Miscelánea Matemática **78** (2024) 97-111 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7807

Método para determinar equilibrios de Nash en juegos bimatriciales $m \times 3$

J. Agustín Cano Garcés
Facultad de Ciencias UNAM
jagustin_2001@yahoo.com

1. Introducción

Se presenta un método para encontrar todos los posibles equilibrios de Nash en juegos bimatriciales de dimensión $m \times 3$ o $3 \times n$, es decir, cuando el número de columnas o de renglones de las matrices de pago asociadas sea igual a 3. Este método, aunque algebraico, utiliza la gráfica de pagos esperados para el jugador que dispone de m o de n alternativas, de manera análoga al método gráfico para resolver los llamados juegos rectangulares.

A diferencia de los algoritmos existentes para calcular equilibrios de Nash, el método aquí propuesto no es iterativo, ya que va descubriendo, uno a uno, los pares de estrategias, en general mixtas, que constituyen los citados equilibrios, sin tener que preocuparse con asuntos como la convergencia del proceso. El lector puede consultar bibliografía sobre estos otros enfoques en el artículo [2] y en el libro [3], entre otros.

Este algoritmo es la generalización del correspondiente al caso de 2 renglones o 2 columnas, presentado en un artículo anterior [1]. Así, no es necesario hacer referencia a la teoría de puntos fijos, ni a ningún otro teorema elaborado relacionado con funciones con las características asociadas a la función de pago esperado, $E(x, y)$.

2. Planteamiento del problema

Considérese el juego bimatricial, denotado (A, B), donde A representa la matriz de pagos asociada al jugador I, y B la matriz correspondiente al jugador II, ambas con idéntica dimensión, $m \times 3$, es decir, el jugador I dispone de m estrategias puras, en tanto que el jugador II solo dispone

Palabras clave: Juegos Juegos matriciales Juegos bimatriciales Método gráfico Equilibrios de Nash.

de 3. El otro caso, cuando la dimensión de ambas matrices es $3 \times n$, tiene un análisis completamente análogo.

Recuérdese que un equilibrio de Nash en estrategias puras es un par (i^*, j^*) que satisface

$$A_i^{j^*} \leq A_{i^*}^{j^*} \ \forall \ i = 1, ..., m \ \ , B_{i^*}^{j} \leq B_{i^*}^{j^*} \ \forall \ j = 1, ..., n$$

es decir, i^* es la mejor estrategia contra j^*, y viceversa, j^* es la mejor estrategia contra i^*. En otros términos, cuando el jugador II elige su estrategia pura j^*, al jugador I no le beneficia en nada cambiar de estrategia, es decir, se puede quedar con su elección de i^*; y al mismo tiempo, si el jugador I elige i^*, el otro jugador no tiene incentivo alguno para cambiar respecto a su elección de j^*.

Es bien sabido que algunos juegos no tienen equilibrios de Nash en estrategias puras, o, por el contrario, pueden tener más de uno. Sin embargo, extendiendo la definición a estrategias mixtas, el teorema de Nash presentado en su legendario artículo [4] afirma la existencia de al menos uno para cualquier juego bimatricial.

Presentando los juegos como un arreglo rectangular de parejas de valores, donde la primera componente es el pago que recibe el jugador I, y la segunda es el pago que recibe II, se definen 2 matrices, la de los pagos asociados al jugador I y la correspondiente al jugador II. He aquí algunos ejemplos:

Ejemplo 1. Si

$$\begin{pmatrix} (0,6) & (3,-1) & (4,9) & (12,2) \\ (4,5) & (-1,7) & (10,2) & (6,8) \\ (3,-2) & (10,5) & (-2,3) & (4,1) \end{pmatrix}$$

es la matriz que representa un juego bimatricial dado, las matrices del pago correspondientes a los jugadores I y II son:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 12 \\ 4 & -1 & 10 & 6 \\ 3 & 10 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 9 & 2 \\ 5 & 7 & 2 & 8 \\ -2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

en donde se tiene un equilibrio.

Ejemplo 2.

$$\begin{pmatrix} (6,2) & (-2,-1) & (4,9) \\ (-1,7) & (5,0) & (7,1) \\ (10,-3) & (-1,8) & (0,-1) \\ (5,0) & (13,6) & (2,7) \\ (-4,4) & (11,2) & (1,0) \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & 7 \\ 10 & -1 & 0 \\ 5 & 13 & 2 \\ -4 & 11 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 7 & 0 & 1 \\ -3 & 8 & -1 \\ 0 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en donde no hay ningún equilibrio.

Como el lector podrá verificar, se puede proceder de la siguiente forma para encontrar parejas de estrategias que constituyan equilibrios de Nash: se determina, para la primera columna de A, la ubicación del valor máximo, es decir, en cual renglón se encuentra, y observando la posición correspondiente en B, verificar si el valor ahí encontrado corresponde al máximo del renglón; en caso afirmativo, se ha encontrado un equilibrio. Y se repite el mismo procedimiento para cada una de las columnas de A.

