

DOI: <https://doi.org/10.47234/mm.8306>

La propiedad del valor intermedio en espacios de medida difusos

Alejandro Ríos Herrejón

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
chanchito@ciencias.unam.mx

1. Introducción

Un resultado fundamental del cálculo de una variable, conocido como el *teorema del valor intermedio*, establece que, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y z es cualquier valor entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = z$.

El propósito de este escrito es exponer que, en el ámbito de la teoría de la medida, existe un resultado similar que postula que, en espacios de medida con una cualidad especial, está presente una propiedad de tipo valor intermedio (véase el teorema 4.5).

Un detalle peculiar es que la autoría de dicho resultado no está del todo clara. Por ejemplo, en los textos especializados en teoría de la medida, comúnmente se le atribuye a Waław Sierpiński; verbigracia, en la página 39 del libro [4] se menciona el artículo [9] de Sierpiński, en el cual se le atribuye la autoría del teorema 4.5.

No obstante, en la publicación *A result of Sierpiński on non-atomic measures*, realizada en el foro *MathOverflow* y tras la colaboración de varios usuarios, se concluyó que el resultado corresponde más bien a Roman Sikorski, quien lo enuncia en un libro escrito en polaco y publicado en 1958. Sin embargo, tras una investigación personal, encontré que en el artículo [5] se atribuye el resultado a Hans Hahn y Arthur Rosenthal, quienes lo mencionan en un libro de 1948, publicado claramente diez años antes que la obra de Sikorski. A la luz de lo anterior, parece que la identidad del autor quedará por lo pronto como un misterio.

Sin prestar excesiva atención a las controversias en torno a la atribución del crédito por este resultado, el propósito de este artículo es

Palabras clave: Propiedad del valor intermedio, espacios de medida, medida difusa.
Este trabajo fue elaborado con el apoyo económico del CONAHCYT (núm. 814282).

presentar una demostración elemental del teorema 4.5 y comentar algunas de sus consecuencias.

2. Preliminares

Para empezar, los símbolos \mathbb{N} y \mathbb{R} representan, correspondientemente, los conjuntos de *números naturales*, es decir, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, y de *números reales*.

Si X y Y son conjuntos, escribimos $X \subseteq Y$ cuando todos los elementos de X son también elementos de Y . En este sentido, el *conjunto potencia de X* , denotado por $P(X)$, es la familia de todos los subconjuntos de X ; es decir, $A \in P(X)$ si y solo si $A \subseteq X$.

Decimos que $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq P(X)$ es *ajena por pares* si para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ distintos se satisface que $A_m \cap A_n = \emptyset$. Por otra parte, $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es *creciente* (respectivamente, *decreciente*) si $A_n \subseteq A_{n+1}$ (resp., $A_{n+1} \subseteq A_n$) para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $a, b \in \mathbb{R}$ cumplen $a < b$, y A es un subconjunto de $[a, b]$, decimos que A es *denso* en $[a, b]$ si, para cualesquiera $x, y \in [a, b]$ con $x < y$, existe $z \in A$ tal que $x < z < y$.

El siguiente resultado auxiliar, que será empleado más adelante, presenta una condición suficiente para garantizar cuándo un subconjunto de un intervalo cerrado y acotado de \mathbb{R} es denso en dicho intervalo:

Lema 2.1. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y A un subconjunto de $[a, b]$. Si para todo $\varepsilon > 0$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_k : k \leq n\} \subseteq A$ que satisfacen:*

1. $x_0 = a$ y $x_n = b$,
2. $\{x_k : k \leq n\}$ es estrictamente creciente, y
3. $x_{k+1} - x_k < \varepsilon$ siempre que $k < n$,

entonces A es un subconjunto denso de $[a, b]$.

Demostración. Sean $x, y \in [a, b]$ con $x < y$ y $\varepsilon := \frac{y-x}{2}$. También, sean $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_k : k \leq n\} \subseteq A$ como indican las hipótesis. Observemos que, como 0 es un elemento de $\{k \leq n : x_k \leq x\}$, el número natural $k_0 := \max\{k \leq n : x_k \leq x\}$ está bien definido. Más aún, $k_0 < n$ porque la igualdad $k_0 = n$ genera la contradicción

$$b = x_n = x_{k_0} \leq x < y \leq b.$$

Por lo tanto, $k_0 + 1 \leq n$ y x_{k_0+1} satisface la relación $x < x_{k_0+1}$. Finalmente, si $y \leq x_{k_0+1}$, entonces

$$y - x \leq x_{k_0+1} - x_{k_0} < \varepsilon = \frac{y-x}{2},$$

lo cual es absurdo. En consecuencia, $x_{k_0+1} \in A$ y $x < x_{k_0+1} < y$. \square

Un número real de la forma $\frac{m}{2^n}$, donde $m, n \in \mathbb{N}$, se denomina un *racional diádico*. Un buen ejercicio para el lector es demostrar, mediante el lema 2.1, que si

$$D := \left\{ \frac{m}{2^n} : n \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq 2^n \right\},$$

entonces D es un subconjunto denso del intervalo $[0, 1]$; es decir, los racionales diádicos en el intervalo $[0, 1]$ son densos en él.

3. Espacios de medida

El propósito de lo que sigue es introducir los conceptos fundamentales de la teoría de la medida, con el fin de proporcionar al lector el contexto necesario para comprender el enunciado y la demostración del teorema 4.5, así como las consecuencias que se presentarán más adelante. A partir de este momento, la referencia principal para el lector que desee profundizar en el tema será [1].

