

DOI: <https://doi.org/10.47234/mm.8301>

# Diseños de bloques (simétricos y transitivos en banderas)

Eugenia O'Reilly Regueiro

Instituto de Matemáticas

UNAM

eugenia@im.unam.mx

## 1. Introducción

En 1850, apareció publicado en la página 48 del *The Lady's and Gentleman's Diary* el siguiente problema:

Fifteen young ladies in a school walk out three abreast for seven days in succession: it is required to arrange them daily so that no two shall walk twice abreast.

Es decir,

quince colegialas caminan formadas de tres en tres durante siete días seguidos: se requiere acomodarlas de tal modo que no haya dos de ellas que caminen en la misma terna en más de una ocasión.

Este es uno de los primeros ejemplos que se conocen de problemas recreativos relacionados con los diseños de bloques, y fue publicado por Thomas Pennyngton Kirkman FRS (1806-1895), matemático y ministro a quien algunos dan crédito por las ternas de Steiner. Sir Ronald Aylmer Fisher FRS (1890-1962) es a quien suele atribuirse la creación de los diseños de bloques por el trabajo experimental que desarrolló en agronomía y estadística, y la manera en la que estos permiten optimizar recursos sin perder información. Jakob Steiner (1796-1863) fue otro matemático a quien la historia atribuye los sistemas de Steiner, que veremos más adelante.

---

*Palabras clave:* Diseños de bloques incompletos balanceados, diseños simétricos, planos proyectivos, biplanos, acciones primitivas de grupos.

## 2. Las colegialas y los BIBDs

Volvamos al problema de las colegialas. Se nos plantea un problema que involucra a 15 niñas. Además, en cada uno de los 7 días de una semana las 15 niñas están formadas en ternas (no ordenadas), por lo que en cada día hay 5 ternas de niñas. Como no puede haber dos niñas en la misma terna más de una vez, queda implícito por esta condición que si existe una solución entonces si consideramos a todas las ternas de todos los días, no hay dos ternas iguales. Es decir, en total habiendo 5 ternas por cada uno de los 7 días de la semana, tenemos  $7 \times 5 = 35$  ternas diferentes de niñas. Ya hemos tomado en cuenta todas las restricciones del problema, y tenemos los siguientes dos conjuntos con sus cardinalidades:

1. *niñas*, de cardinalidad 15, y
2. *ternas de niñas*, de cardinalidad 35.

**Observación 2.1.** Es importante notar que cada elemento de *ternas* es un subconjunto de *niñas*, es decir, *ternas* es un conjunto de subconjuntos de *niñas*, y esto no es casualidad.

Llamemos al conjunto de niñas  $P$  (para después abstraer sus elementos a puntos) y al conjunto de ternas  $\mathcal{B}$  (bloques). Lo que buscamos es lo siguiente:

- un conjunto  $P := \text{niñas}$  y un conjunto de subconjuntos de  $P$ , que denotamos por  $\mathcal{B} := \text{ternas}$ ,
- $v := |P| = 15$  y  $b := |\mathcal{B}| = 35$ ,
- cada terna tiene  $k := 3$  niñas y cada niña está en  $r := 7$  ternas (una por cada día de la semana), y
- cada terna tiene  $\binom{3}{2} = 3$  parejas no ordenadas de niñas, y hay  $35 = 5 \times 7$  ternas, por lo que hay  $3 \times 5 \times 7$  parejas no ordenadas de niñas en todo el arreglo, (todas diferentes, pues no hay parejas repetidas).
- Por otra parte, de 15 niñas se pueden escoger  $\binom{15}{2} = \frac{15 \times 14}{2} = 3 \times 5 \times 7$  parejas no ordenadas distintas.

Entonces se nos pide que toda pareja no ordenada de niñas esté en A LO MÁS una terna, sin embargo por los dos últimos puntos mencionados tenemos que el número posible de parejas que se pueden formar del conjunto de 15 niñas es igual al número de parejas posibles en 35 ternas. Si no se pueden repetir parejas de niñas en el conjunto de ternas, entonces en este conjunto deben aparecer todas las parejas posibles de niñas. Es decir:

- cada pareja de niñas está en *exactamente*  $\lambda := 1$  terna.

Esto ya nos da la pauta para definir un Diseño de Bloques Incompleto Balanceado, (BIBD, por sus siglas en inglés, que suelen ir al revés del castellano).

**Definición 2.2.** Sean  $v, k, \lambda$  enteros positivos tales que  $2 \leq k < v$ . Un  $(v, k, \lambda)$  – BIBD consiste en un conjunto  $P$  de puntos y un conjunto  $\mathcal{B}$  de bloques tales que:

1.  $|P| = v$ , (es muy probable que esta notación se origine en los experimentos de Fisher en agronomía, pues sus «puntos» eran variedades de trigo, y  $v$  denotaría *variety*),
2. cada bloque es un  $k$ -subconjunto de  $P$ , (el que todos los bloques tengan la misma cardinalidad se conoce como *regularidad*), y
3. toda pareja no ordenada de puntos está contenida en exactamente  $\lambda$  bloques (esta condición se conoce como *balance*).

**Observación 2.3.** La desigualdad  $k < v$  implica que los bloques nunca son el conjunto completo de puntos  $P$ , de ahí que el diseño se llame *incompleto*. Además, hemos dicho que  $\mathcal{B}$  es un conjunto, esto implica que no hay bloques repetidos. En este caso, el diseño es *simple*.

Acabamos de dar una definición de un  $(v, k, \lambda)$ -BIBD, y comenzamos este texto con un problema en el que además hay otros dos parámetros: el número de ternas, que denotamos como  $b$ , y el número de ternas en las que está cada niña, que denotamos como  $r$  (a este parámetro se le conoce como número de replicación). No incluimos estos parámetros en la definición porque se deducen a partir de los otros tres, gracias a los siguientes dos lemas.

**Lema 2.4.** Si  $D = (P, \mathcal{B})$  es un  $(v, k, \lambda)$ -BIBD, entonces todo elemento de  $P$  está en el mismo número de bloques.

*Demostración.* Sean  $D = (P, \mathcal{B})$  un  $(v, k, \lambda)$ -BIBD, y  $x \in P$  un punto cualquiera. Denotemos por  $r_x$  al número de bloques que contienen a  $x$ . Ahora contemos de dos maneras diferentes a las parejas ordenadas  $(y, c)$  tales que  $y \in P \setminus \{x\}$ ,  $c \in \mathcal{B}$ , y  $\{x, y\} \subset c$ . Es decir, las parejas ordenadas punto-bloque tales que el punto  $x$  están en el bloque.

Por una parte, por hipótesis,  $x$  está en  $r_x$  bloques, cada uno de los cuáles contiene  $k - 1$  puntos distintos a  $x$ , entonces contamos  $r_x(k - 1)$  parejas.

Por otra parte, hay  $v - 1$  puntos  $y$  distintos a  $x$ , y por ser un BIBD (balance), la pareja  $\{x, y\}$  está contenida en exactamente  $\lambda$  bloques, lo que nos da  $\lambda(v - 1)$  parejas.

Concluimos que  $\lambda(v - 1) = r_x(k - 1)$ , es decir,  $r_x = \frac{\lambda(v-1)}{k-1}$  que no depende de  $x$ .  $\square$

**Lema 2.5.** Sea  $D = (P, \mathcal{B})$  un  $(v, k, \lambda)$ -BIBD, en el que  $|\mathcal{B}| = b$  y cada elemento de  $P$  está en exactamente  $r$  elementos de  $\mathcal{B}$ . Entonces se cumple que:

1.  $\lambda(v - 1) = r(k - 1)$ , y
2.  $vr = bk$

*Demostración.* Sea  $D = (P, \mathcal{B})$  un  $(v, k, \lambda)$ -BIBD, con  $|\mathcal{B}| = b$  y en el que cada punto está en  $r$  bloques.