Aplicando lo descrito al primero de los ejemplos, se observa que el máximo para la primera columna de A es 4, ubicado en el segundo renglón, por lo que se va a la posición de primera columna y segundo renglón, pero en B, obteniendo 5, que no corresponde al máximo de ese renglón en B, por lo que ahí no hay equilibrio. Continuando, se descubre que la posición asociada al tercer renglón y segunda columna sí satisface las condiciones, por lo que esa posición representa un equilibrio de Nash, y es la única, considerando solamente estrategias puras.

El segundo ejemplo no posee ningún equilibrio en estrategias puras, como se indica, pero, como se verá más adelante, sí existe al menos uno al considerar estrategias mixtas, por lo que se comienza recordando la definición del conjunto de tales estrategias para un jugador que dispone de q estrategias puras:

$$S_q = \left\{ \nu \in R^q \ \Big| \sum_{k=1}^{q} \nu_k = 1, \ \nu_k \geq 0, \ k = 1, \ldots, q \right\}$$

Cada componente de ν, ν_k, se interpreta como la probabilidad con que debe elegirse la k-ésima estrategia pura. Una vez elegida una estrategia mixta $x \in S_m$ por parte del jugador I, y $y \in S_n$ por parte del jugador II, se pueden calcular los pagos esperados asociados a cada uno de ellos mediante la función de pago esperado

$$E_A(x, y) = x^t \, A \, y$$
$$E_B(x, y) = x^t \, B \, y,$$

por lo que se amplía la definición para los equilibrios de Nash

$$
\begin{gathered}
(x^*, y^*) \text{ equilibrio de Nash} \\
si \\
E_A(x, y^*) \leq E_A(x^*, y^*) \;\forall\; x \in S_m \\
\text{y } E_B(x^*, y) \leq E_B(x^*, y^*) \;\forall\; y \in S_n
\end{gathered}
$$

Con las definiciones anteriores es posible plantear el problema que se desea resolver de la manera siguiente: encontrar una pareja $(x^*, y^*) \in S_m \times S_n$ que satisfaga

$$
\begin{gathered}
\max_{x \in S_m} E_A(x, y^*) = E_A(x^*, y^*) \\
\text{y } \max_{y \in S_n} E_B(x^*, y) = E_B(x^*, y^*)
\end{gathered}
$$

3. Características del problema

Replanteando el problema para el caso $m \times 3$, y utilizando la definición de las funciones de pago esperado, se puede expresar la búsqueda de equilibrios de Nash como el problema de encontrar parejas tales que $(x^*, y^*) \in S_m \times S_3$ tal que:

$$
\max_{x \in S_m} \{x_1(A_1(y^*)) + x_2(A_2(y^*)) + \ldots + x_m(A_m(y^*))\} = (x^*)^t A\,(y^*) \quad (1)
$$

$$
\max_{y \in S_3} \{((x^*)^t B^1) y_1 + ((x^*)^t B^2) y_2 + ((x^*)^t B^3) y_3\} =
$$

$$
\max_{y \in S_3} \{(x^*)^t (B^1 - B^3) y_1 + (x^*)^t (B^2 - B^3) y_2 + (x^*)^t (B^3) = (x^*)^t B\,(y^*)\} \quad (2)
$$

Examinando estas expresiones con atención se pueden obtener guías útiles para encontrar la solución a los problemas planteados para cada uno de los jugadores, ya que la primera, (1), indica que, dada una estrategia mixta y^*, el jugador I deberá seleccionar x^* tal que maximice su pago esperado. Pero la función a maximizar es lineal, y los coeficientes asociados a las variables no son otros que los pagos esperados para I cuando utiliza cada una de sus m estrategias puras, $(A_i(y^*))$ para valores de i desde 1 hasta m.

Es evidente que solamente se necesita determinar el máximo de esas m cantidades, y si

$$
\max_{i=1,\ldots,m} \{(A_i(y^*)\} = (A_k(y^*)) \text{ para un solo índice } k \quad (3)
$$

entonces ***la*** solución será x^* tal que únicamente la componente de índice k vale 1, y el resto de las componentes valen 0. Si el máximo se alcanza en más de un índice, por ejemplo k y q, entonces ***cualquier*** combinación de coeficientes no negativos de las componentes k y q cuya suma sea igual a 1 podrá conformar vectores x^* alternativos, con el resto de sus componentes iguales a cero.