Antes de introducir la definición formal de un espacio de medida, conviene explicar la extensión del conjunto de los números reales \mathbb{R} al conjunto $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

¿Qué significa esta extensión? Los símbolos ∞ y $-\infty$ deben interpretarse simplemente como elementos adicionales que se introducen para describir, de manera rigurosa, ciertos límites y comportamientos. De acuerdo con lo que sugiere la intuición, ∞ es mayor que cualquier número real, y $-\infty$ es menor que todo número real. En símbolos, $-\infty < x < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

El conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ se conoce como la *recta real extendida*, y desempeña un papel fundamental en el análisis real y en la teoría de la medida. Su utilidad radica en que permite tratar de forma natural cierto tipo de sucesiones reales. Por ejemplo, una sucesión (a_n) en \mathbb{R} (de hecho, una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$) *converge* a ∞ si, para todo $M > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > M$ siempre que $n \geq m$. En cursos básicos de Cálculo Diferencial es común hablar de sucesiones que «divergen a infinito». Desde el punto de vista topológico, este comportamiento puede interpretarse como una forma de convergencia al punto ∞ dentro del conjunto extendido.

Naturalmente, se adoptan ciertas reglas aritméticas intuitivas para los nuevos elementos que se añaden a \mathbb{R} . Por ejemplo, suele suponerse que $\infty + x = \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y que, si $r > 0$, entonces $r \cdot \infty = \infty$ (véase [1]). Estas convenciones permiten extender, de manera controlada, algunas propiedades algebraicas de \mathbb{R} al conjunto $\overline{\mathbb{R}}$.

Para los propósitos de este texto, bastará con restringir nuestra atención a la «mitad no negativa» de la recta real extendida, es decir, al

conjunto $[0, \infty] := [0, \infty) \cup \{\infty\}$. Nótese que se trata, simplemente, del intervalo $[0, \infty)$, al que se añade el punto ∞ como elemento máximo.

Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{A} \subseteq P(X)$. Decimos que \mathcal{A} es una σ -álgebra sobre X si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$ y $X \in \mathcal{A}$,
2. $X \setminus E \in \mathcal{A}$ siempre que $E \in \mathcal{A}$, y
3. si $\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$.

Si E es un elemento de la colección \mathcal{A} , E se denomina un *conjunto medible*. Un buen ejercicio para el lector no familiarizado con estos términos consiste en demostrar que, si \mathcal{A} es una σ -álgebra sobre X , entonces $E \cup F$, $E \cap F$ y $E \setminus F$ son conjuntos medibles siempre que E y F lo sean.

Ahora bien, si además de una σ -álgebra \mathcal{A} sobre X , se dispone de una función $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ y

$$\mu \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n),$$

siempre que $\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ sea ajena por pares, la función μ es una *medida en \mathcal{A}* y la terna (X, \mathcal{A}, μ) se denomina un *espacio de medida*.

La segunda propiedad que define a una medida es conocida como *aditividad numerable* (o σ -aditividad). Una vez más, una recomendación para el lector no versado en el tema es demostrar algunas de las características básicas que tienen las medidas. Por ejemplo, si E y F pertenecen a la familia \mathcal{A} , entonces:

- (Monotonía) $E \subseteq F$ implica que $\mu(E) \leq \mu(F)$,
- (Inclusión-exclusión) $\mu(E \cup F) + \mu(E \cap F) = \mu(E) + \mu(F)$,
- (Escisión) $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$ si $E \subseteq F$ y $\mu(E) < \infty$, y
- (Subaditividad numerable) si $\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$, entonces

$$\mu \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n).$$

Observemos que si $E \cap F = \emptyset$, entonces la fórmula de inclusión-exclusión establece que $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$.

Existe otra propiedad fundamental de nuestro interés, la *continuidad inferior de la medida*. Su demostración, al ser estándar, la omitimos, aunque puede consultarse en [1, p. 21]. Por su importancia, la enunciamos a continuación:

Proposición 3.1. *Si (X, \mathcal{A}, μ) es un espacio de medida y $\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ es una sucesión creciente, entonces $(\mu(E_n))$ converge en $[0, \infty]$*

y

$$\mu \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

Cerramos esta sección con algunos conceptos que serán indispensables para el desarrollo de las secciones 4 y 5.

Definición 3.2. Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida.

1. $E \in \mathcal{A}$ es un *átomo* si $\mu(E) > 0$ y, para todo conjunto $F \in \mathcal{A}$ con $F \subseteq E$, se tiene que $\mu(F) = 0$ o $\mu(F) = \mu(E)$.
2. μ es *difusa*, o (X, \mathcal{A}, μ) es un *espacio de medida difuso*, si μ no tiene átomos. Es decir, si para cada $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) > 0$, existe un conjunto $F \in \mathcal{A}$ tal que $F \subseteq E$ y $0 < \mu(F) < \mu(E)$.
3. (X, \mathcal{A}, μ) tiene la *propiedad del valor intermedio* si, para todo $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) < \infty$ y para cualquier $t \in [0, \mu(E)]$, existe $F \in \mathcal{A}$ con $F \subseteq E$ y $\mu(F) = t$.

4. Prueba del teorema 4.5

El objetivo de esta sección es presentar una demostración de que todos los espacios de medida difusos poseen la propiedad del valor intermedio. Conviene señalar que, en la literatura, existen diversas demostraciones del teorema 4.5. Algunas de ellas emplean el lema de Kuratowski–Zorn (una versión equivalente del axioma de elección) [7], el axioma de elección dependiente [6], o particiones finitas del espacio relacionadas con sus átomos [2], entre otras técnicas.

