectos de arrastre del fluido sobre la superficie de los objetos sin necesidad de recurrir a la Teoría de Impacto. Las contribu-



Jean Le Rond D'Alembert

ciones de Euler en esta dirección son la introducción de las ecuaciones constitutivas y las leyes de conservación, junto con la segunda ley de Newton. De esta forma se tuvo una relación entre las variables que definen cada elemento de volumen del fluido, como son la velocidad y la presión. Euler define estas ecuaciones dinámicas en un marco de referencia fijo, obteniendo su célebre fórmula:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \circ \nabla \mathbf{u} \right) + \nabla p = 0 \quad .$$

A partir de esta ecuación, Euler pudo deducir la ecuación de Bernoulli sobre una línea de corriente. La formulación de este tipo de ecuaciones en derivadas parciales lleva consigo la definición de las condiciones de frontera e iniciales, las cuales son necesarias para definir de manera completa la solución de este tipo de problemas.

La ecuación de Euler representa la dinámica de un fluido ideal, en donde los objetos no ofrecen resistencia al fluido. No existen términos de pérdidas debido a fuerzas viscosas o bien pérdidas por radiación. Tuvo que pasar más de medio siglo para que Stokes y Navier, reformularan una nueva ecuación que permitiera estimar los coeficientes de fricción y arrastre de forma más precisa. Es claro que en época de Euler no era posible llegar a la formulación de Navier y Stokes debido a la falta de experimentos más precisos. Lagrange reformuló la hidrodinámica de Euler variando el marco de referencia, el cual, en la visión lagrangiana, se desplaza con el elemento de volumen. Cabe decir que Lagrange le dio crédito a D'Alambert y no a Euler, como antecedente de su trabajo. Sin embargo, hoy se reconoce a Euler como el iniciador de una teoría hidrodinámica moderna, donde sigue utilizándose la ecuación propuesta

por Euler para muchos fenómenos en los que los términos de pérdidas no son importantes en la escala en que se estudia el problema físico.

## Propulsión

Los ingenieros navales tienen dos preocupaciones básicas: el diseño óptimo del casco y la propulsión de la nave. Del primer punto ya hemos comentado cómo Euler y sus contemporáneos abordaron este problema. Ahora consideremos las fuerzas que utilizan los barcos para desplazarse por los mares. En el siglo XVIII solamente había dos tipos de fuerzas: el viento y la fuerza humana. El primer trabajo de Euler para la Academia de Ciencias de París versó sobre la posición óptima de los mástiles en la cubierta de la nave. La forma del casco y en particular el perfil de la proa, interviene en la decisión de cómo distribuir los mástiles en cubierta. Euler estudió con detalle dónde se aplicaba la fuerza del viento en las velas, para lo cual tuvo que utilizar nuevamente la Teoría de Impacto, y al mismo tiempo determinar la fuerza de resistencia del casco. De la suma de fuerzas obtuvo una resultante que da la propulsión de la nave, así también se determinaba la torca que se ejerce en la popa de la nave. Esta torca es de gran importancia porque permite tener una buena maniobrabilidad del barco a través del timón. Los ingenieros navales fueron desarrollando posteriormente nuevas estrategias para mejorar la propulsión de los barcos de vela. En la época de Euler, las velas principales se colocaban transversales a la dirección de desplazamiento del barco. Para finales del siglo XIX, los *Clippers*, que eran barcos de 5 o más mástiles, contaban hasta con 48 velas, siendo algunas de las llamadas *stay*. Éstas eran colocadas en la dirección del desplazamiento, lo cual les daba una velocidad notable de 17 nudos.

La fuerza humana ha sido utilizada en la navegación para propulsar pequeñas embarcaciones o bien para hacer maniobras de posicionamiento. Hasta el siglo XVI se había utilizado el desplazamiento de barcos con remos, pero en el siglo XVIII era la fuerza del viento la propulsión principal de las naves. Euler se interesó en entender el problema de la propulsión con remos. Primero propuso un esquema simplificado para determinar el arrastre de una paleta que se desplazaba en la dirección del barco. También determinó la potencia que se podía obtener del esfuerzo humano promedio. Para obtener un impulso más eficiente, propuso inicialmente un sistema de paletas con mecanismos de cortina para evitar el proceso de elevar la paleta fuera del agua para repetir el

proceso de propulsión. Estas paletas las colocaba Euler a babor y estribor de la embarcación. Como una mejor alternativa, reemplazó estas paletas por un modelo de noria, o rueda con paletas, que al ir girando producían una propulsión continua en el barco. En esa época no se prestó mucha atención a estos medios de propulsión y no fue hasta el siglo XIX cuando Fulton utiliza este sistema de rueda con paletas, acopladas a una máquina de vapor, para impulsar las naves.

