Una relectura del Introductio in analysin infinitorum de Euler

Ricardo Quintero Zazueta
CINVESTAV, IPN
Departamento de Matemática Educativa
quintero@mail.cinvestav.mx

Resumen

Este artículo argumenta que detrás de las atrevidas y aparentemente poco rigurosas heurísticas Eulerianas, se encuentra un núcleo de sólido razonamiento matemático capaz de encontrar expresión dentro de los paradigmas de rigor de distintas épocas. El texto está basado en una conferencia dada por el autor en las Jornadas de Historia y Filosofía de las Matemáticas, organizadas en Mayo de 1999 por la Sección de Metodología y Teoría de la Ciencia del Cinvestav, y auspiciadas por el CIMAT, las cuáles tuvierón lugar en las instalaciones de éste último en Guanajuato, Gto.

1 Introducción.

En 1748, Leonard Euler publicó un tratado en dos volúmenes *Introductio in analysin infinitorum* —Introducción al análisis de los infinitos—, en el cual se estudian las funciones elementales y la geometría de las curvas, sin recurrir a los métodos del cálculo diferencial e integral. Esta exploración de las bases del análisis usando métodos elementales, tenía el propósito, como Euler mismo señala, de educar a los principiantes en el estudio del análisis:

> A menudo he considerado el hecho siguiente: la mayor parte de las dificultades que impiden el progreso de los estudiantes que tratan de aprender análisis, tienen su raíz en intentar este arte más sutil, aún cuando entienden poco de

> álgebra ordinaria. De aquí se sigue no sólo que permanezcan en las márgenes, sino además que desarrollen ideas extrañas sobre el concepto de infinito, el cual deben tratar de usar. Si bien el análisis no requiere de un conocimiento exhaustivo de álgebra, o de todas las técnicas algebraicas descubiertas hasta ahora, aun así hay temas cuya consideración prepara a un estudiante para un entendimiento más profundo ...
>
> ...Aunque todos ellos se desarrollan hoy en día por medio del cálculo diferencial, sin embargo, los he presentado aquí usando solamente álgebra ordinaria, para que la transición del análisis finito al análisis de los infinitos pueda volverse más fácil.

La primera parte del *Introductio* se ocupa de manera sistemática de las funciones elementales —polinomios por una parte, y exponencial, logaritmo y funciones trigonométricas por otra—. Sin hacer uso del teorema de Taylor u otras herramientas del cálculo Euler establece, primeramente, desarrollos en términos de series de potencias enteras de la variable independiente, de las funciones exponencial y logarítmica:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

Posteriormente, también se establecen desarrollos en serie y expansiones como producto infinito de las funciones seno y coseno:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + \cdots$$

$$\operatorname{sen} x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \cdots$$

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right) \cdots$$

En el tratado se derivan algunas consecuencias notables de dichas expansiones, como la hoy en día llamada fórmula de Euler, y la suma de la serie de los recíprocos de los cuadrados:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

En la segunda parte del se encuentra una formulación de la geometría analítica cuyo modelo siguieron gran parte de los textos sobre la materia hasta las primeras décadas de nuestro siglo, cuando aparecieron y fueron ganando terreno formulaciones alternativas basadas en el uso de vectores y álgebra lineal. El repertorio de temas que abarca el *Introductio* es más extenso que en la mayoría de los libros de textos contemporáneos de geometría analítica. El estudio de las curvas en él no se detiene en las cónicas, sino abarca también curvas de tercero y cuarto órdenes, se estudia la curvatura — la cual en los textos modernos no suele abordarse sin el auxilio del cálculo diferencial— y se tratan además algunos problemas como el de la construcción de ecuaciones, esto es, la determinación mediante construcciones geométricas, de segmentos cuyas longitudes son iguales a las raíces positivas de una ecuación dada.