La demostración ofrecida en este escrito tiene tanto una ventaja como una desventaja. Por un lado, se trata de una prueba elemental, que no requiere más herramientas que la capacidad de llevar a cabo construcciones recursivas. Además, está dividida en varios lemas para facilitar su lectura y comprensión. Posiblemente exista un camino más eficiente, pero el propósito aquí es compartir el tipo de razonamiento que podría desarrollar un estudiante al enfrentarse por primera vez con el problema, y mostrar cómo la disolución del mismo en sus componentes más simples puede llevar a una solución completa.

Por otro lado, lo desfavorable es que esta accesibilidad viene acompañada de una extensión algo mayor que la de las pruebas que suelen encontrarse en los libros.

A partir de este punto, supondremos que (X, \mathcal{A}, μ) es un espacio de medida difuso.

Lema 4.1. Si $E \in \mathcal{A}$ satisface $0 < \mu(E) < \infty$, entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe $F \in \mathcal{A}$ tal que $F \subseteq E$ y $0 < \mu(F) < \varepsilon$.

Demostración. En virtud de que μ no tiene átomos, existe $G \in \mathcal{A}$ con $G \subseteq E$ y $0 < \mu(G) < \mu(E)$. Observemos que $E \setminus G$ pertenece a la colección \mathcal{A} y tiene medida positiva, ya que $\mu(E \setminus G) = \mu(E) - \mu(G) > 0$. Además, si se cumple que $\mu(G) > \frac{1}{2}\mu(E)$ y $\mu(E \setminus G) > \frac{1}{2}\mu(E)$, entonces $\mu(E) = \frac{1}{2}\mu(E) + \frac{1}{2}\mu(E) < \mu(G) + \mu(E \setminus G) = \mu(G \cup (E \setminus G)) = \mu(E)$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, existe un conjunto $F_0 \in \{G, E \setminus G\}$ de tal forma que $0 < \mu(F_0) \leq \frac{1}{2}\mu(E)$.

Ahora, si para algún $n \in \mathbb{N}$ hemos construido $F_n \in \mathcal{A} \cap P(E)$ tal que $0 < \mu(F_n) \leq \frac{1}{2^{n+1}}\mu(E)$, entonces el uso del argumento anterior con F_n en lugar de E , produce un conjunto $F_{n+1} \in \mathcal{A}$ tal que $F_{n+1} \subseteq F_n$ y

$$0 < \mu(F_{n+1}) \leq \frac{1}{2}\mu(F_n) \leq \frac{1}{2^{n+2}}\mu(E).$$

Finalmente, dado $\varepsilon > 0$, el hecho de que la sucesión $(\frac{1}{2^{n+1}}\mu(E))$ converge a cero garantiza la existencia de $m \in \mathbb{N}$ con $\frac{1}{2^{m+1}}\mu(E) < \varepsilon$. En suma, el conjunto F_m satisface $F_m \in \mathcal{A}$, $F_m \subseteq E$ y $0 < \mu(F_m) < \varepsilon$. \square

Una familia $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ es *cerrada bajo uniones finitas* si, para cualesquiera $A, B \in \mathcal{B}$, se tiene que $A \cup B \in \mathcal{B}$. Observemos que si \mathcal{B} es cerrada bajo uniones finitas, $n \in \mathbb{N}$ y $\{B_m : m \leq n\} \subseteq \mathcal{B}$, entonces $\bigcup_{m=0}^n B_m$ pertenece a la colección \mathcal{B} .

Lema 4.2. *Si $E \in \mathcal{A}$ cumple $0 < \mu(E) < \infty$, entonces existe $F \in \mathcal{A}$ con la propiedad de que $F \subseteq E$ y $\frac{1}{3}\mu(E) \leq \mu(F) \leq \frac{2}{3}\mu(E)$.*

Demostración. Supongamos en busca de una contradicción que, para todo $F \in \mathcal{A}$ con $F \subseteq E$, se tiene que

$$\mu(F) < \frac{1}{3}\mu(E) \quad \text{o} \quad \frac{2}{3}\mu(E) < \mu(F). \quad (1)$$

Observemos que si

$$\mathcal{F} := \left\{ F \in \mathcal{A} : F \subseteq E, \mu(F) < \frac{1}{3}\mu(E) \right\},$$

entonces $\mathcal{F} \neq \emptyset$ porque $\emptyset \in \mathcal{F}$. Además, \mathcal{F} es cerrado bajo uniones finitas pues, si $F, G \in \mathcal{F}$, entonces las relaciones

$$\mu(F \cup G) \leq \mu(F) + \mu(G) < \frac{1}{3}\mu(E) + \frac{1}{3}\mu(E) = \frac{2}{3}\mu(E)$$

implican por (1) que $\mu(F \cup G) < \frac{1}{3}\mu(E)$, es decir, $F \cup G \in \mathcal{F}$.

Sea $s := \sup\{\mu(F) : F \in \mathcal{F}\}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $F_n \in \mathcal{F}$ tal que $s - \frac{1}{2^n} < \mu(F_n) \leq s$. Luego, si para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $G_n := \bigcup_{m=0}^n F_m$, entonces $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión creciente contenida en \mathcal{F} que satisface $s - \frac{1}{2^n} < \mu(F_n) \leq \mu(G_n) \leq s$, siempre que $n \in \mathbb{N}$; en especial, $(\mu(G_n))$ converge a s . De esta manera, si $G := \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$, la proposición 3.1 certifica que $\mu(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_n) = s$.

En síntesis, G es un elemento de \mathcal{A} con $G \subseteq E$ y $\mu(G) = s$.

Afirmación. $s = \frac{1}{3}\mu(E)$.