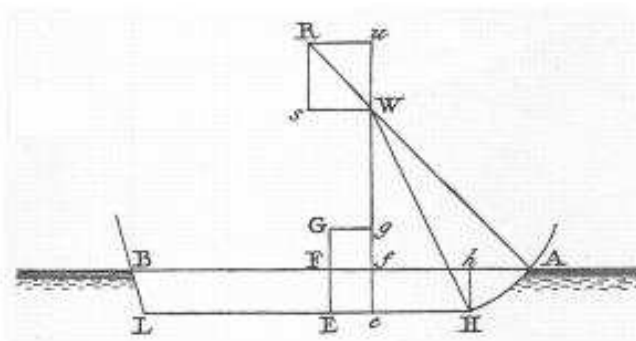
La preocupación de Euler sobre el impulso de las naves lo llevó a proponer un sistema de propulsión basado en una rueda con paletas cuyo eje de giro va en la dirección del desplazamiento del barco. En este caso, las paletas forman un ángulo respecto a la rueda que las sostiene. Estudió el ángulo óptimo para obtener el mayor impulso. Este diseño es el antecedente de la hélice moderna, donde las hojas de la hélice tienen un perfil variable. En los trabajos de Euler podemos encontrar estudios sobre la propulsión a chorro. Este sistema consistía en provocar la expulsión de un chorro de agua a gran velocidad. El prototipo que Euler propuso era una bomba de agua bidireccional cuyo camino de salida es estrangulada para aumentar la velocidad del fluido y provocar de esta manera un mayor cambio de momento.

La efectividad de los cálculos de Euler en referencia a propulsión no fueron efectivos debido al uso de la Teoría de Impacto. Sin embargo, las ideas trascendieron y fueron adaptadas a las nuevas tecnologías, tal como sucedió con el uso de las hélices en las máquinas de vapor en la navegación.

## Maniobrabilidad

Los capitanes de naves de vela requerían de una gran habilidad para desplazar el buque en cualquier dirección independientemente de cuál fuera la dirección del viento. La capacidad de maniobra depende de las fuerzas que se obtienen debido al empuje de las velas, el arrastre del casco en la dirección de proa-popa y de babor-estribor y del arrastre del timón. Un buen balance de fuerzas y torcas permitía tener buques con una navegación ágil. Euler dedicó parte de su obra naval a este problema de maniobrabilidad. El movimiento del casco del barco no sólo depende del desplazamiento debido a la propulsión del viento; también las olas del mar ejercen un movimiento al casco que puede alterar la estabilidad de la nave. Euler determinó el movimiento del casco debido al oleaje considerando a éste como un cuerpo rígido. Dados los momentos de inercia principales del barco, Euler determinó las ecuaciones

de movimiento del casco. Dado su conocimiento sobre la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, encontró las condiciones para que el oleaje provocara un efecto de resonancia. Vale la pena decir que fue Euler quien introdujo el concepto de resonancia en la Mecánica. La modificación de la posición de la carga en las bodegas del barco produce una variación de los momentos de inercia del casco y consecuentemente una variación de las frecuencias de resonancia. También se preocupó por la estructura propia del casco: las maniobras y el oleaje producen torsiones, los cuales puede deformar el casco y eventualmente romperlo.



Localización de las fuerzas ejercidas sobre el casco y mástiles

## Cartografía y longitud

El desarrollo de la cartografía en las distintas naciones ha sido un problema fundamental de seguridad nacional. Los países que desarrollaron una buena cartografía del mundo pudieron dominar los mares en forma comercial y también militar. Por esta razón había un interés enorme, por parte de la Academia de San Petersburgo, de tener a los mejores científicos de esa época. Euler fue invitado a participar en el Departamento de Geografía para colaborar en la elaboración de la cartografía del territorio ruso.