La primera parte la demostramos en el lema anterior (noten que por ser  $D$  un BIBD se cumple que  $k > 1$  y podemos dividir entre  $k - 1$ ).

Para la segunda parte (que es fácil recordar como «las chaparras y las altas»), también haremos una cuenta doble.

Ahora vamos a contar todas las parejas ordenadas de la forma  $(x, c)$  tales que  $x \in P$ ,  $c \in \mathcal{B}$ , y  $x \in c$ . Es decir, parejas ordenadas punto-bloque con el punto en el bloque. Por una parte, hay  $v$  puntos y cada uno de ellos está en  $r$  bloques (por el lema anterior), entonces tenemos a las chaparras  $vr$ .

Por otra parte, hay  $b$  bloques, y cada uno de ellos contiene a  $k$  puntos (por la regularidad), entonces tenemos a las altas  $bk$ , y concluimos que  $vr = bk$ .  $\square$

Con la definición de  $(v, k, \lambda)$ -BIBD y los lemas que acabamos de demostrar, queda claro que no es necesario incluir los parámetros  $b$  y  $r$ . Sin embargo, a veces se incluyen para ser más explícitos, y en ese caso el diseño se denota como un  $(v, b, r, k, \lambda)$ -BIBD.

Por ejemplo, de existir una solución al problema de las colegialas, sería un  $(15, 35, 7, 3, 1)$ -BIBD. Volveremos a este caso particular más tarde. Ahora veamos algunos ejemplos con parámetros menores.

**Ejemplo 2.6.** Vamos a considerar tres conjuntos en el tetraedro: vértices, aristas, y caras.

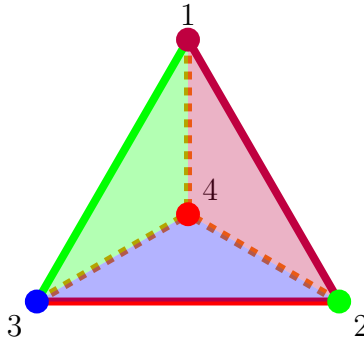


Figura 1. Tetraedro.

Hay algunas parejas de estos conjuntos con las que podemos construir BIBDs, y otras con las que no:

- tomando  $P := \text{vértices}$  y  $\mathcal{B} := \text{aristas}$ , notamos que  $|P| = v = 4$  y  $|\mathcal{B}| = b = 6$ ,
- cada arista tiene  $k = 2$  vértices y cada vértice está en  $r = 3$  aristas, y finalmente
- cada pareja no ordenada de vértices determina exactamente  $\lambda = 1$  arista.

Por lo tanto en este caso, tenemos un  $(4, 6, 3, 2, 1)$ -BIBD.

Es un buen momento ahora para destacar que con estos conjuntos no podemos invertir los papeles, es decir, si tomamos  $P := \text{aristas}$  y  $\mathcal{B} := \text{vértices}$ , algo saldrá mal. Esto será consecuencia de la Desigualdad de Fisher, que veremos pronto. Así pues, con esta suposición:

- $P := \text{aristas}$  y  $\mathcal{B} := \text{vértices}$ , entonces  $|P| = v = 6$  y  $|\mathcal{B}| = b = 4$ ,
- cada vértice está en  $k = 3$  aristas y cada arista tiene  $r = 2$  vértices, y finalmente
- aquí está el problema. Hay parejas de aristas que coinciden en un vértice y «aristas paralelas». Es decir, hay *algunas* parejas de puntos contenidas en exactamente un bloque, y *otras* parejas de puntos que no aparecen en ningún bloque (como pareja), por lo que no hay un único valor de  $\lambda$  y la condición de balance no se cumple.

Esta estructura no da lugar a un BIBD.

Si tomamos a las caras como los puntos y a las aristas como los bloques, nos quedará un  $(4, 6, 3, 2, 1)$ -BIBD como el primero.

Ahora dejemos de lado las aristas, y tomemos los conjuntos de vértices y caras. Dado que ambos tienen la misma cardinalidad, y están, digamos, 3 a 1 en incidencia (cada cara tiene 3 vértices y cada vértice está en 3 caras), una estructura es dual de la otra (donde *dual* se refiere a invertir los papeles de puntos y bloques,  $P$  se convierte en conjunto de bloques y  $\mathcal{B}$  en el de puntos). Para que sea más intuitivo, tomemos a los vértices como los puntos y a las caras como los bloques.

- $P := \text{vértices}$  y  $\mathcal{B} := \text{caras}$ , entonces  $|P| = v = 4 = b = |\mathcal{B}|$ ,
- cada vértice está en  $k = 3$  caras y cada cara tiene  $r = 3$  vértices, y finalmente
- cada pareja no ordenada de vértices está en exactamente  $\lambda = 2$  caras.

Por lo tanto, tenemos un  $(4, 4, 3, 3, 2)$ -BIBD.

Este ejemplo (y su dual) nos motivan a dar la siguiente definición.

**Definición 2.7.** Un  $(v, v, k, k, \lambda)$ -BIBD es *simétrico*.

**Observación 2.8.** Para que un BIBD sea simétrico, basta con la condición  $v = b$  (o  $k = r$ ), pues una se puede deducir de la otra por la igualdad de las chaparras y las altas.

Con esta definición, podemos ver que los vértices y las caras del tetraedro son un ejemplo de un  $(4, 4, 3, 3, 2)$ -BIBD simétrico.

Veamos otro ejemplo.

**Ejemplo 2.9.** En el plano de Fano tenemos 7 puntos y 7 líneas, a las que podemos ver como subconjuntos de puntos.

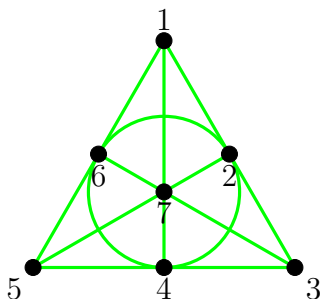


Figura 2.  $PG(2,2)$ .

Tomemos como puntos a los mismos puntos, y como bloques a las líneas, es decir,  $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  y  $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 7\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 6, 7\}\}$ .

Entonces:

- $|P| = v = 7 = b = |\mathcal{B}|$ ,
- cada punto está en exactamente 3 líneas y cada línea tiene exactamente 3 puntos, por lo que  $k = 3 = r$ , y
- cada pareja no ordenada de puntos determina exactamente una línea, por lo que  $\lambda = 1$ .

Es decir, el plano de Fano es un  $(7, 7, 3, 3, 1)$ -BIBD simétrico.

**Ejemplo 2.10.** Ahora construimos otro diseño a partir de una cuadrícula de  $4 \times 4$ :

el conjunto  $P$  de puntos son los números enteros positivos  $\{1, 2, \dots, 16\}$ , los acomodamos en la cuadrícula de izquierda a derecha y de arriba a abajo. Por cada punto  $i \in P$ , construimos un bloque  $B_i$  tomando los puntos que están en la misma fila y la misma columna que  $i$ , excepto el mismo  $i$ . Por ejemplo,  $B_4 = \{1, 2, 3, 8, 12, 16\}$ . De este modo, obtenemos un arreglo de puntos y bloques que son subconjuntos de puntos. Tenemos  $|P| = v = 16$ , y por construcción,  $|\mathcal{B}| = b \leq 16$ . Es necesario verificar que no puede haber bloques iguales para puntos diferentes. Sin embargo esto es inmediato, pues cada bloque corresponde

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Figura 3. Aquí marcamos el bloque  $B_4$ .

a la diferencia simétrica de una única fila y una única columna, siendo la intersección de estas el punto por el cual está indizado el bloque. Si dos bloques son iguales, es porque corresponden a la misma fila y misma columna, por lo que tienen la misma intersección y por lo tanto corresponden al mismo punto, es decir, son el mismo bloque. Concluimos que  $|\mathcal{B}| = b = 16$ .