En efecto, notemos primero que $s \leq \frac{1}{3}\mu(E)$ porque $\frac{1}{3}\mu(E)$ es una cota superior de $\{\mu(F) : F \in \mathcal{F}\}$. Ahora bien, si suponemos por el contrario que $s < \frac{1}{3}\mu(E)$, entonces

$$\mu(E \setminus G) = \mu(E) - \mu(G) = \mu(E) - s > \frac{1}{3}\mu(E) - s > 0.$$

Luego, para el número positivo $\varepsilon := \frac{1}{3}\mu(E) - s$, el lema 4.1 aplicado al conjunto $E \setminus G$ produce un conjunto $H \in \mathcal{A}$ con $H \subseteq E \setminus G$ y $0 < \mu(H) < \varepsilon$.

Luego, la condición $H \subseteq E \setminus G$ garantiza que

$$\mu(G \cup H) = \mu(G) + \mu(H) - \mu(G \cap H) = \mu(G) + \mu(H) > \mu(G) = s.$$

Por otro lado,

$$\mu(G \cup H) = \mu(G) + \mu(H) = s + \mu(H) < s + \varepsilon = \frac{1}{3}\mu(E),$$

es decir, $G \cup H \in \mathcal{F}$ y, por ende, $\mu(G \cup H) \leq s$, una contradicción a la relación $\mu(G \cup H) > s$.

En consecuencia, $G \in \mathcal{A}$, $G \subseteq E$ y $\mu(G) = \frac{1}{3}\mu(E)$, lo cual es imposible que suceda por (1). \square

Lema 4.3. *Si $E, F \in \mathcal{A}$ verifican que $F \subseteq E$ y $\mu(F) < \mu(E) < \infty$, entonces existe $G \in \mathcal{A}$ con $F \subseteq G \subseteq E$ y que satisface lo siguiente:*

1. $\mu(F) < \mu(G) < \mu(E)$,
2. $\mu(E \setminus G) \leq \frac{2}{3}\mu(E \setminus F)$, y
3. $\mu(G \setminus F) \leq \frac{2}{3}\mu(E \setminus F)$.

Demostración. Para empezar, como $\mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(F) > 0$, el lema 4.2 aplicado al conjunto $E \setminus F$ genera un conjunto $H \in \mathcal{A}$ con $H \subseteq E \setminus F$ y $0 < \frac{1}{3}\mu(E \setminus F) \leq \mu(H) \leq \frac{2}{3}\mu(E \setminus F)$. Nuestra meta es probar que $G := F \cup H$ tiene las características deseadas.

Claramente, $G \in \mathcal{A}$ y $F \subseteq G \subseteq E$. También, la condición $H \subseteq E \setminus F$ implica que

$$\mu(G) = \mu(F \cup H) = \mu(F) + \mu(H)$$

y

$$\begin{aligned} \mu(F) &< \mu(F) + \frac{1}{3}\mu(E \setminus F) \leq \mu(F) + \mu(H) = \mu(G) = \mu(F) + \mu(H) \\ &\leq \mu(F) + \frac{2}{3}\mu(E \setminus F) < \mu(F) + \mu(E \setminus F) = \mu(E). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \mu(E \setminus G) \leq \frac{2}{3}\mu(E \setminus F) &\Leftrightarrow \mu(E) - \mu(G) \leq \frac{2}{3}\mu(E \setminus F) \\ &\Leftrightarrow \mu(E) - \mu(F) - \mu(H) \leq \frac{2}{3}\mu(E) - \frac{2}{3}\mu(F) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3}\mu(E) - \frac{1}{3}\mu(F) \leq \mu(H) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3}\mu(E \setminus F) \leq \mu(H) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mu(G \setminus F) \leq \frac{2}{3}\mu(E \setminus F) &\Leftrightarrow \mu(G) - \mu(F) \leq \frac{2}{3}\mu(E \setminus F) \\ &\Leftrightarrow \mu(F) + \mu(H) - \mu(F) \leq \frac{2}{3}\mu(E \setminus F) \\ &\Leftrightarrow \mu(H) \leq \frac{2}{3}\mu(E \setminus F).\end{aligned}$$

□

Lema 4.4. *Si $E \in \mathcal{A}$ satisface $0 < \mu(E) < \infty$, entonces la colección $\{\mu(F) : F \in \mathcal{A}, F \subseteq E\}$ es un subconjunto denso de $[0, \mu(E)]$.*

Demostración. La idea es emplear el lema 2.1 para obtener el resultado en cuestión. Para empezar, sea $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la función determinada mediante $\sigma(0) := 2$ y $\sigma(n+1) := 2\sigma(n) - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmación. Existe una familia $\{E(n, k) : n \in \mathbb{N}, k < \sigma(n)\} \subseteq \mathcal{A} \cap P(E)$ que tiene las siguientes propiedades para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $k < \sigma(n) - 1$:

1. $E(n, 0) = \emptyset$ y $E(n, \sigma(n) - 1) = E$,
2. $E(n, k) \subseteq E(n, k+1)$, y
3. $0 < \mu(E(n, k+1) \setminus E(n, k)) \leq (\frac{2}{3})^n \mu(E)$.