2 Infinito actual vs. infinito potencial en la suma de series.

Probablemente el aspecto más sorprendente del *Introductio* para el lector contemporáneo, sea la derivación de las expansiones como series de potencias y productos infinitos de las funciones elementales, sin valerse de la expansión en serie de Taylor u otros recursos del cálculo. Examinemos, por ejemplo, el razonamiento de Euler para obtener la serie exponencial:

Consideremos un número $a > 1$, entonces, si ε es un infinitesimal, la cantidad a^ε difiere de 1 un infinitesimal, por lo que puede escribirse

$$a^\varepsilon = 1 + k\varepsilon$$

para alguna $k > 0$. Entonces, si x es una cantidad finita — es decir ni infinita ni infinitesimal—, positiva, y $N = x/\varepsilon$, N resulta un número infinitamente grande (*numerus infinite magnus*) y puede calcularse usando la expansión de Newton del binomio

$$\begin{aligned} a^x &= a^{N\varepsilon} = (a^\varepsilon)^N = (1+k\varepsilon)^N \\ &= 1 + N(k\varepsilon) + \frac{N(N-1)}{2!}(ke)^2 + \frac{N(N-1))(N-2)}{3!}(k\varepsilon)^3 + \cdots \\ &= 1 + kx + \frac{N-1}{N}\frac{k^2}{2!}x^2 + \frac{N-1}{N}\frac{N-2}{N}\frac{k^3}{3!}x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Euler observa que como N es infinito, $\frac{N-1}{N} = 1$, $\frac{N-2}{N} = 1$, etc., de manera que se obtiene la expansión

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2}{2!}x^2 + \frac{k^3}{3!}x^3 + \cdots$$

Cuando se considera $k = 1$ se tiene, para N infinito

$$(1+\frac{x}{N})^N = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Euler comenta que la serie $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ puede factorizarse en una infinidad de factores lineales iguales a $(1+\frac{x}{N})$ y define

$$e^x = (1+\frac{x}{N})^N$$

cuando N es infinito.

En la derivación anterior, sin duda concisa y elegante, Euler usa *algebra ordinaria* en tanto transforma las expresiones usando las reglas usuales de la aritmética y las fórmulas comunes del álgebra como la expansión del binomio. Sin embargo, Euler vá más allá de lo que un lector contemporáneo consideraría *álgebra ordinaria*, en tanto presupone una aritmética capaz de operar con números infinitamente grandes así como con números infinitesimalmente pequeños. Euler trata dichas entidades matemáticas con una gran naturalidad. Salvo el comentario aislado de que en relación a las magnitudes finitas los infinitesimales pueden tratarse como ceros, Euler no proporciona mayores explicaciones cuando efectúa, por ejemplo, operaciones como factorizar una magnitud finita como el producto de una magnitud infinita por una magnitud infinitesimal. Euler no problematiza la existencia de los infinitos e infinitesimales ni intenta hacer explícitas las reglas para operarlos, sino los asume y trabaja con ellos guiado por una prodigiosa intuición matemática que rara vez yerra el rumbo.

Si interpretamos los argumentos de Euler haciendo una traducción directa al lenguaje contemporáneo de los límites, podemos fácilmente producir argumentos incorrectos o falaces. Pero Euler no argumentaba sobre límites, sino sobre aritmética de infinitos e infinitesimales. En contraste con las ideas Eulerianas, a moderna idea de convergencia de una serie de números reales, involucra en su definición sólo a expresiones con un número finito de términos formados por números reales, los cuales son por definición finitos.

En un curso contemporáneo de introducción al análisis, hay que dedicar no poco esfuerzo para convencer al estudiante que

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

no significa que se hayan tomado efectivamente la infinita totalidad de los recíprocos de las potencias de 2 y la acumulación de las correspondientes magnitudes haya sido exactamente 2. Interpretamos la suma de dicha serie de una manera menos directa: en la sucesión de sumas parciales

$$\begin{aligned} 1, \quad 1+\frac{1}{2} &= \frac{3}{26}, \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}, \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} &= \frac{15}{8}, \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{31}{16}, \quad \cdots \end{aligned}$$

puedo encontrar elementos tan cercanos a 2 como yo quiera, siempre y cuando sume un número suficientemente grande de términos. La idea contemporánea de límite evita el infinito actual. No hablamos en realidad de una suma efectivamente calculada con infinidad de sumandos, sino de el límite de una sucesión de sumas finitas. No figuran explicitamente números infinitos en la definición de suma de una serie, si bien subyace en la definición una idea de infinito potencial, la cual da cuenta de la posibilidad de formar sumas parciales con un número tan grande como se quiera de términos. Tampoco figuran explícitamente los infinitesimales, si bien la definición señala la posibilidad de acercarse al límite con un error tan pequeño como se quiera.