La cartografía tuvo un impulso enorme cuando los exploradores portugueses y españoles emprendieron los primeros viajes transatlánticos. El cruzar el océano desde la Península Ibérica hasta el Caribe implicaba navegar durante muchas semanas sin tener una referencia costera. Fue

el flamenco Mercator, cartógrafo de Carlos V, quien diseñó la primera carta de navegación donde los capitanes podían navegar *a ciegas* utilizando únicamente el compás. Mercator creó una proyección de la esfera al plano que tenía la propiedad de preservar los ángulos. Gracias a esta propiedad, el capitán solamente necesitaba trazar una línea recta entre el punto de inicio al de destino. El ángulo que formaba dicha recta con los meridianos daba la dirección de compás que el navegante debía seguir durante todo el viaje para asegurar llegar al lugar de destino. Euler se interesó en las proyecciones de la esfera al plano, la proyección de Mercator la pudo representar con base en una proyección estereográfica. Este tipo de proyección que preserva los ángulos la denominamos hoy en día como un mapeo conforme.



Gerardus Mercator

La cartografía de Mercator fue uno de los secretos mejor guardados por el reino español durante el siglo XVI, pero dos siglos después, todos los países con flotas mercantes y militares tenían una buena cartografía de los continentes. La navegación se hizo más rápida y requería de una mayor precisión en el posicionamiento. Si bien la navegación sobre la loxodrómica <sup>1</sup> permitía a los capitanes de barcos determinar su posicionamiento a través de la latitud, esta no resultaba exacta al cabo de varias semanas de navegación debido a la deriva ocasionada por las corrientes marinas. El cálculo de la latitud se podía hacer con mucha exactitud. Ya para el siglo XVIII se tenían tablas muy precisas sobre la

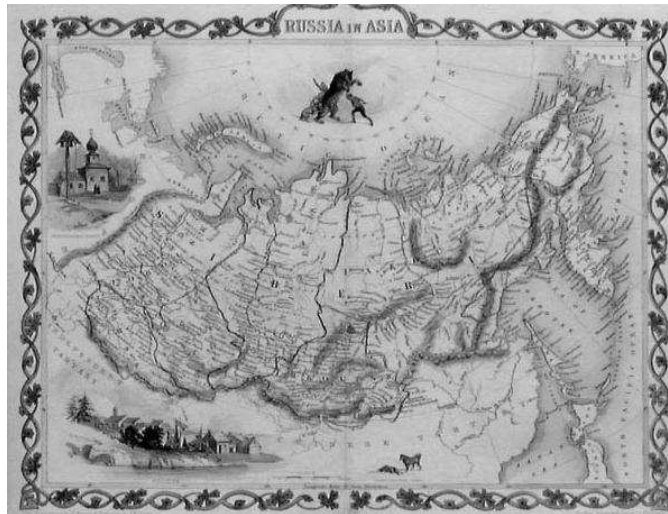
---

<sup>1</sup>La loxodrómica es la línea que une dos puntos cualesquiera de la superficie terrestre cortando a todos los meridianos con el mismo ángulo. En la proyección de Mercator es una recta.

posición del Sol en el zenit para cada día del año, con lo cual era sencillo determinar la latitud. El gran problema era el cálculo de la longitud.

En 1707, la flota inglesa regresaba de un largo viaje a las islas británicas. El almirante al mando de la flota, Sir Cloudesley Shovell, había realizado los cálculos para determinar la longitud en que se encontraba su nave, la HMS Association. Su cálculo indicaba que estaba en el punto preciso donde debía girar al Norte y encontrar la costa sur de Gales. Debido a los errores en el cálculo de la longitud, el HMS Association, junto con otras naves, encallaron en las islas Scilly, al sur de Irlanda. Esta catástrofe le costó al Parlamento Inglés una parte importante del presupuesto del reino para restituir los barcos perdidos. Este no había sido el único desastre ocurrido por errores de navegación. Estos incidentes motivaron al Parlamento Inglés a lanzar un concurso para determinar la longitud en navegación de forma muy precisa. El premio era sustancioso, en términos actuales correspondía a algunos cientos de millones de dólares. Todos los científicos de esa época se interesaron en participar y Euler no fue la excepción.

