Miscelánea Matemática **45** (2007) 33–40 SMM

La condición de frontera de Euler para tubos acústicos abiertos

Antonmaria Minzoni
IIMAS-FENOMEC, UNAM
Circuito Interior
Cd. Universitaria
04510 México, D.F.
México
tim@mym.iimas.unam.mx

Resumen

Revisamos el planteamiento del problema de vibraciones del aire en un tubo acústico, tanto cerrado como abierto por un extremo. Esta formulación se debe a Euler, quien encontró también la condición de frontera apropiada. Veremos también cómo la solución de Euler motiva las ideas modernas de acoplamiento entre modos normales y radiación.

Introducción

El propósito de esta nota es el de poner en perspectiva el trabajo de Euler en un problema especial de Acústica. Este trabajo como la mayoría de los de Euler hace un planteamiento que da origen a una gran cantidad de ideas que se desarrollan posteriormente.

En este caso se trata de como explicar la diferencia entre los tonos de los tubos acústicos abiertos en un extremo y los tubos de la misma longitud cerrados en ambos extremos que emiten el sonido por un orificio.

Es claro que en el problema de los tubos cerrados el gas dentro del tubo solo interactua con las paredes del tubo. Por otra parte en el tubo abierto por un extremo el gas interactua con el gas de la atmósfera y el movimiento del gas dentro del tubo provoca ondas sonoras en la atmósfera que a su vez modifican el movimiento del gas en el tubo y como consecuencia los tonos emitidos cambian.

El estudio cuantitativo de este acoplamiento es un problema central en las ciencias naturales y en las matemáticas. Hay que desarrollar las matemáticas para describir la forma en que los modos normales del tubo y la radiación en el medio que lo rodea se acoplan.

El estado del problema hoy en día es fruto de la idea de Euler, generada cuando el conocimiento de las ecuaciones diferenciales y sus soluciones era incipiente. Esto nos muestra que Euler estaba completamente fuera de época y esta apreciación debe invitarnos a releer con cuidado su trabajo.

La idea que tuvo Euler fue la de introducir una condición de frontera efectiva para tomar en cuenta el efecto del medio que rodea al tubo. Esta idea es la que a la fecha se utiliza para estudiar problemas que van desde el problema de pérdida de masa por radiación de Hawking en los hoyos negros hasta el problema de diseño de puertos para resguardar barcos anclados en bahías de forma compleja. En el medio están todos los problemas que requieren acoplar ya sea en forma analítica o en forma numérica modos normales (sean lineales o no) y radiación.

En esta nota decidí tomar el tratamiento que hace Rayleigh en su libro clásico *The Theory of sound*, que está disponible en ediciones baratas por dos razones. La primera es la cercanía en el tiempo entre Euler y Rayleigh así como la claridad de la exposición (que yo no puedo superar) y la segunda forzar al lector a buscar y leer las partes relevantes del libro de Rayleigh para entender a detalle lo que yo expongo esquemáticamente en esta nota. Esta segunda razón es la más importante ya que el lector joven se dará cuenta del desarrollo de la matemática que usamos hoy en día para entender y resolver problemas matemáticos de gran complejidad tanto de cálculo como conceptual.

Así en esta nota presento una descripción en lenguaje moderno del trabajo de Euler en este sentido. De manera deliberada he omitido muchos detalles tratando de motivar al lector para ir al libro de Rayleigh para entender a fondo la solución. Me he limitado a señalar las ideas importantes para que se pueda apreciar el pensamiento de un matemático que se adelantó siglos a su época.

Planteamiento del problema

El problema es el de estudiar las vibraciones del aire en un tubo acústico cilíndrico. Su área de sección es A y su longitud es l. Las variables eulerianas que describen el comportamiento del gas en el tubo son la densidad $\rho(x,t)$, la presión $p(x,t)$ y la velocidad del gas a lo largo del tubo $u(x,t)$. Es importante notar que el pensar el campo de velocidades como función de la posición y no como la rapidez de cambio de la posición de una partícula del fluido se debe a Euler. Tenemos así que si $\dot{x}(t)$ es la velocidad de una partícula, $\dot{x}(t) = u(x(t),t)$, es la ecuación que al resolverla nos da la trayectoria de la partícula. Esta idea básica de cinemática es la que permite formular de manera precisa y fácilmente interpretable todas las teorías matemáticas de sistemas con infinitos grados de libertad.