Desde los inicios históricos del análisis, está presente el conflicto entre infinito actual e infinito potencial en la discusión sobre sus fundamentos. Este conflicto se observa claramente en los escritos de Newton, quien para validar sus teoremas de cálculo, en ocasiones recurre a infinitesimales, en ocasiones a argumentos físicos y geométricos, y en ocasiones al método de las primeras y últimas razones. Este último método puede interpretarse como una naciente idea de límite. La idea de límite encontraría eco en muchos de los seguidores de Newton, los cuales coincidirían con d'Alembert en afirmar que *La teoría de límites es la base de la verdadera metafísica del Cálculo.* Por su parte, Leibiz y sus continuadores intentaron fundamentar el cálculo en un sistema basado en el uso de magnitudes infinitesimales, si bien las dificultades para desarrollarlo llevaron al mismo Leibiz a considerar que dichas magnitudes no eran entidadaes reales como las magnitudes ordinarias, sino objetos ideales que resultaban útiles porque permitían obtener resultados correctos.

En los siglos dieciocho y diecinueve hubo numerosos intentos de establecer al análisis sobre bases firmes. Weierstrass tuvo éxito en la mitad del siglo diecinueve, con su método de las ε las δ, en establecer el concepto de límite sobre una idea bien fundada de número real. Cálculos directos con infinitos e infinitesimales, fueron reconstruídos y reemplazados por argumentos indirectos de aproximación. La idea de infinitesimal fué en el mejor de los casos considerada una heurística útil pero condenada al olvido, y en el peor de los casos satanizada y deliberadamente combatida. Hubo que esperar hasta que Robinson en nuestro siglo desarrollara el análisis no standard, para tener una teoría sólida de infinitesimales sobre la cual también puede fundamentarse al análisis, y para apreciar el valor con que algunos de nuestros grandes antepasados matemáticos, incursionaron en territorios mucho más extensos de lo que podía vislumbrarse en su tiempo.

3 Un criterio de convergencia de Euler.

Si bien hicimos notar que Euler no maneja en el *Introductio* ideas equivalentes a la noción contemporánea de límite, eso no significa, como a veces se señala en textos de historia de las matemáticas, que le tuvieran sin cuidado las cuestiones de convergencia. En un pequeño texto de 1734 *De progresssionibus harmonicis observationes* Euler afirma:

> Una serie que, después de su continuación hasta el infinito, tiene una suma finita, no admite crecimiento, incluso si se continua el doble de lejos, sino que aquell añadido en pensamiento después de un infinito será en verdad infinitamente pequeño. Porque, de otra manera, la suma de la serie continuada hasta un infinito no sería determinada y, consecuentemente, no sería finita. De aquí se sigue que, si lo que se origina después de la continuación más allá de un término

infinitesimal es de magnitud finita, entonces la suma de la serie necesariamente es infinita. Entonces, a partir de ese principio podremos juzgar si la suma de una serie dada es finita o infinita.

Para un lector contemporáneo, es fácil interpretar el párrafo citado como una prefiguración Euleriana del criterio de convergencia de Cauchy que aprendemos en los primeros cursos de análisis. Sin embargo, el texto no nos invita a considerar, dado un número finito ε —no importa cuan pequeño— si puedo encontrar un entero finito K —suficientemente grande— tal que para $N, M > K$ vale la desigualdad

$$|a_{N+1} + a_{N+2} + a + \cdots + a_M| < \varepsilon$$

El texto se refiere literalmente a cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas. Para Euler, se puede determinar si la sucesión $a_1, a_2, a_3, \cdots$ de términos produce una suma definida cuando, por una parte, es finita la suma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N$$

para un número infinito N y por otra parte, si la suma se continua hasta otro número infinito M, entonces

$$a_{N+1} + a_{N+2} + a + \cdots + a_M$$

es un infinitesimal. Por ejemplo, para verificar que

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

tiene una suma definida, podemos ver que, para cualquier N

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^2} &< 1 + \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{j^2 - 1/4} = 1 + \sum_{j=2}^{N} \left(\frac{1}{j - 1/2} - \frac{1}{j + 1/2} \right) = \\ &= 1 + \frac{5}{3} - \frac{1}{N + 1/2} < \frac{5}{3}\end{aligned}$$