La construcción será por recursión sobre n . En primer lugar, para el paso base de la recursión, es suficiente definir $E(0, 0) := \emptyset$ y $E(0, 1) := E$. Ahora supongamos que, para algún $n \in \mathbb{N}$, hemos construido la colección $\{E(n, k) : k < \sigma(n)\}$ con las condiciones deseadas. Notemos que si $k < \sigma(n)$, entonces $2k < 2\sigma(n) < \sigma(n+1)$. Así, si para todo $k < \sigma(n)$ se define $E(n+1, 2k) := E(n, k)$, entonces solamente falta construir los conjuntos

$$E(n+1, 1), E(n+1, 3), E(n+1, 5), \dots, E(n+1, 2\sigma(n) - 3).$$

Para lograr lo anterior, observemos que si $k < \sigma(n+1) - 1$ es un número par, entonces se cumple que $E(n+1, k) \subseteq E(n+1, k+2)$, $0 < \mu(E(n+1, k)) < \mu(E(n+1, k+2))$ y

$$\mu(E(n+1, k+2) \setminus E(n+1, k)) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu(E). \quad (2)$$

Luego, por el lema 4.3, existe $E(n+1, k+1) \in \mathcal{A}$ con

$$E(n+1, k) \subseteq E(n+1, k+1) \subseteq E(n+1, k+2)$$

y que satisface lo siguiente:

- (a) $\mu(E(n+1, k)) < \mu(E(n+1, k+1)) < \mu(E(n+1, k+2))$;
- (b) $\mu(E(n+1, k+2) \setminus E(n+1, k+1)) \leq \frac{2}{3}\mu(E(n+1, k+2) \setminus E(n+1, k))$;
- (c) $\mu(E(n+1, k+1) \setminus E(n+1, k)) \leq \frac{2}{3}\mu(E(n+1, k+2) \setminus E(n+1, k))$.

Así, para todo $k < \sigma(n+1) - 1$, se verifica que:

1. $E(n+1, 0) = \emptyset$ y $E(n+1, \sigma(n+1) - 1) = E$,

2. $E(n+1, k) \subseteq E(n+1, k+1)$, y
3. $0 < \mu(E(n+1, k+1) \setminus E(n+1, k)) \leq (\frac{2}{3})^{n+1} \mu(E)$.

Respecto al tercer inciso, la primera desigualdad se sigue del inciso (a), mientras que la segunda desigualdad se deduce de (b), (c) y (2). Con esto se completa la recursión.

Finalmente, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{2}{3})^n \mu(E) < \varepsilon$. De esta manera, definir $F_k := E(n, k)$ para cada $k < \sigma(n)$ genera una familia $\{F_k : k < \sigma(n)\} \subseteq \mathcal{A} \cap P(E)$ que satisface lo siguiente:

1. $F_0 = \emptyset$ y $F_{\sigma(n)-1} = E$,
2. $\{\mu(F_k) : k < \sigma(n)\}$ es estrictamente creciente, y
3. $\mu(F_{k+1}) - \mu(F_k) < \varepsilon$ para todo $k < \sigma(n) - 1$.

Por lo tanto, el lema 2.1 garantiza que $\{\mu(F) : F \in \mathcal{A}, F \subseteq E\}$ es un subconjunto denso de $[0, \mu(E)]$. \square

Con el respaldo del lema 4.4, estamos en condiciones de presentar una demostración del teorema principal de este trabajo. Cabe recordar que, como se indicó al inicio de esta sección, nuestro espacio de medida (X, \mathcal{A}, μ) es difuso:

Teorema 4.5. *Si $E \in \mathcal{A}$ cumple $\mu(E) < \infty$, entonces, para cada $t \in [0, \mu(E)]$, existe $F \in \mathcal{A}$ con $F \subseteq E$ y $\mu(F) = t$.*

Demostración. Una primera observación es que si $t = 0$ o $t = \mu(E)$, entonces $F := \emptyset$ o $F := E$, respectivamente, satisface $F \in \mathcal{A}$, $F \subseteq E$ y $\mu(F) = t$. Por esta razón, supondremos de ahora en adelante que $0 < t < \mu(E)$.

Sea $m \in \mathbb{N}$ de tal modo que $t - \frac{1}{2^m} > 0$. Nuestro primer objetivo es realizar una construcción recursiva:

Afirmación. Existe una familia ajena por pares $\{E_n : n \geq m\} \subseteq \mathcal{A} \cap P(E)$ tal que

$$t - \frac{1}{2^n} < \mu \left(\bigcup_{k=m}^n E_k \right) < t - \frac{1}{2^{n+1}}$$

para todo $n \geq m$.

Para comenzar, el lema 4.4 produce $E_m \in \mathcal{A}$ con $E_m \subseteq E$ y $t - \frac{1}{2^m} < \mu(E_m) < t - \frac{1}{2^{m+1}}$. Supongamos ahora que para algún $n \geq m$, hemos construido la colección $\{E_k : m \leq k \leq n\}$ con las características necesarias. Observemos que el hecho $t - \frac{1}{2^n} < \mu(\bigcup_{k=m}^n E_k) < t - \frac{1}{2^{n+1}}$ implica que $\mu(E \setminus \bigcup_{k=m}^n E_k) > 0$ y

$$0 < t - \frac{1}{2^{n+1}} - \mu \left(\bigcup_{k=m}^n E_k \right) < t - \frac{1}{2^{n+2}} - \mu \left(\bigcup_{k=m}^n E_k \right) < \mu \left(E \setminus \bigcup_{k=m}^n E_k \right).$$

Luego, por el lema 4.4, existe $E_{n+1} \in \mathcal{A}$ con $E_{n+1} \subseteq E \setminus \bigcup_{k=m}^n E_k$ y

$$t - \frac{1}{2^{n+1}} - \mu \left(\bigcup_{k=m}^n E_k \right) < \mu(E_{n+1}) < t - \frac{1}{2^{n+2}} - \mu \left(\bigcup_{k=m}^n E_k \right),$$

lo cual implica que $t - \frac{1}{2^{n+1}} < \mu(\bigcup_{k=m}^n E_k) + \mu(E_{n+1}) < t - \frac{1}{2^{n+2}}$ y, por ende, que $t - \frac{1}{2^{n+1}} < \mu(\bigcup_{k=m}^{n+1} E_k) < t - \frac{1}{2^{n+2}}$. Lo anterior completa la recursión.

