Miscelánea Matemática **68** (2019) 1-9 SMM

La propiedad de Arquímedes en un campo ordenado

Josefina Álvarez
Departamento de Matemática
New Mexico State University
Las Cruces, New Mexico 88003, EEUU
jalvarez@nmsu.edu

Muchos libros clásicos de introducción al análisis real, presentan al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales en forma axiomática. Esto es, como un campo ordenado, y completo en el sentido de Dedekind (véase, por ejemplo, [2, cap. 2], [4, cap. 0, §5], [7, cap. 2]). Además, suponen que es posible construir modelos de tal estructura y que su axiomática es categórica, o sea, que dados dos campos ordenados y completos en el sentido de Dedekind, hay una biyección, que es un isomorfismo con respecto a las operaciones y al orden definidos en cada uno de ellos. Recordemos que el axioma de completitud en el sentido de Dedekind, asegura que todo subconjunto no vacío y acotado superiormente, tiene supremo. Si éste es el caso, a partir de ahora diremos simplemente que el campo es completo.

En lo que sigue, supondremos conocidos los axiomas de campo ordenado y las propiedades operacionales básicas que se obtienen como consecuencia de los axiomas (véase, por ejemplo, las referencias ya mencionadas).

Recordemos que dado un campo ordenado $\mathbf{K}$, existe un homomorfismo de campo, de $\mathbb{Q}$ en $\mathbf{K}$. En otras palabras, hay subconjuntos $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{K}$, que se identifican con los números naturales $\mathbb{N}$, los números enteros $\mathbb{Z}$ y los números racionales $\mathbb{Q}$, respectivamente. Además, el homomorfismo lleva el orden natural de $\mathbb{Q}$ al orden en $\mathbf{K}$ ([7, p. 33, prop. 2]). Por lo tanto,

$$n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\text{n veces}}$$

es positivo en $\mathbf{K}$.

Para comenzar nuestra exposición, digamos que la propiedad de Arquímedes es enunciada en $\mathbb{R}$, por ejemplo en los siguientes términos ([8, p. 9, teo. 1.20]):

Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$nx > y. \tag{1}$$

Esta propiedad aparece como axioma V en la obra *Sobre Esferas Y Cilindros* del matemático, ingeniero, físico, astrónomo, ... Arquímedes de Siracusa (ca. 287 AC - ca. 212 AC). Por ello se la suele llamar axioma de Arquímedes (véase, por ejemplo, [7, p. 33]). También aparece, como definición 4, en el libro V de los *Elementos* de Euclides. Arquímedes adjudica esta propiedad al matemático y astrónomo Eudoxio de Cnido (ca. 390 AC - ca. 337 AC) [9]. El asociar el nombre de Arquímedes con ella, se debe al matemático Otto Stolz (1842-1905), quien menciona a Arquímedes en relación con la propiedad, en un artículo publicado en 1882 [5].

Observemos que (1) tiene sentido en cualquier campo ordenado. Así, nuestro objetivo es el formular algunas de las maneras equivalentes en las que (1) se puede enunciar, en un campo ordenado. Digamos que en $\mathbb{R}$, (1) típicamente se prueba como consecuencia del axioma de completitud en el sentido de Dedekind (véase, por ejemplo, las referencias mencionadas al comienzo).

Antes de ver el caso de un cuerpo ordenado, observemos que si x pertenece a $\mathbf{K}$ y $n \in \mathbb{N}$, la expresión nx se interpreta como

$$\underbrace{x + \cdots + x}_{\text{n veces}} = 1x + \cdots + 1x = nx,$$

donde, a la derecha, $n \in \mathbf{N}$ es la imagen del número $n \in \mathbb{N}$ que aparece a la izquierda. O sea, que si escribimos

$$nx > y, \tag{2}$$

para $x, y \in \mathbf{K}$, no hay ambigüedad en decir $n \in \mathbb{N}$ o $n \in \mathbf{N}$ en (2). Es bueno mencionar esto, al menos una vez.

Con esta aclaración en mano, comenzamos dando un par de definiciones y algunos ejemplos:

Definición 1. Sea $\mathbf{K}$ un campo ordenado con orden $<$. Decimos que

1. $x \in \mathbf{K}$ es un infinitesimal si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbf{N}$.
2. $x \in \mathbf{K}$ es una infinitud si $n \leq x$, para todo $n \in \mathbf{N}$.

Como es habitual, $\leq$ significa que se permite la igualdad.

Ejemplos 1. *1. Es inmediato el comprobar que cero es un infinitesimal en todo campo ordenado.*

2. Consideremos el campo $\mathbb{R}(X)$ de las funciones racionales f con coeficientes reales,

$$f(X) = \frac{a_r X^r + \cdots + a_1 X + a_0}{b_s X^s + \cdots + b_1 X + b_0},$$

donde el numerador tiene grado r y el denominador tiene grado s. Es decir, $a_r, b_s \neq 0$.

En este campo diremos que f es positiva si $\frac{a_r}{b_s} > 0$. A partir de esta noción de positividad, definimos en $\mathbb{R}(X)$ la relación $<$ como $f < g$ cuando $g - f$ es positiva. Puede comprobarse sin dificultad que esta relación satisface los axiomas de orden. Así, $\mathbb{R}(X)$ es un campo ordenado.