Por construcción, cada bloque tiene  $k = 6$  puntos, ya que la unión de una fila con una columna tiene cardinalidad 7, pero eliminamos el punto que da lugar al bloque, es decir, la intersección de la fila y columna, quedando así cardinalidad 6. Por otra parte, cada punto está en  $r = 6$  bloques: aquellos indizados por los puntos en su misma fila y su misma columna, salvo el bloque indizado por él mismo. En conclusión,  $k = r = 6$ .

Finalmente, falta ver si cada pareja no ordenada de puntos está en exactamente el mismo número de bloques,  $\lambda$ , y de ser así, cuánto es este valor. Tomemos dos puntos diferentes,  $i, j$ . Será mejor hacer un análisis por casos.

1.  $i, j$  están en la misma fila. En este caso, los puntos están en la misma fila pero en columnas diferentes, por lo que únicamente coinciden en los bloques indizados por los otros dos puntos de la fila en la que están.
2.  $i, j$  están en la misma columna. Este es análogo al caso anterior. Están en la misma columna, pero en filas diferentes, por lo que coinciden solamente en los bloques indizados por los otros dos puntos que están en su misma columna.
3.  $i, j$  no están ni en la misma fila ni en la misma columna. En este caso, la columna de  $i$  intersectará a la fila de  $j$  en un punto  $x$ , y la fila de  $i$  intersectará a la columna de  $j$  en otro punto,  $y$ . Es importante notar que  $x \neq y$ , (no es difícil convencerse viendo la cuadrícula y escogiendo dos puntos que satisfacen la hipótesis). Por lo tanto, los puntos  $i, j$  coinciden en los bloques  $B_x$  y  $B_y$ .

Después de este análisis, concluimos que  $\lambda = 2$  y tenemos un  $(16, 16, 6, 6, 2)$ -BIBD simétrico.

**Definición 2.11.** Aquí juntamos algunas definiciones.

- Los BIBDs simétricos con  $\lambda = 1$  son *planos proyectivos finitos*. Se puede demostrar que las definiciones de un  $(v, k, 1)$ -BIBD simétrico y de un plano proyectivo finito (con la definición geométrica axiomática usual) son equivalentes.
- Los BIBDs simétricos con  $\lambda = 2$  son *biplanos*, y aquellos con  $\lambda = 3$  son llamados *triplanos*.
- Los BIBDs con  $k = 3$  y  $\lambda = 1$  son *sistemas triples de Steiner*. Es fácil demostrar que el único sistema triple de Steiner simétrico es el Plano de Fano, por las condiciones aritméticas en los parámetros dadas en el lema 2.5. Un sistema triple de Steiner con parámetros  $(v, 3, 1)$  también se denota  $STS(v)$ .

### 3. Desigualdad de Fisher

Para que un diseño con ciertos parámetros exista, estos deben cumplir algunas condiciones, como las del lema 2.5. Hasta ahora se conocen condiciones necesarias, pero no suficientes, de manera que podemos descartar la existencia de diseños cuando los parámetros no cumplen con las condiciones necesarias, pero el que los parámetros cumplan dichas condiciones no implica la existencia de un diseño. Esto resulta en que la búsqueda de diseños sea tan difícil.

Antes de enunciar el siguiente teorema, necesitamos la siguiente definición.

**Definición 3.1.** Sea  $D$  un  $(v, k, \lambda)$ -BIBD, con puntos  $P = \{p_1, \dots, p_v\}$  y bloques  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_b\}$ . Una *matriz de incidencia*  $M$  de  $D$  es una matriz de  $v \times b$  cuyos renglones están indizados por los puntos de  $D$  y las columnas por los bloques de  $D$ , tal que:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } p_i \in B_j, \text{ y} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

**Observación 3.2.** La matriz de incidencia que acabamos de definir depende del orden que dimos a los puntos y los bloques del diseño. Es por eso que hablamos de *una* matriz, y no de *la* matriz, pues un cambio en el orden de puntos y/o bloques resulta en una matriz diferente (pero similar, es decir, se puede transformar una en otra por medio de matrices de permutación ya que difieren únicamente en el orden de las filas y/o columnas).

**Teorema 3.3** (Desigualdad de Fisher). *Si  $D$  es un  $(v, k, \lambda)$ -BIBD no trivial con  $b$  bloques, entonces  $v \leq b$ .*

*Demostración.* Sea  $D$  un  $(v, k, \lambda)$ -BIBD no trivial con  $b$  bloques, y tal que cada punto está en exactamente  $r$  bloques. Indizamos los puntos  $P = \{p_1, \dots, p_v\}$ , los bloques  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_b\}$ , y consideramos  $M$  la matriz de incidencia de  $D$  correspondiente, es decir,  $M_{i,j} = 1$  si y solo si  $p_i \in B_j$ . El rango de  $M$  no puede ser mayor a  $b$ , por lo que  $\text{rang}(M) \leq b$ .

Ahora tomamos  $A = MM^t$ . El que cada punto esté en exactamente  $r$  bloques y cada pareja no ordenada de puntos esté en exactamente  $\lambda$  bloques implica que:

$$A_{ij} = \begin{cases} r & \text{si } i = j, \text{ y} \\ \lambda & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Nos fijamos en el determinante de  $A$ :

$$|A| = \begin{vmatrix} r & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \dots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & r \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} r + \lambda(v-1) & r + \lambda(v-1) & r + \lambda(v-1) & \dots & r + \lambda(v-1) \\ \lambda & r & \lambda & \dots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & r \end{vmatrix}.$$

Esto porque al primer renglón de  $A$  le sumamos todos los demás. Después, sacando el factor común del primer renglón y posteriormente restando la primera columna a todas las demás:

$$|A| = (r + \lambda(v-1)) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda & r & \lambda & \dots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & r \end{vmatrix} =$$

$$(r + \lambda(v-1)) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & r - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda & 0 & 0 & \dots & r - \lambda \end{vmatrix} = (r + \lambda(v-1))(r - \lambda)^{v-1}.$$

Como  $v > k \geq 2$  el lemma 2.5 implica que  $r > \lambda$ . Por lo anterior,  $|A| > 0$ , entonces  $\text{rang}A = v$ , pero  $\text{rang}A \leq \text{rang}M \leq b$ , por lo tanto  $v \leq b$ .  $\square$

## 4. Isomorfismos y automorfismos

Es natural que si tenemos dos  $(v, k, \lambda)$ -BIBDs  $D$  y  $D'$  (es decir, con los mismos parámetros) nos preguntemos si existe una manera de transformar uno en el otro, si serán «esencialmente el mismo» salvo quizá por los nombres de los puntos. Esto queda más claro con la siguiente definición.

**Definición 4.1.** Sean  $D = (P, \mathcal{B})$  y  $D' = (P', \mathcal{B}')$  dos  $(v, k, \lambda)$ -BIBDs. Decimos que  $D$  y  $D'$  son *isomorfos* si existe una biyección  $\alpha : P \mapsto P'$  tal que  $\forall p \in P$ , y  $\forall B \in \mathcal{B}$ , se cumple que  $p \in B$  si y solo si  $\alpha(p) \in \alpha[B]$ , (donde si  $B = \{p_1, \dots, p_k\}$ , entonces  $\alpha[B] = \{\alpha(p_1), \dots, \alpha(p_k)\}$ ).