Como hay que resolver este problema para cada valor posible de y^*, y como además y^* queda completamente definido si se proporcionan sus primeras 2 componentes y_1^* y y_2^*, entonces será muy útil una herramienta auxiliar, una gráfica que ayude a visualizar los pagos esperados para cada uno de los renglones de A, en función de estas componentes, obteniendo una superficie poliédrica convexa según el libro [5]:

$$(A_i(y^*)) = A_i^1 y_1^* + A_i^2 y_2^* + A_i^3 y_3^* = (A_i^1 - A_i^3) y_1^* + (A_i^2 - A_i^3) y_2^* + A_i^3$$

La gráfica, compuesta por los m planos, uno para cada renglón de la matriz A , es simple, ya que solamente es necesario visualizar una parte, la que corresponde a valores de y_1^* y y_2^*, desde cero hasta 1. Así, se trata de identificar el plano que se encuentre **por arriba** de los demás, en ese punto, para cada valor posible de las parejas (y_1^*, y_2^*). Para poder visualizar fácilmente ese plano, será de mucha utilidad la **proyección**, sobre el plano $y_1 - y_2$, de la superficie generada por la función

$$F(y^*) = \max_{x \in S_m} \{x_1(A_1(y^*)) + x_2(A_2(y^*)) + \ldots + x_m(A_m(y^*))\} \qquad (4)$$

Para una mejor comprensión, se presenta la gráfica, en el caso del segundo ejemplo, de la función (4), y la proyección de la misma sobre el plano $y_1 - y_2$, donde se visualizan las regiones que corresponden a cada uno de los planos que se encuentran **por arriba** de los demás.

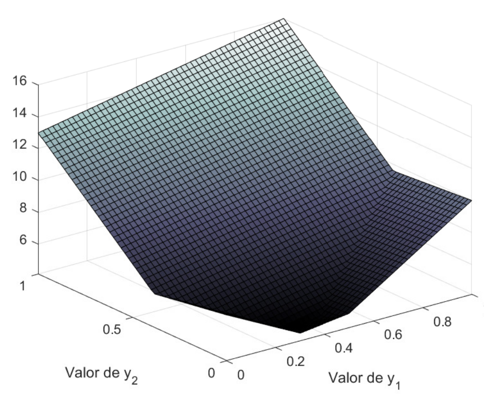

Figura 1. Cazuela de óptimos.

Para la justificación del mismo, se necesita demostrar la serie de teoremas que aparecen a continuación, ya que cada uno de estos se aplica en la búsqueda de equilibrios de Nash, sobre cada una de las

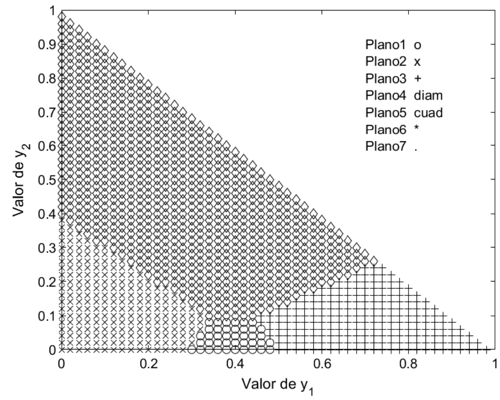

Figura 2. Proyección de la cazuela.

«orillas» y al «interior» del «triángulo» determinado por los vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$.

Teorema 3. *Sea y^* un punto cualquiera perteneciente al interior relativo del segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$ y x^* una solución del problema (1). Entonces, una condición* ***necesaria*** *para que (x^*, y^*) sea equilibrio de Nash es $(x^*)^t(B^1) = (x^*)^t(B^3)$.*

Demostración. Al considerar el problema (2), es evidente que la solución depende de los coeficientes de y_1 y de y_2, y se tienen entonces las siguientes posibilidades:

a) ambos, $(x^*)^t(B^1 - B^3)$ y $(x^*)^t(B^2 - B^3)$ son negativos; entonces la solución óptima sería $(0, 0, 1)$ desechando la y^* propuesta.

b) si $(x^*)^t(B^1 - B^3)$ es negativo, entonces la solución óptima sería $(0, 1, 0)$ en caso de que $(x^*)^t(B^2 - B^3)$ sea positivo, desechando la y^* propuesta, y si $(x^*)^t(B^2 - B^3)$ es igual a 0 la solución óptima sería $(0, y_2, 1-y_2)$ para cualquier valor de y_2 en el intervalo $[0, 1]$, desechando también la y^* propuesta.

c) si $(x^*)^t(B^1 - B^3)$ es positivo, y es el **único** máximo, entonces la solución óptima sería $(1, 0, 0)$ desechando la y^* propuesta; en caso de empate, la solución óptima sería $(y_1, 1 - y_1, 0)$ para cualquier valor de y_1 en el intervalo $[0, 1]$, desechando también la y^* propuesta.

d) si $(x^*)^t(B^1 - B^3)$ es positivo, y no es el máximo, entonces la solución óptima sería $(0, 1, 0)$ desechando la y^* propuesta.

e) si $(x^*)^t(B^1 - B^3) = 0$ y es el **único** máximo, entonces la solución óptima sería $(y_1, 0, 1 - y_1)$ para cualquier valor de y_1 en el intervalo $[0, 1]$, y no se desecharía la y^* propuesta; en caso de empate la solución óptima sería cualquier valor de y en S_3, lo cual implica que tampoco hay interés en cambiar la y^* propuesta; si no es el máximo, entonces la solución óptima sería $(0, 1, 0)$ desechando igualmente la y^* propuesta.