Para los académicos interesados en la Mecánica Celeste, el mecanismo natural para determinar en forma exacta la longitud era tener un buen conjunto de tablas de efemérides de la bóveda celeste. De esta forma, cuando el capitán observaba una efeméride en el cielo y determinaba la hora local a la cual ocurría tal fenómeno, podía confrontar el tiempo calculado con la hora marcada en la tabla de efemérides, dado que esa hora correspondía a un sitio en Europa, entonces podía fácilmente determinar su longitud restando la hora local con la marcada en las tablas. Esto parecía muy sencillo, sobre todo si se consideraba que desde hacía muchos años, los astrónomos habían utilizado las efemérides de las lunas jovianas como un reloj muy preciso. Las cuatro lunas mayores de Júpiter tienen órbitas muy poco excéntricas y sus órbitas son casi keplerianas. Euler contribuyó en el desarrollo de los métodos perturbativos para calcular las variaciones de los parámetros orbitales keplerianos de los cuerpos celestes, en particular de las lunas jovianas. Ésta era una solución muy elegante para determinar la longitud, salvo que un capitán en altamar difícilmente podía estar observando a Júpiter sobre la cubierta de la nave. Entonces buscaron otra alternativa, que era el cálculo de las efemérides de la Luna.



Mapa del Imperio Ruso en la época de Euler

## El movimiento lunar

Los dos objetos que son más fácilmente apreciables en la bóveda celeste son la Luna y el Sol. El Sol determina la hora local y la Luna era una buena candidata a ser quien determinara la longitud. Los mecánicos celestes se abocaron a obtener tablas de posicionamiento de la Luna lo más preciso posible. Euler comenzó a trabajar en el problema lunar desde 1730 y esto lo fue acercando al mundo de la Mecánica Celeste. Las contribuciones de Euler a la teoría perturbativa del problema kepleriano datan de 1747. A través de esta teoría pretendía él y otros más, determinar las tablas de efemérides lunares. Haciendo todas las consideraciones necesarias sobre las principales perturbaciones que sufría la órbita lunar, no conseguían obtener cálculos satisfactorios sobre la posición de la Luna. Prácticamente no hubo físico o matemático de aquella época que no hubiera intentado abordar el problema lunar. El problema se volvió una pesadilla para la comunidad de mecánicos celestes.

El problema de dos cuerpos, correspondiente al problema de órbitas keplerianas perturbadas, estaba prácticamente acabado. Sus resultados eran muy satisfactorios cuando se aplicaban a prácticamente a todos los objetos del sistema solar. Estos métodos fueron ampliamente utilizados a finales del siglo XVIII y principios del XIX. La apoteosis del desarrollo de la Mecánica Celeste se dio con el descubrimiento de Neptuno. Las alteraciones de la órbita de Urano, descubierto por Sir William Herschel en 1781, no eran explicables por las perturbaciones debidas a los



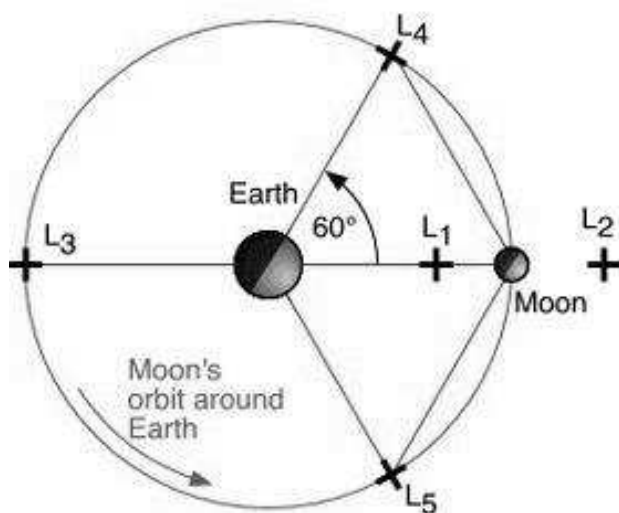
planetas interiores. Muchos científicos llegaron a cuestionar las ley de gravitación universal, alegando que no se cumplía para distancias más allá de Júpiter. Fueron dos matemáticos, John Couch Adams de Inglaterra y Urbain Le Verrier de Francia quienes son considerados como los descubridores de Neptuno. Ambos científicos hicieron la suposición que las alteraciones de la órbita de Urano eran debidas a la existencia de un planeta exterior, cuya órbita compartía la eclíptica de Urano. De manera independiente y de forma simultánea, calcularon los parámetros orbitales del este nuevo planeta, y fue Adams quien primero llegó a un resultado. Este acudió con Sir George Airy, director del observatorio de Greenwich, para mostrarle sus resultados y solicitar que observaran en un cierto lugar del cielo para comprobar la existencia de este planeta. Airy menospreció el cálculo de Adams. Por otro lado, Le Verrier, que era un hombre más maduro y más voluntarioso, movió todas sus influencias para lograr que uno de los mejores observatorios de Europa, el de Berlín, colocara su gran telescopio en la posición que Le Verrier les había indicado. Así, el 23 de septiembre de 1846, Urano apareció ante los ojos de los astrónomos. Esto desató la euforia de los franceses, haciendo mostrar el triunfo de la ciencia francesa sobre la inglesa. Airy tuvo que llevar sobre sus espaldas el vituperio de sus conacionales por haber despreciado los resultados del joven Adams.