lo cual muestra que las sumas parciales son finitas. Por otra parte, si consideramos N y M infinitos

$$\sum_{N}^{M} \frac{1}{j^2} < \sum_{N}^{M} \frac{1}{j^2 - 1/4} = \frac{1}{N - 1/2} - \frac{1}{M + 1/2}$$

pero $\frac{1}{N-1/2} - \frac{1}{M+1/2}$ es infinitesimal. Entonces $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ tiene una suma definida. Nótese que como $1/j! < 1/j^2$ para $j > 3$, entonces la serie

$$1 + 1 + \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{3!} + \cdots$$

tiene un suma definida. Con un poco de trabajo adicional podemos verificar que para cualquier x finito

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

tiene una suma definida.

4 Euler no escribía sinsentido.

Euler utilizaba entonces una aritmética de infinitos e infinitesimales y algunos nacientes criterios de convergencia, diferente del modelo de convergencia basado en límites que usamos en la actualidad, y sus argumentos son algo más que ejemplos de buena heurística. Inclusive ejemplos de series divergentes que aparecen en pasos intermedios de argumentos Eulerianos, o a los que Euler asociaba algún valor conviene interpretarlos cuidadosamente en términos de infinitos e infinitesimales, y no descartarlos apresuradamente como sin sentido. Consideremos por ejemplo la suma

$$\sum_{j=0}^{\infty} (\varepsilon - 1)^j$$

donde ε es un infinitesimal y por lo tanto cada término es infinitesimalmente próximo a 1 o a -1. Dicha suma es igual a $\frac{1}{2-\varepsilon}$ que está infinitesimalmente próximo a $\frac{1}{2}$. La serie $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ no converge, pero cabe dudar si

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

es mero sin sentido o puede referirse a la primera suma, sobre todo teniendo en cuenta la práctica Euleriana de tratar a los infinitesimales como ceros en relación a los números finitos, y no indicar en la notación cuando el símbolo de igualdad se refiere a una identidad estricta y cuando equipara cantidades que difieren en un infinitesimal.

Con el surgimiento del análisis no estándard, que proporciona extensiones de los reales que admiten elementos infinitamente grandes e infinitesimales, algunos autores (ver por ejemplo Kanovian 1988, Laugwitz 1987, 1988-89, Mc Kinzey y Tuckey 1996) han emprendido reconstrucciones rigurosas desde la perspectiva contemporánea, de numerosas demostraciones Eulerianas, siguiendo la estructura de los argumentos originales. Si bien dichos autores están conscientes de que no pueden atribuir retrospectivamente a Euler ideas del análisis no standard, sus reconstrucciones han permitido revalorar argumentos Eulerianos no sólo como ejemplos de atrevida heurística, sino como instancias de un núcleo de sólido razonamiento matemático, que puede encontrar adecuada expresion dentro de los paradigmas de rigor de diferentes épocas. A más de dos siglos de su muerte, sigue vigente la recomendación de Lagrange: Lean a Euler, lean a Euler. Es el maestro de todos nosotros.

Referencias

[1] L. Euler, De progressionibus harmonicus observationes. *Commentarii Academiae Scientarium Petropolitanae*, 9, 1734., en Opera Omnia, serie 1, vol. 14.

[2] L. Euler, *Introductio in Analysin Infinitorum.* Lausana, 1748. traducido del latín por J. D. Blanton como *Introduction to Analysis of the Infinite*, Springer Verlag, 1988.

[3] V. G. Kanovei, The correctness of Euler´s method for the factorization of the sine function into an infinite product. *Russian Mathematical Surveys*, 34 (4), (1988), 65–94.

[4] D. L. Laugwitz, Hidden lemmas in the early history of infinite series. *Aequationes Mathematicae*, 34, (1987), 264–276.

[5] D. L. Laugwitz, Definite values of infinite sums: aspects of the foundations of infinitesimal analysis around 1820. *Archive for the History of Exact Sciences*, 39, (1988-89), 195–245.

[6] M. Mc Kinzie and C. Tuckey, Hidden lemmas in Euler´s summation of the reciprocal of the saquares, *Archive for the History of Exact Sciences*, 51, (1977), 29–57.