**Observación 4.2.** Cabe aclarar aquí que el dominio de  $\alpha$  es  $P$ , y con la imagen de un bloque nos referimos al conjunto de imágenes de los puntos que contiene. Es decir, si  $B \in \mathcal{B}$  es el bloque que contiene a los puntos  $p_1, \dots, p_k \in P$ , entonces consideramos a  $B = \{p_1, \dots, p_k\}$  y  $\alpha[B] = \alpha[\{p_1, \dots, p_k\}] = \{\alpha(p_1), \dots, \alpha(p_k)\}$ . Así, si  $D = (P, \mathcal{B})$  es isomorfo a  $D' = (P', \mathcal{B}')$  mediante  $\alpha : P \mapsto P'$ , entonces se cumple que  $\forall B \in \mathcal{B}$ ,  $\alpha[B] \in \mathcal{B}'$  y  $\alpha$  induce una biyección de  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$ , preservando a los bloques.

**Ejemplo 4.3.** Recordemos el tetraedro, con sus 4 vértices, 6 aristas, y 4 caras. Para tener un isomorfismo entre dos diseños es necesario que tengan los mismos parámetros, y por la desigualdad de Fisher no podemos tener 6 puntos y 4 bloques (como vimos con aristas y vértices).

Sea  $\Delta = (P, \mathcal{B})$  el  $(4, 2, 1)$ -BIBD cuyos puntos son los vértices  $P = \{1, 2, 3, 4\}$  del tetraedro, y cuyos bloques son las aristas

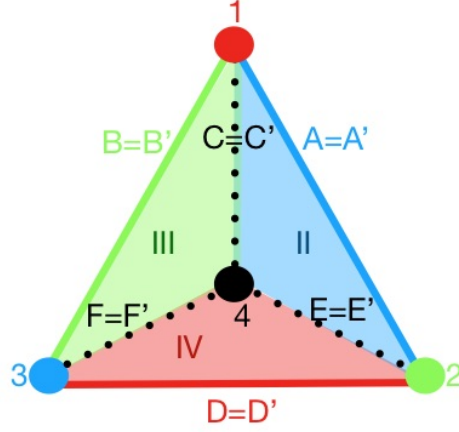
$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}, C = \{1, 4\}, \\ &\quad D = \{2, 3\}, E = \{2, 4\}, F = \{3, 4\}\}. \end{aligned}$$

Con este etiquetado de vértices y aristas, a las caras del tetraedro las etiquetamos con  $I, II, III$  y  $IV$  donde  $I = \{1, 2, 3\}$ ,  $II = \{1, 2, 4\}$ ,  $III = \{1, 3, 4\}$ , y  $IV = \{2, 3, 4\}$ . Quedará más claro haciendo un dibujo y colocando las etiquetas como están indicadas:

La cara I no está indicada en el dibujo pues es el triángulo que nos queda de frente, opuesto al vértice 4.

Ahora, sea  $\Delta' = (P', \mathcal{B}')$  el  $(4, 2, 1)$ -BIBD cuyos puntos son las caras  $P' = \{I, II, III, IV\}$ , y cuyos bloques son las mismas aristas, que ahora quedan etiquetadas  $\mathcal{B}' = \{A' = \{I, II\}, B' = \{I, III\}, C' = \{II, III\}, D' = \{I, IV\}, E' = \{II, IV\}, F' = \{III, IV\}\}$ , es decir, cada arista es el bloque que consiste en la pareja de caras que la contiene en el tetraedro.

Para demostrar que  $\Delta$  y  $\Delta'$  son isomorfos hay que definir una biyección entre  $P = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $P' = \{I, II, III, IV\}$  que mantenga



invariante al conjunto de bloques (aristas). Definamos  $\alpha : P \mapsto P'$  por  $\alpha(1) = I$ ,  $\alpha(2) = II$ ,  $\alpha(3) = III$ , y  $\alpha(4) = IV$ . Es claramente una biyección.

Así definida, las imágenes de los bloques de  $\Delta$  bajo  $\alpha$  son

$$\begin{aligned}\alpha[A] &= \alpha[\{1, 2\}] = \{\alpha(1), \alpha(2)\} = \{I, II\} = A', \\ \alpha[B] &= \alpha[\{1, 3\}] = \{\alpha(1), \alpha(3)\} = \{I, III\} = B', \\ \alpha[C] &= \alpha[\{1, 4\}] = \{\alpha(1), \alpha(4)\} = \{I, IV\} = D', \\ \alpha[D] &= \alpha[\{2, 3\}] = \{\alpha(2), \alpha(3)\} = \{II, III\} = C', \\ \alpha[E] &= \alpha[\{2, 4\}] = \{\alpha(2), \alpha(4)\} = \{II, IV\} = E',\end{aligned}$$

y

$$\alpha[F] = \alpha[\{3, 4\}] = \{\alpha(3), \alpha(4)\} = \{III, IV\} = F,$$

por lo que  $\alpha$  induce una biyección en los bloques, y se cumple que para todo punto  $p \in P$  y para todo bloque  $B \in \mathcal{B}$ ,  $p \in B$  si y solo si  $\alpha(p) \in \alpha[B]$ . Por lo tanto  $\Delta$  y  $\Delta'$  son isomorfos. (Noten la transposición de  $C$  y  $D$  bajo  $\alpha$ .)

A veces se da el caso en el que el isomorfismo no es un mapeo de un diseño a otro sino de un diseño a sí mismo, siendo una biyección entre sus puntos y entre sus bloques. En ese caso se llama *automorfismo*.

**Definición 4.4.** Sean  $D = (P, \mathcal{B})$  un  $(v, k, \lambda)$ -BIBD, y  $\alpha : P \mapsto P$  una biyección tal que  $\forall p \in P$  y  $\forall B \in \mathcal{B}$ ,  $p \in B$  si y solo si  $\alpha(p) \in \alpha[B]$ . Entonces  $\alpha$  es un *automorfismo* de  $D$ .

El objetivo de esta sección es demostrar que el conjunto de automorfismos de un diseño forma un grupo, y que el buscar diseños a través de sus grupos de automorfismos nos brinda ventajas al poder imponer restricciones algebraicas en las estructuras combinatorias.

**Definición 4.5.** Un conjunto no vacío  $G$  con una operación binaria  $\cdot$  en  $G$  es un *grupo* si se cumple lo siguiente:

1. la operación  $\cdot$  es cerrada en  $G$ , es decir,  $\forall a, b \in G, a \cdot b \in G$ ,
2. la operación  $\cdot$  es asociativa, es decir,  $\forall a, b, c \in G, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ ,
3. existe un elemento neutro  $e \in G$  tal que  $\forall g \in G, g \cdot e = e \cdot g = g$ , y
4. todo elemento en  $G$  tiene inverso con respecto a la operación  $\cdot$ , es decir,  $\forall g \in G, \exists f \in G$  tal que  $g \cdot f = f \cdot g = e$ .

**Observación 4.6.** Se puede demostrar a partir de la definición anterior que en un grupo  $G$  el elemento neutro es único, y dado  $g \in G$  su inverso también lo es, por lo que solemos denotarlo  $g^{-1}$ .

Como ejemplos, se puede pensar en los números enteros con la suma y el 0 como neutro, los números reales sin el 0 con la multiplicación y el 1 como neutro, o para cualquier entero positivo  $n$ , los enteros módulo  $n$  con la suma módulo  $n$  y el 0 como neutro (este es un ejemplo finito). No nos detenemos más aquí porque este es un artículo de diseños, no de grupos.

Ahora bien, lo que nos interesa:

**Teorema 4.7.** Sean  $D$  un  $(v, k, \lambda)$ -BIBD y  $A$  el conjunto de sus automorfismos. Entonces  $A$  con la composición de funciones es un grupo.