## El problema de los tres cuerpos

Euler comenzó a trabajar en una nueva idea para estudiar el movimiento de los cuerpos celestes, que consistía en considerar el movimiento de tres cuerpos en el espacio. El problema es enormemente más complicado que el problema de Kepler y no es posible encontrar una solución general a este problema. Sin embargo, Euler propuso en 1760 un conjunto de soluciones que son conocidas como colineales y triangulares. Para determinar estas cinco soluciones, se busca un marco de referencia rotante. Los puntos fijos de las ecuaciones de movimiento, en este sistema rotante, conocido como sinódico, son soluciones particulares al problema de tres cuerpos. Tres soluciones corresponden a colocar las tres masas en posición colineal y las otras dos formando un triángulo rectángulo. Si bien estas soluciones son sencillas, éstas han sido fundamentales para el desarrollo de la Mecánica Celeste del siglo XIX y XX.

El problema que Euler tenía en mente al buscar este tipo de soluciones era el movimiento lunar. El Sol y la Tierra toman el papel de las dos primeras masas y la Luna se integra como el tercer cuerpo. Es claro que las soluciones eulerianas (que también son conocidas como los puntos de Lagrange) no corresponden al movimiento que esperamos tener de estos tres cuerpos. De hecho, las soluciones colineales son linealmente inestables a diferencia de las triangulares, las cuales son estables en el sentido lineal. Un ejemplo de estas soluciones es el movimiento de los objetos celestes llamados Troyanos y Aqueos, los cuales se mueven en posición triangular con respecto al Sol y Júpiter.

Una forma alternativa de proponer el problema de tres cuerpos es la siguiente: consideremos el movimiento de dos masas grandes junto con una tercera, cuya masa la podemos tomar tan pequeña como queremos. Si este proceso lo llevamos al límite, la tercera partícula siempre se ve afectada por las fuerza gravitacionales de las dos primeras. Al ser la tercera masa despreciable, ésta no afectará el movimiento de las dos masas principales. De esta forma se desacopla el problema de tres cuerpos en un problema kepleriano, el de las dos masas principales. El tercer cuerpo se mueve bajo la acción de los dos primeros cuerpos. A este proceso se le conoce como el *problema restringido de los tres cuerpos*, el cual ha sido muy exitoso en el estudio del movimiento de cuerpos celestes en el sistema solar y en particular en el movimiento de satélites y naves automáticas que son enviadas a otros planetas.



El problema de tres cuerpos en el sistema Tierra--Luna

A mediados del siglo XVIII, se habían realizado muchos intentos de obtener tablas de efemérides de la Luna lo más precisas posible. Las

más exactas habían sido calculadas por Lexell, pero los errores eran del orden de  $30'$ , lo cual era aún inaceptable para el cálculo de la longitud por los capitanes de barcos. Euler consideró añadir la perturbación del movimiento de la Tierra debido a Venus, pero no mejoró dichos cálculos. Partiendo del problema de tres cuerpos, tomó un sistema de referencia rotante para definir las ecuaciones de movimiento e integrarlas de forma numérica. Ya para 1772, Euler estaba completamente ciego y muchos de los cálculos los realizaba mentalmente. Su hijo J. A. Euler le asistía en realizar estos desarrollos matemáticos. El joven Euler se involucró en los esfuerzos realizados por su padre para lograr tener unas mejores tablas de efemérides de la Luna. Era evidente, para el padre y el hijo, que la complicación de cálculo del movimiento lunar hacía imposible obtener las tablas de efemérides con la exactitud deseada.