El gas en el tubo satisface la conservación de la masa. Es decir, la masa M al tiempo t en la región $a \leq \xi \leq x$ del tubo estdáda por

$$A \int_a^x \rho(\xi,t)d\xi = M(x,t) \tag{1}$$

y tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} &= \text{cantidad de masa que fluye por la posición } x \\ &= -A\rho u(x,t), \end{aligned} \tag{2}$$

ya que Au es el volumen de gas que atraviesa por segundo el tubo en la posición x. Derivando ambos miembros de (1) tenemos que

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0 \quad 0 \leq x \leq l.$$

También el momento se conserva. Es decir, si $P(t)$ es el momento lineal de una partícula en la posición $x(t)$ tenemos que

$$P(t) = \rho(x(t),t)u(x(t),t)$$

y

$$\frac{dP(t)}{dt} = \quad \text{fuerzas que actúan sobre la partícula} \tag{3}$$

La ecuación (3) es la segunda ley de Newton. Derivando con la regla de la cadena, que para este contexto fue encontrada por Euler, tenemos que

$$\frac{dP(t)}{dt} = (\rho_t + \rho_x \dot{x})u + \rho(u_t + u_x \dot{x})$$

y usando la ecuación de conservación de masa y $\dot{x} = u$ obtenemos

$$\rho(x(t), t)u_t(x(t), t) = \text{fuerzas que actúan sobre la partícula.} \tag{4}$$

Quisiera hacer notar al lector que este cálculo que hoy en día es de principios de la carrera tuvo que ser inventado por Euler para plantear el problema. Hay ahora dos tipos de fuerza que actuan sobre el gas. Una es la fuerza interna, debida a la compresibilidad del gas, y otras son las fuerzas externas que son necesarias para poner el gas en movimiento que dependen del tipo de experimento que se lleve a cabo.

Dado que el peso del gas es despreciable comparado con los cambios de presión la fuerza que actúa es sólo la interna que es la diferencia de presión, dada por $-p_x(x, t)$. Asi el movimiento del gas está descrito por las ecuaciones

$$\begin{aligned} &\rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ &\rho u_t + p_x = g(x, t) \quad 0 \leq x \leq l \end{aligned} \tag{5}$$

donde $g(x, t)$ es conocida y es la fuerza externa. Las ecuaciones (5) se cierran con la ecuación de estado, que depende del gas la cual liga a la densidad ρ con la presión P. Esto nos da $p = F(\rho), F'(\rho) > 0$. Es decir a más densidad hay más presión. Además para resolver resolver (5) necesitamos condiciones de frontera.

En ese momento el concepto de condición de frontera no era claro. Lo que se sabia es que las soluciones a una ecuación parcial involucraban no solo constantes arbitrarias sino funciones arbitrarias. Lo que era menos claro era como se relacionaban ellas con las condiciones iniciales y de comportamiento de la solución en la frontera. Es decir tanto la física como las matemáticas del problema no se entendían.

El trabajo de Euler resuelve la situación y asi tenemos un ejemplo de cómo un matemático pudo hacer una contribución tanto a las matemáticas como a la física en un contexto donde no se conocían a fondo ni la una ni la otra y mucho menos su relación.

Para encontrar las condiciones de frontera consistentes con la física suponemos que el gas está originalmente en equilibrio. Es decir no se mueve, de modo que $u = 0$, y está a la presión atmosférica $p = p_0$. La densidad es ρ_0, $F(\rho_0) = p_0$. Como las perturbaciones acústicas son pequeñas tomamos u pequeño y $p = p_0 + \varphi$, que desarrollando $F(\rho_0 + \tilde{\rho}) = p_0 + \varphi$ implica que la perturbación en la densidad es una función lineal de la perturbación en la presión, de la forma $\tilde{\rho} = \varphi / F'(\rho_0)$. De

(5) obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{F_0'}\varphi_t + \rho_0 u_x &= 0 \\
\rho_0 u_t + F_0'\varphi_x &= g
\end{aligned} \tag{6}
$$

donde g representa la perturbación del estado de presión constante p_0 y $F'(\rho_0) = F_0'$. Podemos eliminar a u y obtener así:

$$
\varphi_{tt} - F_0'^2\varphi_{xx} = F_0' g_x \tag{7}
$$

que es la ecuación de Dálembert, con una velocidad de propagación que solo depende de la ecuación de estado. El forzamiento está dado en términos de g, que es la presión externa aplicada.