*Demostración.* Sean  $D = (P, \mathcal{B})$  un  $(v, k, \lambda)$ -BIBD y  $(A, \circ)$  el conjunto de sus automorfismos, con la composición de funciones.

1. Los elementos de  $A$  son automorfismos de  $D$ . La composición de dos automorfismos de  $D$  es claramente otro automorfismo de  $D$ , es decir, otro elemento de  $A$ , por lo tanto la operación es cerrada en  $A$ .
2. Los automorfismos de  $D$  son biyecciones en  $P$ , por lo que cualesquiera dos se pueden componer, y la composición es asociativa.
3. La función identidad  $id : P \mapsto P$  funciona como neutro en este caso.
4. Finalmente, toda biyección tiene inversa, si la biyección es un automorfismo entonces la inversa también lo es.  $\square$

Al grupo de automorfismos de un diseño  $D$  se le denota  $\text{Aut}(D)$ .

Vale la pena aquí definir lo que es un *subgrupo* de un grupo. Recordemos que un grupo es una pareja ordenada que consta de un conjunto y una operación binaria en el conjunto, que cumple ciertas propiedades.

**Definición 4.8.** Sean  $(G, \cdot)$  un grupo, y  $H$  un subconjunto no vacío de  $G$ . Entonces  $(H, \cdot)$  es *subgrupo* de  $(G, \cdot)$  si  $(H, \cdot)$  es un grupo (con el mismo neutro de  $(G, \cdot)$ ).

Básicamente un subgrupo es cualquier subconjunto no vacío que *con la misma operación y el mismo neutro* es también un grupo. Si  $(H, \cdot)$

es subgrupo de  $(G, \cdot)$ , solemos escribir  $H \leq G$ , o  $H < G$  si es subgrupo *propio*, (la contención del subconjunto es propia).

Por ejemplo, los números racionales con la suma y el 0 como neutro son un subgrupo de los números reales con la suma y el 0 como neutro, pero aunque  $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$  es un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}$  y  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$  es un grupo,  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$  NO es un subgrupo de  $(\mathbb{R}, +)$ .

**Ejemplo 4.9.** Volvamos al tetraedro, con los vértices como puntos  $P = \{1, 2, 3, 4\}$ , y las aristas como bloques, de modo que

$$\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}.$$

Si tomamos la transposición que intercambia al 1 y al 2,  $\tau = (12)$ , claramente  $\tau : P \mapsto P$  es una biyección. Además,  $\tau$  induce las siguientes permutaciones de bloques:  $\{1, 2\}$  se queda fijo,  $\{1, 3\} \leftrightarrow \{2, 3\}$ ,  $\{1, 4\} \leftrightarrow \{2, 4\}$ , y  $\{3, 4\}$  se queda fijo. Queda claro que  $\tau$  induce una biyección en  $\mathcal{B}$ , y por construcción  $p \in \mathcal{B}$  si y solo si  $\tau(p) \in \tau[\mathcal{B}]$ . Es fácil verificar que para cualquier permutación  $\tau \in S_4$  (el grupo simétrico, de todas las permutaciones de los 4 vértices) esto se cumple, y por lo tanto  $S_4 \leq \text{Aut}((P, \mathcal{B}))$ . Ahora supongamos que  $\sigma \in \text{Aut}((P, \mathcal{B}))$ . Entonces, en particular,  $\sigma : P \mapsto P$  es una biyección, es decir, es una permutación de los puntos  $\{1, 2, 3, 4\}$ , por lo que  $\sigma \in S_4$ . Concluimos entonces que  $\text{Aut}((P, \mathcal{B})) = S_4$  (bueno, estrictamente, es *isomorfo*).

No siempre es cierto que el grupo simétrico en el conjunto de puntos de un diseño coincide con el grupo de automorfismos. El grupo de automorfismos suele ser un subgrupo bastante menor, pues difícilmente cualquier permutación de los puntos preserva a los bloques.

Como mencionamos después de la definición de grupo, cualquier entero positivo  $n$  nos da un grupo finito, el grupo de las clases de residuos módulo  $n$ , con la suma módulo  $n$ , que solemos denotar simplemente como  $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$ , pues es claro que la operación es la suma módulo  $n$  y que se trata de clases de residuos. A veces se aclara de qué operación se trata, pues cuando  $p$  es primo  $\mathbb{Z}_p$  es campo y por lo tanto  $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$  con la multiplicación módulo  $p$  también es un grupo. Construyamos un ejemplo que ya vimos a partir de  $\mathbb{Z}_7$ .

**Ejemplo 4.10.** Podemos construir el Plano de Fano de la siguiente manera: Los puntos  $P$  son los elementos de  $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , y como primer bloque tomamos los cuadrados diferentes de cero módulo 7:  $\{1, 2, 4\}$ . Los demás bloques los obtenemos de manera cíclica trasladando este primer bloque con la suma módulo 7, de modo que:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 0\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 0, 2\}, \{0, 1, 3\}\} \\ &= \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{0, 4, 5\}, \{1, 5, 6\}, \{0, 2, 6\}, \{0, 1, 3\}\}. \end{aligned}$$

Es fácil verificar que este es en efecto un  $(7, 3, 1)$ -BIBD simétrico. Si ahora, como en el ejemplo anterior, tomamos  $\tau = (12)$ , veremos rápidamente que no es automorfismo del diseño, pues por ejemplo el bloque  $\{2, 3, 5\}$  tiene imagen  $\{1, 3, 5\} \notin \mathcal{B}$ . Sin embargo, recordemos que construimos el diseño generando a los bloques de manera cíclica a partir de un bloque base por medio de las traslaciones módulo 7. Para cualquier elemento  $x \in \mathbb{Z}_7$ , definimos una permutación  $x : P \mapsto P$  dada por:  $x(a) = a + x \pmod{7} \forall a \in P$ . Así definida,  $\forall x \in \mathbb{Z}_7$ ,  $x$  es una biyección de los puntos y por la construcción cíclica de los bloques, también es una biyección de los bloques. Por lo tanto  $x$  es un automorfismo del Plano de Fano, y  $\mathbb{Z}_7$  tiene una imagen isomorfa contenida en el grupo de automorfismos. El grupo de automorfismos de este diseño tiene orden 168, mientras que  $|S_7| = 7! = 5040$ , (para más sobre este grupo de automorfismos véase [4, p. 42] ejercicio 2.4.2).

Así como los elementos de un grupo de automorfismos de un diseño permutan a los puntos y a los bloques del mismo, cuando los elementos de un grupo permutan a los elementos de un conjunto decimos que el grupo *actúa* en el conjunto. Vamos a definir esto.

**Definición 4.11.** Sean  $G$  un grupo y  $X$  un conjunto no vacío. Una *acción* (izquierda) de  $G$  en  $X$  es una función  $\phi : G \times X \mapsto X$  que cumple las siguientes dos condiciones, (denotaremos a  $\phi(g, x)$  por  $g(x)$ , para facilitar la idea de que cada  $g : X \mapsto X$  permuta a los elementos de  $X$ ):

1.  $e(x) = x$  para todo  $x \in X$  (donde  $e \in G$  es el neutro de  $G$ ), y
2.  $g_1(g_2(x)) = (g_1 \circ g_2)(x)$  (donde  $g_1 \circ g_2$  es el producto en  $G$  de  $g_1$  y  $g_2$ ).

Con esta definición, podemos decir que el grupo de automorfismos  $\text{Aut}(D)$  de un diseño  $D$  actúa, por ejemplo, en el conjunto  $P$  de los puntos de  $D$ , y la manera en la que actúa nos brinda información del diseño.