En conclusión, solamente en el caso e) se puede conservar la y^* propuesta, no habiendo ningún beneficio al cambiar. Es decir, se **necesita** que $(x^*)^t(B^1 - B^3) = 0$, lo que es equivalente a $(x^*)^t(B^1) = (x^*)^t(B^3)$. □

El otro teorema equivalente es:

Teorema 4. *Sea y^* un punto cualquiera perteneciente al interior relativo del segmento que une los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$ y x^* una solución del problema (1). Entonces, una condición* ***necesaria*** *para que (x^*, y^*) sea equilibrio de Nash es $(x^*)^t(B^2) = (x^*)^t(B^3)$.*

Demostración. Completamente análoga a la demostración del teorema anterior. □

Por otra parte, se tiene un tercer teorema, ligeramente diferente:

Teorema 5. *Sea y^* un punto cualquiera perteneciente al interior relativo del segmento que une los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$ y x^* una solución del problema (1). Entonces, una condición* ***necesaria*** *para que (x^*, y^*) sea equilibrio de Nash es $(x^*)^t(B^1) = (x^*)^t(B^2)$.*

Demostración. En el inciso c) de la demostración del primer teorema, cuando ambos coeficientes $(x^*)^t(B^1 - B^3)$ y $(x^*)^t(B^2 - B^3)$, son iguales, y no negativos, se argumentó que la solución óptima sería $(y_1, 1 - y_1, 0)$ para cualquier valor de y_1 en el intervalo $[0,1]$, es decir, no se obtiene un mejor pago cambiando la estrategia y^*, por lo que no se desecha. De la igualdad de ambos coeficientes se deduce que $(x^*)^t(B^1) = (x^*)^t(B^2)$. □

Y el último teorema:

Teorema 6. *Sea y^* un punto cualquiera perteneciente al interior relativo del triángulo cuyos vértices son $(1,0)$, $(0,0)$ y $(0,1)$ y sea x^* una solución del problema (1). Entonces, una condición* ***necesaria*** *para que (x^*, y^*) sea equilibrio de Nash es $(x^*)^t(B^1) = (x^*)^t(B^2) = (x^*)^t(B^3)$.*

Demostración. En el inciso e) de la demostración del primer teorema, cuando ambos coeficientes $(x^*)^t(B^1 - B^3)$ y $(x^*)^t(B^2 - B^3)$, son iguales a 0, también se argumentó que la solución óptima sería cualquier y en S_3 es decir, no se obtiene un mejor pago cambiando la estrategia y^*, por lo que no se desecha. De la igualdad de ambos coeficientes y que ambos son nulos,se deduce que $(x^*)^t(B^1) = (x^*)^t(B^2) = (x^*)^t(B^3)$. □

Resumiendo: Dado un valor de y^* y considerando x^* una solución al problema planteado por la expresión (1), esta solución es **única** cuando es uno solo el plano que está **por arriba** de los demás, o existen soluciones **alternativas** cuando el punto **por arriba** de los demás corresponde a la intersección de dos o más planos.

Estos teoremas resaltan la importancia de elegir cuidadosamente x^* cuando es posible asignar más de un valor a dicha estrategia mixta: definir x^* de manera tal que la cantidad $(x^*)^t(B^1 - B^3) = 0$, $(x^*)^t(B^2 - B^3) = 0$, o bien $(x^*)^t(B^1 - B^2) = 0$, dependiendo de la ubicación de la estrategia y^* propuesta.

Lema 7. *Cuando para un valor dado de (y_1^*, y_2^*) el punto* ***por arriba*** *de los demás corresponde a un solo plano, el asociado a un renglón de la matriz A, y suponiendo que sea el k-ésimo, entonces x^* es un vector unitario, con el 1 ubicado en dicha posición. Así, los coeficientes $(x^*)^t(B^1 - B^3)$ y $(x^*)^t(B^2 - B^3)$ se reducen a $B_k^1 - B_k^3$ y $B_k^2 - B_k^3$ respectivamente, y $(x^*)^t(B^1 - B^3) = 0$ se reduce a $B_k^1 = B_k^3$, $(x^*)^t(B^2 - B^3) = 0$ se reduce a $B_k^2 = B_k^3$.*

Lema 8. *Cuando para un valor dado de (y_1^*, y_2^*) el punto* ***por arriba*** *de los demás corresponde a la intersección de 2 planos asociados a renglones de la matriz A, y suponiendo que sean el i-ésimo y el j-ésimo, entonces x^* puede ser un vector con todos sus componentes nulos excepto estos dos. Además la expresión*

$$x^*(B^q - B^r) = x_i^*(B_i^q - B_i^r) + x_j^*(B_j^q - B_j^r)$$

puede interpretarse como una combinación lineal convexa de los valores entre paréntesis, y es un hecho conocido que no se puede obtener el valor 0 si ambos valores tienen el mismo signo, es decir, si los renglones i y j de la submatriz B, formada por las columnas q y r de B, son ambos estrictamente crecientes, o ambos estrictamente decrecientes. Si los valores son de signo opuesto, entonces es posible obtener una estrategia mixta x^* que satisfaga

$$\begin{aligned}
&x_i^*(B_i^q - B_i^r) + x_j^*(B_j^q - B_j^r) = x_i^*(B_i^q - B_i^r) + (1 - x_i^*)(B_j^q - B_j^r) = \\
&x_i^*(B_i^q - B_i^r - B_j^q + B_j^r) + (B_j^q - B_j^r) = 0 \\
&\textit{es decir } x_i^* = \frac{(B_j^r - B_j^q)}{(B_j^r - B_j^q + B_i^q - B_i^r)}, \\
&\quad \textit{donde } \ x_j^* = 1 - x_i^*, \ x_k^* = 0, k \neq i, j
\end{aligned}$$