Le correspondió al hijo de Euler continuar con las ideas de su padre, simplificando el algoritmo de cálculo. Considerando el movimiento medio de la Tierra alrededor de la Luna, se planteó un sistema de referencia sinódico que mantenía fijos a estos dos cuerpos celestes. Tomando datos más exactos sobre la excentricidad de las órbitas lunares y terrestres junto con mejores valores de las masas de la Luna, Tierra y Sol, el joven Euler obtuvo un mejor método de cálculo que denominó como la *Variación*. De esta forma, pudo resolver con una precisión de 14 segundos de arco el movimiento lunar.

La teoría lunar de Euler y su hijo no fueron tomadas en cuenta durante un siglo. Una de las razones fue el uso del cronómetro de navegación, creado por John Harrison, el cual permitía a los navegantes tener un error de unos cuantos minutos de arco en medio año. Harrison fue el ganador del premio ofrecido por el Parlamento Inglés para quien obtuviera un procedimiento de determinar la longitud de navegación con una precisión de minutos en un año. De esta forma, las marinas británica y francesa extendieron sus dominios en todos los océanos y las naves militares y de carga pudieron arribar con gran seguridad a los destinos trazados.

La necesidad de tener cartografías más precisas motivó a los mecánicos celestes a retomar el problema lunar y obtener mejores tablas de efemérides. Los ingleses y franceses habían instalado observatorios astronómicos en casi todos los sitios costeros del mundo con el propósito de ofrecer a los capitanes de barcos una referencia precisa del tiempo universal, con lo cual podían sincronizar sus cronómetros de navegación con la hora exacta. Además, los buques oceanográficos de la marina inglesa y francesa exploraban todos los litorales para crear cartas de navegación que fueran más veraces, las cuales se mantenían como

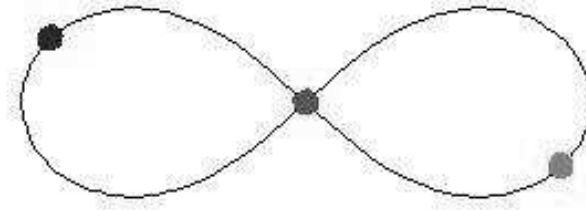
secreto militar por los distintos gobiernos. Los americanos crearon a finales del siglo XIX el *U. S. Nautical Almanac Office* dedicado a calcular las tablas de efemérides para la marina americana. En esta oficina trabajaba un joven matemático llamado G. W. Hill como asistente. Hill retomó en 1870 los trabajos de Euler y su hijo, pero cambió el sistema de referencia sinódico a uno donde la Tierra y el Sol se mantienen fijos. Aprovechando que los datos de las masas de los planetas y sus parámetros orbitales eran mucho más precisos que un siglo atrás, los cálculos de Hill pudieron mejorar en mucho la precisión del movimiento lunar. Diez años después, E. W. Brown extendió la teoría de Hill obteniendo resultados con una exactitud de 0,01 segundo de arco. Los cálculos de Brown eran muy complejos y durante años se tomó como ejemplo de la complejidad del cálculo científico a estos desarrollos de Brown. Hoy en día se utiliza el cálculo del movimiento lunar de Brown para probar la eficiencia de los manipuladores algebraicos computacionales.

Hill y Brown plantearon el modelo matemático más adecuado para entender la dinámica de la Luna, sin embargo el camino seguido por estos dos científicos parte de los resultados obtenidos por Euler y su hijo. Poincaré reconoció la importancia del trabajo de Hill, al grado de ser el único científico que visitó Poincaré en sus viajes a los Estados Unidos. Es claro que la admiración que Poincaré tuvo sobre el trabajo de Hill fue implícitamente un homenaje al extenso trabajo realizado por Euler sobre el movimiento lunar.