Para resolver el problema sse debe especificar el estado del gas al inicio de los experimentos y su comportamiento en los extremos del tubo.

Las condiciones de frontera y sus consecuencias

La explicación del razonamiento de Euler para encontrar las condiciones de frontera la tomamos del libro *The Theory of Sound* de Rayleigh, limitándonos a exponer las líneas generales de la argumentación.

La ecuación (7) es la ecuación para la presión, cuyas soluciones se estaban empezando a estudiar por DÁlembert; en esos momentos aún no existia una idea precisa de lo que son las condiciones de frontera como las entendemos hoy. Sin embargo veremos que el razonamiento de Euler da una comprensión del fenómeno así como de las limitaciones de la formulación matemática.

Cuando el tubo es cerrado el fluido choca con la pared y se refleja. La pared es un punto de estancamiento. Considerando válida la conservación del momento en la pared se tiene

$$
\rho_0 u_t(l,t) + F_0'\varphi_x(l,t) = 0
$$

Como $u(l,t) = 0$ de esta ecuación se tiene que $\varphi_x(l,t) = 0$. Si el tubo es cerrado en ambos extremos tenemos que el problema para las oscilaciones libres del aire en el tubo es:

$$
\begin{aligned}
F_0'^{-2}\varphi_{tt} - \varphi_{xx} &= 0 \\
\varphi_x(0,t) = \varphi_x(l,t) &= 0\,.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Las oscilaciones libres tienen por definición una sola frecuencia ω y son de la forma

$$\varphi(x,t) = B(x)\cos\omega t$$

donde la forma del modo de vibración del aire con nodos fijos lo determina la ecuación

$$\begin{aligned} B'' + \frac{\omega^2}{c^2}B &= 0 \qquad 0 \le x \le l \\ B'(0) = B'(l) &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

donde $c = F_0'$, que tiene como soluciones

$$B(x) = \cos\omega x \qquad \text{si} \qquad \omega = n\pi c \quad n = 1, 2, ... \tag{10}$$

Es decir las oscilaciones libres del tubo cerrado tienen frecuencias naturales $\omega_n = n\pi c$. Es importante notar que es el comportamiento del aire en los extremos del tubo el que determina la posición de los nodos de la vibración dentro del tubo y por ende la frecuencia emitida por el mismo. De aquí que ¡¡es crucial el tener la condición de frontera apropiada para determinar correctamente los modos de vibración!!

Para estudiar el caso de un tubo abierto en el extremo derecho presentamos el argumento de Euler , que es típico de la época, que usa la ecuación (9) también en la frontera Euler observa que la ecuación (9) tiene soluciones de la forma

$$B(x) = \operatorname{sen}\frac{\omega}{c}x \tag{11}$$

Cuando $B(x) = 0$ la presión en el punto x del tubo es igual a la presión del ambiente. Este es el caso cuando el área A del tubo es pequeña ya que el movimiento del gas adentro del tubo afecta poco el aire que lo rodea. Dado que esta aproximación es de equilibrio, necesitamos que la longitud de onda sea grande comparada con el tamaño del radio del tubo.

Tenemos que para un tubo abierto la condición de frontera para la amplitud es $B(0) = B(l) = 0$ siempre, que la abertura del tubo sea pequeña comparada con la longitud de onda.