Si solamente uno de los valores entre paréntesis es cero, digamos el asociado al índice i, entonces se obtiene

$$x_i^* = 1, \ x_k^* = 0, k \neq i$$

Si ambos valores entre paréntesis son cero, entonces ***cualquier*** *estrategia mixta $x^* \in S_m$ satisfará la condición.*

4. Método de solución

El esquema del método, que de manera secuencial va descubriendo los equilibrios de Nash en cualquier juego bimatricial de dimensión $m\times 3$, es muy simple: se inicia con una estrategia y^* que se utiliza como entrada para plantear y resolver el problema asociado a (1), obteniendo x^*, que a su vez sirve de entrada para el problema correspondiente a (2); si la solución a este último es y^*, entonces la pareja (x^*, y^*) constituye un equilibrio de Nash, pero no lo será si para obtener el óptimo se necesita una estrategia mixta diferente a y^*. Seleccionando el siguiente valor de y^* se repite el procedimiento, y así continúa hasta terminar.

¿Cómo se seleccionan los valores de y^*? En párrafos anteriores se mencionó que y^* queda completamente definido si se proporcionan sus primeras 2 componentes y_1^* y y_2^* y que se pueden visualizar, mediante los planos correspondientes, los pagos esperados para cada una de las estrategias puras del jugador I, que corresponden a cada uno de los renglones de A, en función de y_1^* y y_2^*,

$$(A_i(y^*)) = A_i^1 y_1^* + A_i^2 y_2^* + A_i^3 y_3^* = (A_i^1 - A_i^3)y_1^* + (A_i^2 - A_i^3)y_2^* + A_i^3$$

Así, obteniendo la gráfica de la función (4), y la **proyección**, de la superficie generada por esta función, sobre el plano $y_1 - y_2$, únicamente será necesario analizar los puntos (y_1, y_2) en la región triangular determinada por los puntos $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(0, 0)$, ya que esos puntos están en correspondencia 1 a 1 con el conjunto de estrategias mixtas del jugador II.

Algoritmo EquiNash3

(0) Dadas las matrices A y B de un juego bimatricial, se obtiene la gráfica de la función (4), expresión que se repite aquí para mayor claridad

$$F(y^*) = \max_{x\in S_m} \{x_1(A_1(y^*)) + x_2(A_2(y^*)) + \ldots + x_m(A_m(y^*))\}$$

que corresponde a una superficie poliédrica convexa, y también la proyección de esa superficie sobre Δ, indicando las regiones correspondientes a los planos que se encuentran **por arriba** de los demás, donde Δ está definido por

$$\Delta = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2\} \mid y_1 + y_2 \leq 1,\ y_1, y_2 \geq 0 \}$$

(1) Se analiza la posibilidad de existencia de óptimos en cada uno de los vértices de Δ, $(1, 0)$, $(0, 1)$, y $(0, 0)$, denominando i_1, i_2 e i_3 los índices de los renglones de A asociados a los planos que están **por arriba** de los demás en esos puntos, respectivamente. Es decir, la estrategia óptima para el jugador I es x^* definida como $x_{i_k}^* = 1$, $x_j^* = 0$, $j \neq i_k$, $k = 1, 2, 3$ respectivamente para cada uno de los

vértices $(1,0)$, $(0,1)$, y $(0,0)$. Entonces, en cada caso, la expresión (2) se reduce a

$$\max_{y\in S_3}\{(B^1_{i_k}-B^3_{i_k})y_1+(B^2_{i_k}-B^3_{i_k})y_2+(B^3_{i_k})\} \tag{5}$$

Así, una condición **suficiente** para que existan equilibrios de Nash asociados a los vértices en consideración es que $(B^j_{i_j})$ sea el máximo del renglón correspondiente, para $j=1,2,3$.

(2) Analizar los puntos correspondientes a la frontera de Δ, que no sean los vértices.