**Definición 4.12.** Sean  $G$  un grupo y  $X$  un conjunto no vacío en el que  $G$  tiene una acción. Decimos que dicha acción de  $G$  en  $X$  es *transitiva* (en  $X$ ) si dados cualesquiera  $x, y \in X$  existe  $g \in G$  tal que  $g(x) = y$ .

**Definición 4.13.** Sean  $G$  un grupo,  $X$  un conjunto (no vacío) en el que actúa  $G$ ,  $g \in G$ , y  $x \in X$ . La *órbita* de  $x$  dada por  $g$  es el conjunto  $\{g^i(x) | i \in \mathbb{Z}\}$ , es decir, el conjunto de todas las imágenes de  $x$  bajo aplicaciones sucesivas de  $g$ . Además, la *órbita* de  $x$  bajo la acción de todo el grupo  $G$  es el conjunto  $\{g(x) | g \in G\}$ , es decir, todos los elementos a los que se puede llegar a partir de  $x$  con la acción de  $G$ . De este modo, si la acción de  $G$  en  $X$  es transitiva,  $X$  tiene una sola órbita que es el mismo  $X$ .

**Observación 4.14.** Las órbitas de un conjunto dadas por la acción de un grupo forman una partición del conjunto.

**Ejemplo 4.15.** Volvamos al tetraedro, que es tan fácil de ver, considerando a los puntos  $P$  como los vértices y a los bloques  $\mathcal{B}$  como las caras. Entonces la acción del grupo de automorfismos  $S_4$  en  $P$  es transitiva, pues dados cualesquiera dos puntos hay (al menos) una permutación que lleva uno al otro. Por otra parte, si tomamos el subgrupo  $\langle(123)\rangle \leq S_4$  actuando en  $P$ , esta acción no es transitiva ya que el punto 4 está fijo. (Es transitiva en los puntos  $\{1, 2, 3\}$ .) Es decir, tiene dos órbitas en  $P$ :  $\{1, 2, 3\}$ , y  $\{4\}$ . Ya que estamos aquí, ¿cómo será la acción de estos mismos dos grupos en el conjunto  $\mathcal{B}$  de bloques? Es fácil ver que  $S_4$  también es transitivo en los bloques. Por ejemplo, para llevar el bloque  $\{1, 2, 3\}$  al bloque  $\{2, 3, 4\}$  podemos usar la permutación  $(1234) \in S_4$ . Ahora, como acabamos de mencionar, el grupo  $\langle(123)\rangle$  fija al punto 4, de modo que este grupo permuta a los bloques  $\{1, 2, 4\}$ ,  $\{1, 3, 4\}$ , y  $\{2, 3, 4\}$  entre sí de manera transitiva, y fija al bloque  $\{1, 2, 3\}$ . Es decir, tiene dos órbitas en el conjunto de bloques,  $\{\{1, 2, 3\}\}$ , y  $\{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ .

**Definición 4.16.** Sea  $D = (P, \mathcal{B})$  un  $(v, k, \lambda)$ -BIBD. Una *bandera* de  $D$  es una pareja ordenada  $(p, B)$  tal que  $p \in P$ ,  $B \in \mathcal{B}$ , y  $p \in B$ . Es decir, una pareja ordenada punto-bloque con el punto en el bloque.

**Observación 4.17.** Notemos que en un  $(v, k, \lambda)$  diseño  $D = (P, \mathcal{B})$ , un grupo  $G \leq \text{Aut}(D)$  no solo actúa en  $P$ , también actúa en  $\mathcal{B}$ , y en el conjunto de banderas de  $D$ , ya que al permutar puntos y bloques, necesariamente permuta a las parejas ordenadas punto-bloque. La acción en las banderas dependerá de la acción en los puntos y los bloques, por ejemplo, si el grupo no actúa de manera transitiva en los puntos, entonces no puede actuar de manera transitiva en las banderas.

Esto nos lleva a la siguiente definición.

**Definición 4.18.** Sean  $D = (P, \mathcal{B})$  un  $(v, k, \lambda)$ -BIBD y  $G \leq \text{Aut}(D)$ . Entonces  $G$  es *transitivo en banderas* si su acción en el conjunto de banderas de  $D$  es transitiva.

Al fin tenemos definidos todos los términos del título de este artículo. Daremos unas pocas definiciones adicionales, para después terminar con una sección mencionando algunos ejemplos clasificados gracias a estas definiciones, a partir de las acciones de los grupos en los diferentes conjuntos del diseño.

**Definición 4.19.** Sean  $G$  un grupo y  $X$  un conjunto tales que  $G$  tiene una acción transitiva en  $X$ . Entonces la acción de  $G$  en  $X$  es *primitiva* si no existe una partición no trivial de  $X$  invariante bajo la acción de

$G$ . Si  $G$  preserva una partición no trivial en su acción en  $X$  entonces esta acción es *imprimitiva*.

Veamos un ejemplo, pues en un principio la transitividad y la primitividad pueden ser confusas.

**Ejemplo 4.20.** Consideremos al grupo  $S_4$  y al conjunto  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ . Si denotamos a los elementos de  $S_4$  como productos de ciclos disjuntos (y  $e = (1)(2)(3)(4)$  la identidad que fija a todos), podemos denotar a  $S_4$  como el conjunto  $\{e, (a, b), (a, b)(c, d), (a, b, c), (a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in X, \text{diferentes 2 a 2}\}$ , entonces la acción canónica de  $S_4$  en  $X$  consiste en que cada permutación de  $S_4$  permuta a los elementos de  $X$  de acuerdo al producto de ciclos por el que está dada. De este modo, la acción es transitiva y primitiva en  $X$ , pues no importa qué partición no trivial se nos ocurra en  $X$ , podemos encontrar algún elemento de  $S_4$  que la rompa. Por ejemplo, tomemos la partición  $\{1, 2\}, \{3, 4\}$  de  $X$ . Entonces el elemento  $(1, 2, 3) \in S_4$  no la preserva. Ahora consideremos al grupo de Klein,  $V_4 < S_4$ , donde  $V_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ . Claramente es transitivo en  $X$ . Se dejan las siguientes preguntas como ejercicios. ¿Preserva la partición dada? ¿Preserva alguna (otra) partición no trivial de  $X$ ? ¿Es primitivo o imprimitivo en  $X$ ?

Cuando un grupo  $G$  tiene una acción imprimitiva en un conjunto  $X$ , los elementos de la (no necesariamente única) partición de  $X$  que se preservan bajo la acción de  $G$  se denominan *bloques de imprimitividad*. Esto a veces se presta a confusión con los bloques de los diseños, pues no son los mismos bloques, por lo que no entraremos en eso.

En la década de los 80 del siglo pasado, utilizando la clasificación de los grupos finitos simples, se clasificaron los grupos finitos de permutaciones primitivos con el Teorema de O’Nan-Scott [6]. Ahora daremos algunas definiciones relativas a este teorema que son relevantes en las siguientes secciones, sin embargo no es necesario en este artículo profundizar en ellas. Para quien tenga interés en leer más sobre este tema se puede consultar [4], que es una referencia muy completa de grupos de permutaciones.

**Definición 4.21.** Sea  $G$  un grupo de permutaciones finito. Entonces el *soclo* de  $G$  es el subgrupo  $\text{Soc}(G) = \langle N \mid N \text{ es un subgrupo normal mínimo de } G \rangle$ , es decir, el subgrupo generado por todos los subgrupos normales mínimos de  $G$ .

Si  $G$  es un grupo de permutaciones primitivo en un conjunto finito  $X$  y  $N$  es un subgrupo mínimo normal de  $G$ , entonces  $N$  es transitivo en  $X$ . Si  $G$  es abeliano, entonces tiene un único subgrupo normal mínimo  $N$  y  $\text{Soc}(G)$  es un subgrupo de  $\text{Aut}(N)$ . Si  $G$  no es abeliano, existe

un subgrupo simple no abeliano  $T$  de  $G$  tal que  $\text{Soc}(G)$  es producto directo de copias isomorfas de  $T$ . El Teorema de O’Nan-Scott clasifica a los grupos primitivos finitos de acuerdo a su soclo. Aquí únicamente definimos dos tipos.