Con esta condición de frontera, que completa la teoría, se puede resolver el problema de la excitación de un modo normal, ajustando la frecuencia ω de la oscilación en el extremo $x = 0$ del tubo cuando éste está abierto en $x = l$. Es decir resolvemos

$$\varphi_{tt} - F_0'^2\varphi_{xx} = 0 \quad 0 \le x \le l \tag{12}$$

$$\varphi(0,t) = a\cos\omega t, \qquad \varphi(l,t) = 0.$$

La solución es

$$\varphi(x,t) = a\cos\omega t\cos\omega x \qquad \text{siempre que}$$

$$\omega = \omega_n = \frac{c}{2l}\pi(2n+1)\,. \tag{13}$$

Al comparar las predicciones de la ecuación (13) con los experimentos (ver Rayleigh) se ve que son muy buenas cuando $\sqrt{A}(2n+1)\pi c/2l << 1$.

Esta fórmula comienza a tener desviaciones respecto al experimento cuando el área A del tubo aumenta. De hecho cuando A crece ω_n disminuye. La ecuación (13) no captura este comportamiento.

El argumento de Euler basado en esta observación es el siguiente: El aire que se mueve en el tubo mueve en la abertura la masa de aire atmosférico que está en contacto con el tubo. Esta masa al moverse afecta el movimiento del gas en el tubo. El resultado neto es que la frecuencia baja ya que la cantidad de aire que se mueve es más grande. El resultado se puede describir en términos de un aumento de l.

Por otra parte a medida que A crece se mueve más aire en la atmósfera. Si este se movimeinto se refleja en un aumento de la longitud del tubo este aumento tiene que ser por razones dimensionanales proporcional a $\sqrt{A}$. Asi Euler dice que el movimiento del tubo abierto es equivalente al movimiento en un tubo con longitud $l+\beta\sqrt{A}$ donde β es un parámetro de proporcionalidad.

Así que para un tubo cilíndrico abierto las frecuencias están determinadas por la ecuación (13) con l substituido por la longitud efectiva $l+\beta\sqrt{A}$. El parámetro β fue ajustado para un caso y la fórmula (13) con l substituida por $l+\beta\sqrt{A}$ fue comparada con los experimentos. Esto dio resultados de una exactitud sorprendente.

La determinación analítica de β tardó muchos años. Fue Helmholtz quien lo calculó. El argumento esta descrito en todo detalle en el libro *The Theory of Sound*. El seguirlo requiere de la lectura de material contenido a lo largo del libro. Dado que esta es una reseña histórica solo me limitaré e indicaré el argumento en forma esquemática.

Se resuelve la ecuación de ondas en el exterior del tubo con una fuerte incógnita en la abertura. En el interior del tubo se usa la solución de Euler, con la frecuencia de resonancia como una incógnita. Se balancea luego el flujo de masa y de momento a través de la boca del tubo cuando el área de la boca es pequeña. Este balance da la frecuencia de resonancia y recobra desde luego el resultado de Euler determinando β.

En términos modernos β se determina usando una condición de solubilidad que es la de evitar la resonancia sobre el espectro continuo del operador cuyos cuasimodos son la solución de Euler acoplado con una onda esférica radiada por la boca del tubo.

Esta misma idea se usa en el contexto de electromagnetismo y de mecánica cuántica balanceando las cantidades conservadas apropiadas entre las región cerrada y lo que incluye la radiación. Este procedimiento provee a la fecha la única forma de acoplar regiones con aberturas pequeñas a regiones de radiación.

Terminamos señalando que la versión débilmente no lineal (ondas de choque débiles) aún no está completamente entendida y presenta dificultades teóricas y numéricas que aún no han sido superadas. En este caso la interacción del choque con las ondas emitidas en la atmósfera aún no puede describirse en términos aproximados. Este es uno de los problemas que hoy son de interés, por ejemplo el determinar formas óptimas de los escapes de gases de gases quemados para disminuir el ruido generado por motores de aviones al aterrizar.

Conclusión

Espero que esta nota haya logrado el propósito de destacar como una idea de Euler, que es poco comentada, originó el único planteamiento analítico que existe a la fecha para acoplar modos normales y radiación en una gran variedad de sistemas. Posiblemente se necesite de otro Euler para que se aclaren las dificultades en el problema no lineal.

Referencias

[1] J.W.S. Rayleigh, *Theory of Sound.* Vol. 2, Dover Publ. Co. 1986.