## Más allá del problema de tres cuerpos

Para el movimiento lunar no se pudo encontrar una solución satisfactoria bajo el esquema del problema de tres cuerpos propuesto por Euler. Sin embargo, tanto el problema de tres cuerpos como el problema restringido, se convirtieron en herramientas esenciales de todos aquellos científicos que han estudiado problemas de Mecánica Celeste en los últimos 250 años. Mucha gente buscó una solución general al problema de tres cuerpos. El rey Oscar de Suecia ofreció, en 1800, un premio para aquél que encontrara la solución general a este problema. El obstáculo que debía ser superado para encontrar soluciones al problema de tres cuerpos son las colisiones, tanto binarias como totales. Sundman mostró que para el problema de tres cuerpos, las soluciones en función del tiempo, solamente se pueden expresar en forma asintóticas como potencias de  $t^{1/3}$ . Poincaré trabajó extensamente dicho problema y mostró que no pueden existir soluciones analíticas en general debido a la presencia de fenómenos heteroclínicos y homoclínicos.

Hasta finales del siglo XX, las únicas soluciones exactas que existían del problema de tres cuerpos eran las eulerianas. A. Chenciner y R. Montgomery se plantearon la tarea de encontrar nuevas soluciones de este problema. Tomaron el modelo de tres cuerpos con masas iguales, el cual se escribe en un sistema de coordenadas donde se reducen todas las simetrías, luego plantearon un problema variacional para encontrar los segmentos de una órbita periódica y juntando todos los segmentos obtuvieron la solución deseada. Un paso delicado es el evitar colisiones de las partículas al aplicar el proceso variacional. Finalmente encontraron en 1993 una solución en forma de ocho, donde las tres partículas recorren la misma trayectoria en forma periódica sin colisionar. C. Simó extendió de forma numérica, el movimiento de cientos de partículas aplicando este procedimiento, todas las partículas siguen un mismo camino a la manera de una coreografía. Es importante destacar que las herramientas que Chenciner y Montgomery utilizaron tienen su origen en Leonhard Euler hace más de dos siglos.



Solución del problema de tres cuerpos tipo ocho

## Conclusión

El trabajo científico de Euler fue muy extenso, de 1725 a 1783 produjo más de 790 escritos en distintas ramas de la ciencia y la técnica. Es interesante notar que más del 30 % de su producción la realizó de 1775 a 1783 cuando estaba completamente ciego. El interés que tuvo Euler para entender la naturaleza fue mucho mayor que sus limitaciones físicas.

A lo largo de estas líneas hemos podido ver cómo Euler estuvo involucrado en un gran número de problemas prácticos, a los cuales pudo dar soluciones ingeniosas. Los problemas de navegación fueron un motivo de interés continuo en Euler, muchos de sus resultados siguen siendo utilizados en el diseño y construcción de barcos, en el desarrollo de la cartografía moderna y en el cálculo de misiones espaciales. Euler no se conformó con resolver un problema específico, siempre buscó enfocarlo en un marco más amplio de la Física. Los problemas de estabilidad, propulsión y maniobrabilidad lo condujeron a formular la teoría de Cuerpo Rígido y plantear las bases de la Mecánica de Fluidos. El ejemplo de Euler nos muestra que es importante atender problemas prácticos para encontrar nuevos caminos en el desarrollo de la Física y la Matemática.

Pare aquellos lectores que quieran ahondar más en los trabajos de Leonhard Euler pueden consultar la siguiente bibliografía. Sobre el trabajo en arquitectura naval y cuerpo rígido pueden consultar las referencias 3 y 5. Para el tema de fluidos, las referencias 2, 4 y 5 son muy adecuadas. En el tema de cartografía se puede acudir al trabajo original de Euler descrito en la referencia 1. Finalmente, sus trabajos de Mecánica Celeste pueden ser consultados en las referencias 4 y 6.

## Bibliografía

- [1] L. Euler, *Cartografía Matemática*. Colección Clásicos de la Ciencia. Ed. Limusa, 1998.
- [2] M. Kline, *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Vol. 2, Alianza Editorial, 1972.
- [3] S. Longton, *Euler on Rigid Bodies*. En *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*. Editores E. Bradley y E. Sandifer. Elsevier B. V., 2007.
- [4] G. K. Mikhailov, S. Ya. Stepanov, *Leonhard Euler and his contribution to the development of Mechanics (On the 300th anniversary of his birth)*. Editorial. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, **71**, 2007, 157–167.
- [5] H. Nowacki, *Leonhard Euler and the theory of Ships*. En <http://www.engin.umich.edu/dept/name/Announcements/>.
- [6] C. Wilson, *Euler and Applications of Analytical Mathematics and Astronomy*. En *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*. Editores E. Bradley y E. Sandifer. Elsevier B. V., 2007.