(a) Sea y^* un punto cualquiera del segmento que une los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$, y x^* una solución del problema (1). De acuerdo al teorema 1, una condición **necesaria** es $(x^*)^t(B^1)=(x^*)^t(B^3)$. Si el punto y^* pertenece **solamente** a una de las regiones de Δ, digamos, la asociada al renglón k, entonces, de acuerdo al lema 7, la condición necesaria se reduce a $(B^1_k=B^3_k)$, y se tendrá un equilibrio de Nash **solamente** cuando $B^1_k=B^3_k\geq\ B^2_k$. Además, TODOS los puntos del segmento TAMBIÉN corresponden a equilibrios de Nash, ya que satisfacen esta condición. En el caso que el punto y^* pertenezca a dos regiones, digamos, las asociadas a los renglones i y j de la matriz A, se deberá encontrar x^* que satisfaga la condición necesaria, la cual, de acuerdo al lema 8, se reduce a

$$x^*_i(B^1_i-B^3_i)+x^*_j(B^1_j-B^3_j)=0$$

Tal como se demostró en el lema 8, **solamente** cuando $(B^1_i-B^3_i)$ y $(B^1_j-B^3_j)$ son de signo opuesto se puede obtener dicha estrategia x^*,

$$\mathrm{x}^*_i=\frac{(B^3_j-B^1_j)}{(B^3_j-B^1_j+B^1_i-B^3_i)},\ x^*_j=1-x^*_i,\ x^*_k=0,k\neq i,j$$

Así, (x^*,y^*) será un equilibrio de Nash, **solamente** cuando

$$x^*(B^1)=x^*(B^3)\geq\ x^*(B^2).$$

(b) Sea y^* un punto cualquiera del segmento que une los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$, y x^* una solución del problema (1). De acuerdo al teorema 2, una condición **necesaria** es $(x^*)^t(B^2)=(x^*)^t(B^3)$. Un caso completamente análogo al analizado en (a) permite concluir que la condición necesaria se reduce a $(B^2_k=B^3_k)$, y se tendrá un equilibrio de Nash **solamente** cuando $B^2_k=B^3_k\geq B^1_k$, cuando y^* pertenece a una sola región. Como en el caso anterior, TODOS los puntos del segmento TAMBIÉN corresponden a equilibrios de Nash, ya que satisfacen esta condición.

En el caso que el punto y^* pertenezca a dos regiones, digamos, las asociadas a los renglones i y j de la matriz A, y si $(B_i^2 - B_i^3)$ y $(B_j^2 - B_j^3)$ son de signo opuesto se puede obtener la estrategia x^*,

$$\mathrm{x}_i^* = \frac{(B_j^3 - B_j^2)}{(B_j^3 - B_j^2 + B_i^2 - B_i^3)},\ x_j^* = 1 - x_i^*,\ x_k^* = 0, k \neq i, j$$

Así, (x^*, y^*) será un equilibrio de Nash, **solamente** cuando

$$x^*(B^2) = x^*(B^3) \geq\ x^*(B^1).$$

(c) Sea y^* un punto cualquiera del segmento que une los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$, y x^* una solución del problema (1). De acuerdo al teorema 3, una condición **necesaria** es $(x^*)^t(B^1) = (x^*)^t(B^2)$. Un razonamiento casi idéntico al anterior permite afirmar que la condición necesaria se reduce a $(B_k^1 = B_k^2)$, y se tendrá un equilibrio de Nash **solamente** cuando $B_k^1 = B_k^2 \geq\ B_k^3$, cuando y^* pertenece a una sola región. Nuevamente, como en el caso anterior, TODOS los puntos del segmento TAMBIÉN corresponden a equilibrios de Nash, ya que satisfacen esta condición. En el caso que el punto y^* pertenezca a dos regiones, digamos, las asociadas a los renglones i y j de la matriz A, y si $(B_i^1 - B_i^2)$ y $(B_j^1 - B_j^2)$ son de signo opuesto se puede obtener la estrategia x^*,

$$\mathrm{x}_i^* = \frac{(B_j^2 - B_j^1)}{(B_j^2 - B_j^1 + B_i^1 - B_i^2)},\ x_j^* = 1 - x_i^*,\ x_k^* = 0, k \neq i, j$$

Así, (x^*, y^*) será un equilibrio de Nash, **solamente** cuando

$$x^*(B^1) = x^*(B^2) \geq\ x^*(B^3).$$

(3) Analizar los puntos correspondientes al interior de Δ.

Sea y^* un punto cualquiera del interior de Δ, y x^* una solución del problema (1). De acuerdo al teorema 4, una condición **necesaria** es

$$(x^*)^t(B^1) = (x^*)^t(B^2) = (x^*)^t(B^3).$$

Una vez más, si el punto y^* pertenece **solamente** a una de las regiones de Δ, digamos, la asociada al renglón k, entonces, de acuerdo al lema 7, la condición necesaria se reduce a $B_k^1 = B_k^2 = B_k^3$, es decir, todos los elementos del $k-esimo$ renglón de B deben tener un valor común. Si esta condición se cumple, entonces y^* y TODOS los puntos de esa región corresponden a equilibrios de Nash.

En el caso que el punto y^* pertenezca a dos regiones, digamos, las asociadas a los renglones i y j de la matriz A, se deberá encontrar x^* que satisfaga la condición necesaria, la cual se reduce a

$$(x_i^*, x_j^*) \begin{pmatrix} B_i^1 & B_i^2 & B_i^3 \\ B_j^1 & B_j^2 & B_j^3 \end{pmatrix} = (1, 1, 1)$$

donde se ha elegido el vector $(1, 1, 1)$, pero se puede elegir arbitrariamente cualquier vector con 3 componentes idénticas. Si existe solución no negativa para este sistema de ecuaciones, entonces, después de «normalizar» el vector solución, es decir, dividir cada componente entre la suma de ambas, se tendrá un equilibrio de Nash, y esto para TODOS los puntos pertenecientes al segmento común entre las regiones.