Por último, si para cada $n \geq m$ definimos $F_n := \bigcup_{k=m}^n E_k$, entonces $\{F_n : n \geq m\}$ es una sucesión creciente contenida en $\mathcal{A} \cap P(E)$ que, además, satisface $t - \frac{1}{2^n} < \mu(F_n) < t - \frac{1}{2^{n+1}}$ para todo $n \geq m$; en particular, $(\mu(F_n))$ converge a t . De esta manera, $F := \bigcup_{n=m}^{\infty} F_n$ pertenece a la colección $\mathcal{A} \cap P(E)$ y cumple que $\mu(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = t$ (véase la proposición 3.1). \square

5. Algunas consecuencias del teorema 4.5

Aunque el espacio disponible en el artículo impedirá, en algunos casos, exponer por completo todos los detalles, cada vez que sea necesario señalaremos un camino que permita al lector entusiasta participar activamente y completar por su cuenta lo que haga falta.

Dicho lo anterior, una vez más, a partir de este momento supondremos que (X, \mathcal{A}, μ) es un espacio de medida difuso.

Cabe señalar, en primer lugar, que en el teorema 4.5 no es necesario imponer restricción alguna respecto a la finitud de la medida del conjunto medible considerado, dado que la propiedad del valor intermedio se verifica para todos ellos; este hecho se establece en el corolario 5.1. Asimismo, resulta pertinente destacar que la demostración del referido enunciado sigue, en esencia, la misma técnica expuesta en el lema 4.2.

Corolario 5.1. *Si $E \in \mathcal{A}$ y $t \in [0, \mu(E)]$, entonces existe $F \in \mathcal{A}$ con $F \subseteq E$ y $\mu(F) = t$.*

Demostración. Solo falta considerar el caso en que $\mu(E) = \infty$. Además, de acuerdo con lo expuesto al inicio de la demostración del teorema 4.5, supondremos adicionalmente que $0 < t < \mu(E)$. Nuestro objetivo es probar que si

$$\mathcal{F} := \{\mu(F) : F \in \mathcal{A}, F \subseteq E, \mu(F) < \infty\}$$

y $s := \sup(\mathcal{F})$, entonces $s = \infty$.

Supongamos, en busca de una contradicción, que $s < \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $F_n \in \mathcal{F}$ tal que $s - \frac{1}{2^n} < \mu(F_n) \leq s$. Observemos que, si definimos $G_n := \bigcup_{m \leq n} F_m$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $G_n \in \mathcal{F}$ y

$s - \frac{1}{2^n} < \mu(F_n) \leq \mu(G_n) \leq s$; en especial, la sucesión $(\mu(G_n))$ converge a s .

Luego, si $G := \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$, entonces $G \in \mathcal{A}$, $G \subseteq E$, y la proposición 3.1 certifica que

$$\mu(G) = \mu \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} G_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_n) = s < \infty.$$

De esta manera, como $\mu(E \setminus G) = \infty$ y μ es difusa, existe $H \in \mathcal{A}$ con $H \subseteq E \setminus G$ y $0 < \mu(H) < \mu(E)$. Así, $G \cup H \in \mathcal{A}$, $G \cup H \subseteq E$ y

$$\mu(G \cup H) = \mu(G) + \mu(H) = s + \mu(H);$$

en particular, $s < \mu(G \cup H) < \infty$. No obstante, el hecho $G \cup H \in \mathcal{F}$ implica que $\mu(G \cup H) \leq s$, lo cual es absurdo.

En consecuencia, $s = \infty$ y, por ende, existe $F \in \mathcal{A}$ tal que $F \subseteq E$ y $0 < t < \mu(F) < \infty$. Finalmente, el teorema 4.5 aplicado al conjunto medible F , produce un conjunto $G \in \mathcal{A}$ con $G \subseteq F \subseteq E$ y $\mu(G) = t$. \square

Aunque el corolario 5.2 es interesante por sí mismo, ocupa un lugar central en la demostración del teorema 5.4, que se presentará más adelante:

Corolario 5.2. Sean $E, F \in \mathcal{A}$ con $F \subseteq E$ y $\mu(F) < \mu(E)$. Si $\mu(F) < t < \mu(E)$, entonces existe $G \in \mathcal{A}$ con $F \subseteq G \subseteq E$ y $\mu(G) = t$.

Demostración. Sea $s \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(F) + s = t$. Observemos que $s > 0$ y $\mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(F) > s$. De esta manera, el corolario 5.1 genera $H \in \mathcal{A}$ con $H \subseteq E \setminus F$ y $\mu(H) = s$. Consecuentemente, $G := F \cup H$ es un elemento de \mathcal{A} que verifica las relaciones $F \subseteq G \subseteq E$ y $\mu(G) = \mu(F) + \mu(H) = \mu(F) + s = t$. \square

Antes de continuar, es imprescindible introducir un nuevo concepto, fundamental para exponer las últimas ideas del presente escrito:

Definición 5.3. Sea E un elemento de \mathcal{A} . Una μ -estratificación¹ de E es una familia $\{E_t : t \in [0, \mu(E)]\} \subseteq \mathcal{A} \cap P(E)$ que verifica lo siguiente:

1. $E_0 = \emptyset$ y $E_{\mu(E)} = E$,
2. $E_s \subseteq E_t$, siempre que $s, t \in [0, \mu(E)]$ cumplen $s \leq t$, y
3. $\mu(E_t) = t$ para todo $t \in [0, \mu(E)]$.