**Definición 4.22.** Sean  $G$  un grupo de permutaciones finito con soclo  $\text{Soc}(G) = H$ , actuando de manera primitiva en un conjunto  $X$ .

1. Si  $G$  es de tipo *afín*, entonces existen un primo  $p$  y  $c \in \mathbb{Z}^+$  tales que podemos identificar a  $X$  con el espacio vectorial  $X \cong \mathbb{Z}_p^c$  de tal forma que  $T$  es el grupo (abeliano) de traslaciones en  $G \leq T \rtimes GL(c, p) \leq AGL(c, p)$ , es decir,  $G$  está contenido en el producto semidirecto de las traslaciones y el grupo de transformaciones lineales de  $X$ , el cual es el grupo de transformaciones afines de  $X$ . Además,  $G_x = T \cap GL(c, p)$  es irreducible en  $X$ , (no preserva ningún subespacio no trivial invariante).
2. Si  $G$  es de tipo *casi simple* entonces  $T$  es no abeliano, simple, y  $T \leq G \leq \text{Aut}(T)$  con  $T_x \neq 1$ .

En los incisos anteriores,  $G_x$  y  $T_x$  denotan al estabilizador de  $x$  dentro de  $G$  y  $T$  respectivamente.

## 5. BIBDs simétricos y transitivos en banderas

En esta sección vamos a considerar  $(v, k, \lambda)$ -BIBDs simétricos y transitivos en banderas, esto es, aquellos en los que  $v = b$  y cuyo grupo de automorfismos actúa de manera transitiva en el conjunto de banderas del diseño.

Hay una diferencia muy importante entre los  $(v, k, 1)$ -BIBDs simétricos y los  $(v, k, \lambda)$ -BIBDs simétricos con  $\lambda > 1$ , ya que en el primer caso se trata de planos proyectivos finitos y se sabe que hay una infinidad de ellos, mientras que para cualquier valor fijo de  $\lambda > 1$  se conocen pocos ejemplos. Empezando con  $\lambda = 2$ , si  $k > 13$  ¡no se conocen ejemplos! Se conjetura que dado un valor fijo de  $\lambda > 1$ , existe un número finito de  $(v, k, \lambda)$ -BIBDs simétricos.

Si suponemos que  $D$  es un  $(v, k, \lambda)$ -BIBDs simétrico que admite un grupo de automorfismos  $G$  actuando transitivamente en las banderas, entonces, como vimos,  $G$  en particular es trantisitivo en los puntos, y esta acción puede ser primitiva o imprimitiva.

Si la acción es imprimitiva, entonces  $k$  está acotada por una función de  $\lambda$  [3]. Esto, para un valor fijo de  $\lambda$  limita las posibilidades, y el estudio de estos diseños lleva ciertas estrategias.

Por otro lado, si la acción es primitiva, entonces se suele apelar a la clasificación dada por el Teorema de O’Nan-Scott (hay diferentes

versiones con mayor o menor refinamiento). En este caso, se suele intentar descartar algún o algunos de los tipos de grupos primitivos para demostrar que  $G$  tiene posibilidades limitadas.

En 1988, Buekenhout, Delandtsheer, y Doyen [1] demostraron que si  $D$  es un  $(v, k, 1)$ -BIBD simétrico con un grupo de automorfismos  $G$  que actúa de manera transitiva en las banderas y primitiva en los puntos, entonces  $G$  es de tipo afín o casi simple (de los tipos del Teorema de O'Nan-Scott). Noten que este resultado es para  $\lambda = 1$ . Este resultado lo extendió la autora a  $\lambda = 2, 3$  en 2005 [8], y a  $\lambda = 4$  [9] en 2010, en ese mismo año lo hicieron de manera independiente Dong, Fang, y Zhou [5] para  $\lambda = 4$ , en 2013 Tian y Zhou para toda  $\lambda \leq 100$  [10], y en ese mismo artículo conjeturaron que el resultado se cumple para todo valor de  $\lambda$ , es decir:

**Conjetura 1.** [10] *Si  $D$  es un  $(v, k, \lambda)$ -BIBD simétrico y  $G \leq \text{Aut}(D)$  es transitivo en las banderas de  $D$  y primitivo en los puntos de  $D$ , entonces  $G$  es de tipo afín o casi simple.*

Esta conjetura sigue abierta. Se han demostrado resultados parciales imponiendo condiciones adicionales en los parámetros. La conjetura es cierta en los siguientes casos:

- $\text{mcd}(k, \lambda) = 1$  [13], 1988.
- $\lambda \geq \text{mcd}(k, \lambda)^2$  [11], 2018.
- $\lambda$  primo [12], 2020.
- $k > \lambda(\lambda - 2)$  [2], 2023.
- $n = k - \lambda$  primo [7], 2024.

## 5.1 Ejemplitos

Terminamos con algunos ejemplos de diseños simétricos que admiten un grupo de automorfismos primitivo en puntos y transitivo en banderas.

**Ejemplo 5.1.** El Plano de Fano, que es el plano proyectivo  $PG(2, 2)$ , con grupo de automorfismos  $PSL(2, 7) \cong PSL(3, 2)$  de tipo casi simple y orden 168. Este diseño es único salvo isomorfismo.

**Ejemplo 5.2.** ¿Recuerdan la cuadrícula de 16 puntos? Ese es un biplano con parámetros  $(16, 6, 2)$ , su grupo de automorfismos es de tipo afín, el estabilizador de un punto es isomorfo a  $S_6$  y el soclo es un grupo abeliano isomorfo al grupo aditivo de  $\mathbb{Z}_2^4$ , como grupo de traslaciones. Tiene orden  $16 \cdot 6! = 11520$ . Con estos parámetros hay exactamente 3 BIBDs no isomorfos, dos de los cuáles admiten grupos transitivos en banderas: el que aquí mostramos que es primitivo en puntos, y otro que es imprimitivo.

**Ejemplo 5.3.** ¡Las colegialas! Hay que construir el espacio proyectivo  $PG(3, 2)$ . Para esto, tomamos un espacio vectorial de dimensión 4 sobre  $GF(2)$ , el campo con 2 elementos. Los *puntos* son los subespacios de dimensión 1, las *líneas* los de dimensión 2, y los *hiperplanos* los de dimensión 3. Hay 15 puntos, 35 líneas, y 15 hiperplanos. Para el BIBD tomaremos a los puntos y a las líneas como bloques. En  $PG(3, 2)$  toda línea tiene 3 puntos, de modo que tenemos las 35 ternas del problema de las colegialas. Además se cumple que cualesquiera dos puntos determinan una línea, es decir, dados dos puntos cualesquiera hay un único bloque que los contiene, y tenemos un  $(15, 3, 1)$ -BIBD con  $b = 35$  y  $r = 7$ . El problema de las colegialas tiene condiciones adicionales que no hemos enfatizado: el diseño debe ser *resoluble*. Esto es, que haya una partición de los bloques en *clases paralelas*, de modo que cada clase paralela sea una partición de los puntos. En este caso la condición es necesaria pues no podemos tener en un mismo día dos ternas en las que está la misma niña. Así, las ternas de un día son una clase paralela y forman una partición de los puntos, hay 7 clases paralelas. Hay 7 soluciones no isomorfas de este problema, dos de ellas dentro del espacio proyectivo  $PG(3, 2)$ . El grupo de automorfismos de este espacio es  $GL(4, 2) \cong A_8$  de orden 20160, las soluciones en este espacio son 240, repartidas en dos clases de equivalencia de 120 cada una, de modo que el grupo de automorfismos de cada solución de este tipo es  $PSL(3, 2)$  de orden  $168 = 20,160/120$ , primitivo en puntos, transitivo en banderas, y tipo casi simple. A continuación enumeramos una solución, con el conjunto de niñas  $P = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O\}$ .