Si el punto y^* pertenece a tres regiones, es decir, corresponde a la intersección, digamos, de las regiones asociadas a los renglones i, j, y k de la matriz A, entonces se deberá encontrar x^* que satisfaga

$$(x_i^*, x_j^*, x_k^*) \begin{pmatrix} B_i^1 & B_i^2 & B_i^3 \\ B_j^1 & B_j^2 & B_j^3 \\ B_k^1 & B_k^2 & B_k^3 \end{pmatrix} = (1, 1, 1)$$

Como en el caso anterior, si existe solución no negativa para este sistema de ecuaciones, entonces, después de «normalizar» el vector solución, es decir, dividir cada componente entre la suma de todas, se tendrá un equilibrio de Nash.

(4) Fin del algoritmo. Se han determinado todos los equilibrios de Nash.

5. Ejemplo de aplicación

Se aplicará el algoritmo EquiNash3 al ejemplo 2 presentado en la sección 2 de este artículo, por lo que se reproduce la información en este punto para facilitar el análisis.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & 7 \\ 10 & -1 & 0 \\ 5 & 13 & 2 \\ -4 & 11 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 7 & 0 & 1 \\ -3 & 8 & -1 \\ 0 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(0) Dadas estas matrices, se obtiene la proyección de la función (4) sobre Δ, la cual se reproduce a continuación:

(1) Analizando los vértices de Δ, para el $(1, 0)$ la región corresponde al plano asociado al renglón 3, y $B_3^1 = -3$ NO corresponde al máximo de ese renglón; para el $(0, 1)$ se tiene la región asociada al renglón 4, pero

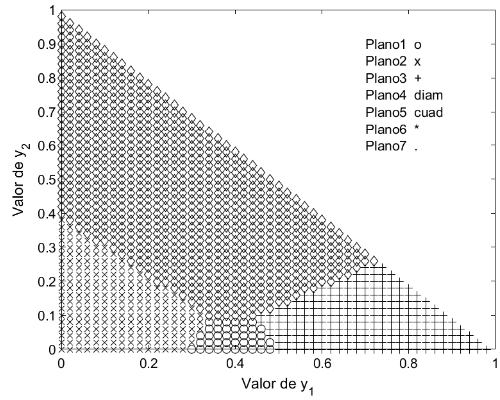

Figura 3. Proyección de la Cazuela.

$B_4^2 = 0$ tampoco es el máximo del renglón, y finalmente, para el $(0,0)$ la región asociada corresponde al renglón 2, pero $B_2^3 = 1$ tampoco es el máximo de ese renglón. Es decir, ninguno de los vértices corresponde a algún equilibrio de Nash.

(2)(a) Observando los puntos sobre el eje horizontal, que pertenecen a UNA sola región, empezando desde el origen, en la región 2 se tiene que $(B_2^1 = 7 \neq 1 = B_2^3)$, por lo que no satisface la condición para ser equilibrio; para los que siguen, en la región 1, se tiene $(B_1^1 = 2 \neq 9 = B_1^3)$, y tampoco se cumple; finalmente para la región 3, $(B_3^1 = -3 \neq -1 = B_3^3)$, y tampoco se reúnen las condiciones.

Y para los puntos que pertenecen a DOS regiones, para el que se encuentra en la intersección de las regiones 2 y 1 sí se puede calcular

$$x_2^* = \frac{(B_1^3 - B_1^1)}{(B_1^3 - B_1^1 + B_2^1 - B_2^3)} \equiv \frac{9-2}{9-2+7-1} = \frac{7}{13}$$

$$x_1^* = 1 - \frac{7}{13} = \frac{6}{13},\ x_k^* = 0, k \neq 1, 2$$

Como $x^*(B^1) = x^*(B^3) = \frac{61}{13} > -\frac{6}{13} = x^*(B^2)$, entonces ya se tiene un equilibrio de Nash.

Para calcular y^* se debe resolver el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

obteniendo, después de normalizar, $y_1^* = \frac{3}{10}, y_3^* = \frac{7}{10}, y_2^* = 0$

El otro punto sobre este eje, que está en la intersección de las regiones 1 y 3, NO corresponde a un equilibrio, ya que no satisface que $(B_1^1 - B_1^3) = (2-9)$ sea de signo distinto que $(B_3^1 - B_3^3) = (-3-(-1))$.

(2)(b) Para puntos sobre el eje vertical pertenecientes a UNA sola región: en la región 2 se tiene $(B_2^2 = 0 \neq 1 = B_2^3)$, y en la región 4

$(B_4^2 = 6 \neq 7 = B_4^3)$, es decir, no satisfacen los criterios requeridos. Y para el otro punto, el que está en la intersección de las regiones 2 y 4, tampoco se satisface que $(B_2^2 - B_2^3) = (0-1)$ sea de signo distinto que $(B_4^2 - B_4^3) = (6-7)$. Entonces sobre ese eje no existen equilibrios de Nash.