El teorema 5.4 representa un fortalecimiento significativo del teorema 4.5, pues, además de rescatar la propiedad del valor intermedio, lo hace de forma jerarquizada:

¹La denominación « μ -estratificación» no es estándar en la literatura clásica, pero la adoptamos en este texto porque, por un lado, refleja bastante bien el concepto, y por otro, porque necesitábamos un término que evitara repetir la definición constantemente.

Teorema 5.4. *Si $E \in \mathcal{A}$ satisface $\mu(E) < \infty$, entonces E tiene una μ -estratificación.*

Demostración. Para empezar, si $\mu(E) = 0$, es evidente que la elección $E_0 := E$ satisface que $\{E_0\}$ es una μ -estratificación de E . De ahora en adelante, supondremos que $\mu(E) > 0$.

A continuación, realizaremos dos reducciones del problema. En primer lugar, podemos reducirlo al caso de conjuntos medibles de medida 1. La razón es que si el enunciado es válido para este tipo de conjuntos, entonces en el caso general podemos proceder así: la función $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ determinada mediante $\nu(F) := \frac{\mu(F)}{\mu(E)}$ es una medida sin átomos que satisface $\nu(E) = 1$. Luego, si $\{F_t : t \in [0, 1]\}$ es una ν -estratificación de E , entonces el lector podrá comprobar que la familia $\{E_t : t \in [0, \mu(E)]\}$ definida por $E_t := F_{t/\mu(E)}$ es una μ -estratificación de E .

Por esta razón, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\mu(E) = 1$.

La segunda reducción es la siguiente: supongamos que existe un subconjunto denso $D \subseteq [0, 1]$ tal que $\{0, 1\} \subseteq D$ y una familia $\{E_t : t \in D\} \subseteq \mathcal{A} \cap P(E)$ que cumple:

1. $E_0 = \emptyset$ y $E_1 = E$,
2. $E_s \subseteq E_t$ siempre que $s, t \in D$ y $s \leq t$, y
3. $\mu(E_t) = t$ para todo $t \in D$.

Resulta que dicha familia induce una μ -estratificación de E . En efecto, si para cada $t \in [0, 1] \setminus D$ definimos

$$D_t := D \cap (-\infty, t) \quad \text{y} \quad E_t := \bigcup_{s \in D_t} E_s,$$

entonces $\{E_t : t \in [0, 1]\}$ es una μ -estratificación de E , detalles que le encargamos nuevamente verificar al lector.

Por ello, es suficiente considerar el conjunto de los números racionales diádicos en $[0, 1]$:

$$D := \left\{ \frac{m}{2^n} : n \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq 2^n \right\},$$

y construir la colección $\{E_t : t \in D\}$ como se ha indicado.

La idea detrás de esta construcción sigue de cerca lo expuesto en la Afirmación del lema 4.4. Para comenzar, con el objetivo de aligerar la notación, convengamos en denotar por $E(m, n)$ al conjunto correspondiente al racional diádico $\frac{m}{2^n}$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq m \leq 2^n$.

En primer lugar, definimos $E(0, 0) := \emptyset$ y $E(1, 0) := E$. Luego, si para algún $n \in \mathbb{N}$ hemos construido una colección $\{E(m, n) : 0 \leq m \leq 2^n\}$ que satisface las propiedades deseadas, entonces definimos $E(2m, n+1) := E(m, n)$ para cada $0 \leq m \leq 2^n$.

Solo resta definir el conjunto $E(m, n+1)$ cuando $0 < m < 2^{n+1}$ es un número impar. Con esta idea en mente, observemos que si $0 \leq m < 2^n$ es un número par, entonces se tiene la cadena de desigualdades

$$\frac{m}{2^{n+1}} < \frac{m+1}{2^{n+1}} < \frac{m+2}{2^{n+1}},$$

lo cual implica, en virtud del corolario 5.2, que existe un conjunto $E(m+1, n+1) \in \mathcal{A}$ tal que

$$E(m, n+1) \subseteq E(m+1, n+1) \subseteq E(m+2, n+1)$$

y

$$\mu(E(m+1, n+1)) = \frac{m+1}{2^{n+1}}.$$

Esto completa la recursión y, por extensión, concluye la demostración. \square

Las μ -estratificaciones se utilizan en teoría de la medida para estudiar cómo varían ciertas cantidades aleatorias. Por ejemplo, en [3], Jean Cortissoz describe cómo, a partir de dos variables aleatorias y de una “ruta” que conecta sus distribuciones, se puede construir una serie de variables que cambian de manera continua desde la primera hasta la segunda. Esta construcción sigue una idea sugerida por Ramiro de la Vega. Los detalles técnicos son más avanzados, por lo que remitimos al lector a la referencia para quienes deseen profundizar en el tema.

La última tarea de este trabajo consiste en exponer un ejemplo concreto de una medida difusa que es fundamental y ubicua en el desarrollo de la teoría de la integración, la probabilidad, el análisis funcional y muchas otras áreas de las matemáticas: la medida de Lebesgue en la recta real.

A comienzos del siglo XX, el joven matemático francés Henri Lebesgue se enfrentó a un problema crucial: el método tradicional de integración, desarrollado por Riemann en el siglo XIX, resultaba insuficiente para abordar muchas funciones relevantes en el análisis. En 1902, Lebesgue presentó su tesis doctoral, en la que introdujo una nueva forma de medir conjuntos y definir integrales, lo que permitió extender considerablemente el alcance del cálculo integral. Su propuesta, conocida hoy como medida e integral de Lebesgue, no solo superó las limitaciones anteriores, sino que también sentó las bases del análisis moderno.