<i>lun</i>	<i>mar</i>	<i>mie</i>	<i>jue</i>	<i>vie</i>	<i>sáb</i>	<i>dom</i>
<i>ABC</i>	<i>ADG</i>	<i>AEO</i>	<i>AIM</i>	<i>AFJ</i>	<i>AHK</i>	<i>ALN</i>
<i>DEF</i>	<i>BEH</i>	<i>BIJ</i>	<i>BDL</i>	<i>BKO</i>	<i>BGN</i>	<i>BFM</i>
<i>GHI</i>	<i>CJM</i>	<i>CDN</i>	<i>CEK</i>	<i>CGL</i>	<i>CFI</i>	<i>CHO</i>
<i>JKL</i>	<i>FKN</i>	<i>FHL</i>	<i>FGO</i>	<i>DHM</i>	<i>DJO</i>	<i>DIK</i>
<i>MNO</i>	<i>ILO</i>	<i>GKM</i>	<i>HJN</i>	<i>EIN</i>	<i>ELM</i>	<i>EGJ</i>

Bueno, ¿qué no hay nada con  $\lambda > 2$ ? Claro que sí, tan grande como queramos. Acabamos de mencionar el espacio proyectivo para ver una solución al problema de las colegialas. En general, los espacios proyectivos dan lugar a BIBDs simétricos.

**Ejemplo 5.4.** Sean  $q$  una potencia de primo,  $n \geq 2$ , y  $\mathbb{F}_q = GF(q)$  el campo con  $q$  elementos. Tomamos  $V := (\mathbb{F}_q)^{n+1}$ , un espacio vectorial de dimensión  $n + 1$  sobre  $\mathbb{F}_q$ , el campo con  $q$  elementos. El espacio proyectivo  $PG(n, q)$  tiene como puntos a los subespacios de dimensión 1, como líneas a los subespacios de dimensión 2, los de dimensión 3 son planos, y los hiperplanos son los de dimensión  $n$ . Para construir un BIBD, tomamos a los puntos, y a los hiperplanos como bloques.

(Noten que este diseño es diferente al de las colegialas.) En este caso, obtenemos un BIBD simétrico, con parámetros:

$$\left( \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \frac{q^n - 1}{q - 1}, \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} \right).$$

El grupo de automorfismos es

$$PGL(n + 1, q) = \text{Aut}(\mathbb{F}_q) \rtimes GL(n + 1, q) / Sc(GL(n + 1, q)),$$

el grupo proyectivo de las transformaciones semilineales del espacio, donde  $Sc(GL(n + 1, q)) < GL(n + 1, q)$  es el subgrupo de matrices escalares, es decir, el núcleo de la acción de  $GL(n + 1, q)$  en el espacio. Este grupo es primitivo en puntos, transitivo en banderas, y de tipo casi simple.

Como un caso pequeño, tomemos  $q = 2$   $n = 3$ . Entonces nuestro espacio vectorial es  $\mathbb{Z}_2^4 = \{(0000), (0001), \dots, (1111)\}$ , que en el espacio euclidiano es el conjunto de los vértices de un hipercubo. Los puntos del diseño son los subespacios de dimensión 1, es decir, todos aquellos generados por un elemento distinto de (0000), por lo que hay 15 puntos. Los bloques son los hiperplanos: los subespacios de dimensión 3. También hay 15, pues por cada subespacio de dimensión 1, hay un hiperplano ortogonal. Finalmente, cualesquiera dos subespacios de dimensión 1 determinan un subespacio de dimensión 2, que está en 3 hiperplanos diferentes, es decir, cualesquiera dos puntos están en 3 bloques, y tenemos un (15, 7, 3)-BIBD simétrico.

Noten que en el mismo espacio proyectivo  $PG(3, 2)$  encontramos un arreglo de colegialas, en el que las ternas son líneas (subespacios de dimensión 2), y un diseño simétrico, en el que los bloques son hiperplanos (de dimensión 3).

### Agradecimiento

La autora agradece las observaciones y sugerencias de las personas revisoras pues contribuyeron sustancialmente a mejorar la calidad y claridad de este artículo.

### Bibliografía

- [1] F. Buekenhout, A. Delandtsheer y J. Doyen, «Finite linear spaces with flag-transitive automorphism groups», *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 49, 1988, 269–293.
- [2] J. Chen, J. Shen y S. Zhou, «Reduction for flag-transitive symmetric designs with  $k > \lambda(\lambda - 2)$ », *Discrete Math.*, vol. 346, núm. 10, 2023, 113557, <https://doi.org/10.1016/j.disc.2023.113557>.
- [3] H. Davies, «Flag-transitivity and primitivity», *Discrete Math.*, vol. 63, núm. 1, 1987, 91–93, [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(87\)90154-3](https://doi.org/10.1016/0012-365X(87)90154-3).

- [4] J. D. Dixon y B. Mortimer, *Permutation groups*, 1.<sup>a</sup> ed., Springer, 1996, <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0731-3>.
- [5] H. Dong, W. Fang y S. Zhou, «Flag-transitive  $2 - (v, k, 4)$ -symmetric designs», *Ars Combin.*, vol. 95, 2010, 333–342.
- [6] M. Liebeck, C. Praeger y J. Saxl, «On the O’Nan-Scott theorem for finite primitive permutation groups», *J. Austral. Math. Soc. (Ser. A)*, vol. 44, 1988, 389–396, <https://doi.org/10.1017/S144678870003216X>.
- [7] Z. Lu y S. Zhou, «Flag-transitive symmetric 2-designs of prime order», *Des. Codes Cryptogr.*, vol. 92, 2024, 259–266, <https://doi.org/10.1007/s10623-023-01307-4>.
- [8] E. O’Reilly-Regueiro, «On primitivity and reduction for flag-transitive symmetric designs», *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 109, 2005, 235–148, <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2004.08.002>.
- [9] ———, «Reduction for primitive flag-transitive  $(v, k, 4)$ -symmetric designs», *Des. Codes Cryptogr.*, vol. 56, 2010, 61–63, <https://doi.org/10.1007/s10623-009-9341-8>.
- [10] D. Tian y S. Zhou, «Flag-transitive point-primitive symmetric  $(v, k, \lambda)$  designs with  $\lambda$  at most 100», *J. Combin. Des.*, vol. 21, 2013, 127–141, <https://doi.org/10.1002/jcd.21337>.
- [11] X. Zhan y S. Zhou, «Flag-transitive automorphism groups of 2-designs with  $\lambda \geq (r, \lambda)^2$  and an application to symmetric designs», *Ars. Math. Contemp.*, vol. 14, 2018, 187–195, <https://doi.org/10.26493/1855-3974.1165.105>.
- [12] Y. Zhang, Z. Zhang y S. Zhou, «Reduction for primitive flag-transitive symmetric  $2 - (v, k, \lambda)$  designs with  $\lambda$  prime», *Discrete Math.*, vol. 343, núm. 6, 2020, 111843, <https://doi.org/10.1016/j.disc.2020.111843>.
- [13] P. H. Zieschang, «Flag-transitive automorphism groups of 2-designs with  $(r, \lambda) = 1$ », *Journal of Algebra*, vol. 118, núm. 2, 1988, 369–375, [https://doi.org/10.1016/0021-8693\(88\)90027-0](https://doi.org/10.1016/0021-8693(88)90027-0).