(2)(c) Análogamente, para puntos sobre la diagonal del punto $(1,0)$ al punto $(0,1)$ que pertenecen a UNA sola región: en la región 3 se tiene $(B_3^1 = -3 \neq 8 = B_3^2)$, y en la región 4 $(B_4^1 = 0 \neq 6 = B_4^2)$, no satisfaciendo lo requerido. Y para el punto que está en la intersección de las regiones 3 y 4, tampoco se satisface que $(B_3^1 - B_3^2) = (-3-8)$ sea de signo distinto que $(B_4^1 - B_4^2) = (0-6)$. Tampoco existen equilibrios ahí.

(3) Para los puntos interiores de Δ que pertenecen a UNA sola región: se necesita que todos los elementos de la matriz B correspondientes a esos renglones, los asociados a esas regiones, sean iguales, y en este caso, ninguno de los renglones 1, 2, 3, o 4 cumplen esta condición.

Si el punto pertenece a solamente 2 regiones, la 1 y la 2, la 1 y la 3, la 2 y la 4, o la 3 y la 4, en cada uno de estos casos se tiene que encontrar una solución al sistema

$$(x_i^*, x_j^*) \begin{pmatrix} B_i^1 & B_i^2 & B_i^3 \\ B_j^1 & B_j^2 & B_j^3 \end{pmatrix} = (1,1,1)$$

En este ejemplo, ninguno de estos sistemas tiene solución, por lo que ninguno de esos puntos corresponde a equilibrios de Nash.

Y si el punto pertenece a tres regiones, es decir, es la intersección de las 3, como 1, 2 y 4, o 1, 3 y 4, se tiene que resolver un sistema como

$$(x_i^*, x_j^*, x_k^*) \begin{pmatrix} B_i^1 & B_i^2 & B_i^3 \\ B_j^1 & B_j^2 & B_j^3 \\ B_k^1 & B_k^2 & B_k^3 \end{pmatrix} = (1,1,1)$$

donde i, j, k toman los valores de cada una de estas ternas. Aquí tampoco se tienen soluciones no negativas, por lo que tampoco se tienen los equilibrios buscados. De esta manera, se han identificado todos los equilibrios de Nash para este juego, resultando solamente 1.

Además, sería de gran utilidad añadir a la proyección de la gráfica de la función $F(y^*)$ sobre Δ información en la frontera de Δ acerca de los signos de las diferencias $(B_k^1 - B_k^3)$ en el eje horizontal, $(B_k^2 - B_k^3)$ en el eje vertical, y $(B_k^1 - B_k^2)$ en la «diagonal», donde el índice k corresponde a la región asociada al segmento en consideración. Así, si los signos son iguales, se descarta ese punto como candidato a equilibrio de Nash.

6. Conclusiones

El algoritmo presentado en este artículo permite calcular todos los equilibrios de Nash para cualquier juego bimatricial de dimensión $m \times 3$ o $3 \times n$, es decir, cuando el número de columnas o de renglones de las matrices de pago asociadas sea igual a 3.

Se utiliza una gráfica que permite visualizar inmediatamente la posible ubicación de los puntos de equilibrio asociados al juego.

Es importante señalar que se trata de un algoritmo que permite calcular los puntos de equilibrio de manera directa, sin recurrir a iteraciones ni a aproximaciones, lo que hace innecesario un mayor conocimiento de la teoría de puntos fijos, la cual sustenta la mayoría de los métodos utilizados en el caso general [6]. Consecuentemente, es muy simple utilizar cualquier lenguaje de programación que realice la parte engorrosa del proceso, dejando al usuario únicamente la tarea de identificar un número reducido de posibles candidatos.

Finalmente, quiero agradecer infinitamente a nuestro muy estimado colega, el Candidato a Doctor en Ciencias, Fernando Cornejo Montaño, por su valiosísimo apoyo para ayudarme a desentrañar las sutilezas y complejidades que representaron para mí algunos comandos de LaTeX. Sin su ayuda, la terminación de la presentación de este trabajo se hubiera alargado en el tiempo.

Bibliografía

[1] J. A. Cano Garcés, «Método para determinar equilibrios de Nash en juegos bimatriciales», *Miscelanea Matemática SMM*, núm. 50, 2010, 27–32.
[2] C. E. Lemke y J. T. Howson, «Equilibrium points of bimatrix games», *SIAM Journal on Applied Mathematics*, núm. 12, 1964, 413–426.
[3] R. Myerson, *Game theory: Analysis of conflict*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1991.
[4] J. Nash, «Equilibrium Points in n-Person Games», *Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A.*, núm. 36, 1950, 48–49.
[5] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.
[6] P. Zapata Lillo, *Economía, política, y otros juegos. una introducción a los juegos no cooperativos*, Facultad de Ciencias, UNAM, 2007.