Nuestro primer paso consiste en presentar de manera sintética la medida de Lebesgue y algunas de sus propiedades esenciales para los propósitos de este escrito. Para empezar, sea

$$\mathcal{I} := \{I \subseteq \mathbb{R} : I \text{ es un intervalo abierto y acotado}\}.$$

Ahora, si E es un subconjunto de \mathbb{R} , la *medida exterior de Lebesgue* de E es el número real extendido

$$\lambda^*(E) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : \{I_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{I}, E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}.$$

De acuerdo con el *criterio de Carathéodory*, un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ es *Lebesgue-medible* si, para todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, se cumple la igualdad

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \setminus E).$$

El material presentado en el segundo capítulo de [8] muestra que la colección

$$\mathcal{L} := \{E \subseteq \mathbb{R} : E \text{ es Lebesgue-medible}\}$$

constituye una σ -álgebra sobre \mathbb{R} , denominada la σ -*álgebra de Lebesgue*. Además, la función $\lambda : \mathcal{L} \rightarrow [0, \infty]$, definida por $\lambda(E) := \lambda^*(E)$, es una medida sobre \mathcal{L} .

Para nuestros fines basta destacar tres propiedades fundamentales del espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$. Cada una de ellas puede consultarse en [8] y se resumen a continuación.

- Todos los intervalos en la recta real son Lebesgue-medibles.
- Si $a, b \in \mathbb{R}$ cumplen $a < b$, entonces $\lambda([a, b)) = b - a$.
- Para todo $x \in \mathbb{R}$ se satisface que $\{x\} \in \mathcal{L}$ y $\lambda(\{x\}) = 0$.

Resta emplear las características descritas en la lista anterior para comprobar que el espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ posee la propiedad que ha guiado la exposición desde la sección 4:

Proposición 5.5. *La terna $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ es un espacio de medida difuso.*

Demostración. Sea $E \in \mathcal{L}$ con $\lambda(E) > 0$. La igualdad

$$E = (E \cap (-\infty, 0]) \cup (E \cap [0, \infty))$$

permite suponer, sin pérdida de generalidad, que el conjunto Lebesgue-medible $F := E \cap [0, \infty)$ verifica la relación $\lambda(F) > 0$.

Sea $0 < r < \lambda(E)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $F_n := F \cap [nr, (n+1)r)$. Resulta que la familia $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ es ajena por pares, está contenida en \mathcal{L} , satisface $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$, y cumple $\lambda(F_n) \leq r$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Luego, por la aditividad numerable de λ , se tiene

$$\lambda(F) = \lambda \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(F_n).$$

Finalmente, como $\lambda(F) > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \lambda(F_m) \leq r < \lambda(E)$. En síntesis, $F_m \in \mathcal{L}$, $F_m \subseteq E$ y $0 < \lambda(F_m) < \lambda(E)$; es decir, E no es un átomo. \square

Una combinación del teorema 5.4 con la proposición 5.5 produce un corolario más:

Corolario 5.6. *Si $E \in \mathcal{L}$ satisface $\lambda(E) < \infty$, entonces E tiene una λ -estratificación.*

Para concluir este texto, cabe señalar que la medida de Lebesgue posee una versión natural en cada uno de los espacios \mathbb{R}^n . Particularmente, si denotamos por \mathcal{L}_n la σ -álgebra de Lebesgue en \mathbb{R}^n y por λ_n la correspondiente medida de Lebesgue, entonces el espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$ también es difuso. En consecuencia, todo conjunto $E \in \mathcal{L}_n$ tal que $\lambda_n(E) < \infty$ admite una λ_n -estratificación. Sin embargo, los detalles técnicos involucrados exceden ligeramente el propósito divulgativo de este escrito, por lo que invitamos al lector interesado a explorarlos por su cuenta.

Agradecimientos

El autor agradece a los revisores por las valiosas indicaciones recibidas en el dictamen de este texto, las cuales contribuyeron en gran medida a enfocar el objetivo del mismo y a enaltecer la calidad del escrito.

Bibliografía

- [1] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley-Interscience, 1995.
- [2] V. I. Bogachev, *Measure Theory, Volume I*, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [3] J. Cortissoz, «On the Skorokhod Representation Theorem», *Proc. Am. Math. Soc.*, vol. 135, núm. 12, 2007, 3995–4007.
- [4] A. Fryszkowski, *Fixed Point Theory for Decomposable Sets*, Topological Fixed Point Theory and Its Applications, núm. 2, Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [5] A. Ghosh, M. A. Khan y M. Uyanik, «The intermediate value theorem and decision-making in psychology and economics: An expositional consolidation», *Games*, vol. 13, núm. 4, 2022, 1–24.
- [6] M. Greinecker, «Nonatomic vs. Continuous Measures», version: 2017-04-13: <https://math.stackexchange.com/q/641727>.
- [7] Ramiro, «Using Zorn's lemma to prove that an atomless probability space has a measurable set of measure x for any $x \in [0, 1]$ », version: 2025-10-01: <https://math.stackexchange.com/q/5097628>.
- [8] H. L. Royden y P. M. Fitzpatrick, *Real Analysis*, 4.^a ed., Pearson, 2010.
- [9] W. Sierpiński, «Sur les fonctions d'ensemble additives et continues», *Fundam. Math.*, vol. 3, núm. 1, 1922, 240–246.