Observemos que el campo $\mathbb{R}$ está inmerso de manera natural, como campo ordenado, en $\mathbb{R}(X)$.

En el orden definido en $\mathbb{R}(X)$,

$$0 < \frac{1}{X} < \frac{1}{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, porque $\frac{1}{n} - \frac{1}{X} = \frac{X-n}{nX}$ es positiva. Es decir, $\frac{1}{X}$ es un infinitesimal distinto de cero. De la misma manera,

$$X > n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, porque $X - n$ es positiva. Es decir, X es una infinitud o, en otras palabras, el conjunto $\mathbb{N}$ está acotado en $\mathbb{R}(X)$. Más aún, para todo $a \in \mathbb{R}$, es $X > a$, lo cual nos dice que el conjunto de los números reales no negativos está acotado en $\mathbb{R}(X)$.

Proposición 1. *Dado un campo ordenado $\mathbf{K}$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *Si $x, y \in \mathbf{K}$ y $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*
$$nx > y.$$
2. *Si $x \in \mathbf{K}$, existe $n \in \mathbf{Z}$ tal que*
$$n > x.$$
3. *El conjunto $\mathbf{N}$ no está acotado en $\mathbf{K}$. Es decir, dado $x \in \mathbf{K}$ positivo, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $n > x$.*
4. *Dado $x \in \mathbf{K}$ positivo, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que*
$$\frac{1}{n} < x.$$
5. *Si $x \in \mathbf{K}$ es un infinitesimal, entonces $x = 0$.*
6. *No hay infinitudes en $\mathbf{K}$.*

Demostración. Aunque, formalmente, trabajaremos como si $\mathbf{K}$ fuera $\mathbb{R}$, hay que pensar con cuidado, en el caso general, en el significado de cada operación.

Comenzamos por probar que 1) $\Rightarrow$ 2). Si $x > 0$, usamos 1) con $\frac{1}{x}$ e $y = 1$. Es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\overbrace{1 + \cdots + 1}^{\text{n veces}}}{x} = \frac{n}{x} > 1,$$

o

$$n > x.$$

Si $x \leq 0$, es claro que $n > x$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Así obtenemos 2).

Si negamos 3), es decir, si $\mathbf{N}$ estuviera acotado en $\mathbf{K}$, existiría $x \in \mathbf{K}$, positivo, tal que

$$0 < n \leq x,$$

para todo $n \in \mathbf{N}$. O sea, para ese valor x, es $n \leq x$ para todo $n \in \mathbf{Z}$, lo cual es la negación de 2).

Si suponemos que 3) se cumple, es decir $\mathbf{N}$ no está acotado en $\mathbf{K}$, dado $x \in \mathbf{K}$ positivo, debe de existir $n \in \mathbf{N}$ tal que

$$n > \frac{1}{x},$$

o

$$\frac{1}{n} < x,$$

lo cual prueba 3) $\Rightarrow$ 4).

Si 5) no se cumple, existe $x \in \mathbf{K}$ que es un infinitesimal positivo en $\mathbf{K}$. O sea,

$$0 < x \leq \frac{1}{n},$$

para todo $n \in \mathbf{N}$. Consecuentemente, no puede existir $n \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{1}{n} < x$. Es decir, 4) no se cumple.

Si x es una infinitud en $\mathbf{K}$, entonces $x \geq n$ para todo $n \in \mathbf{N}$. O sea,

$$0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n},$$

para todo $n \in \mathbf{N}$. Es decir, $\frac{1}{x}$ es un infinitesimal positivo en $\mathbf{K}$, lo cual prueba que 5) no se cumple.

Finalmente, dado $x \in \mathbf{K}$ positivo, si y es negativo o cero,

$$nx > y,$$

para cada $n \in \mathbf{N}$. Si y es positivo, puesto que $\frac{y}{x}$ no puede ser una infinitud de acuerdo con 6), debe de existir $n \in \mathbf{N}$ tal que

$$n > \frac{y}{x}.$$

Es decir, existe $n \in \mathbf{N}$, o $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$nx > y,$$

lo cual prueba que 6) $\Rightarrow$ 1).

Esto concluye la prueba de la proposición. $\square$

Definición 2. Un campo ordenado $\mathbf{K}$ se llama arquimediano si satisface las propiedades, equivalentes, enunciadas en la proposición 1.

Proposición 2. *Si* $\mathbf{K}$ *es un campo ordenado y completo, entonces* $\mathbf{K}$ *es arquimediano.*

Demostración. Probaremos 2) en la proposición 1, es decir, probaremos que el subconjunto $\mathbf{Z}$ no está acotado superiormente en $\mathbf{K}$. La prueba es idéntica al caso de $\mathbb{R}$: Si $\mathbf{Z}$ estuviera acotado superiormente en $\mathbf{K}$, no siendo vacío, tendría supremo, digamos α, en $\mathbf{K}$. Entonces $n+1 \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbf{Z}$, o $n \leq \alpha - 1$ para todo $n \in \mathbf{Z}$, contradiciendo la afirmación que α es el supremo de $\mathbf{Z}$.

Esto concluye la prueba de la proposición. $\square$

Ejemplos 2. *1. De acuerdo con la proposición 2, el campo* $\mathbb{R}$ *es arquimediano.*

2. Que un campo ordenado sea arquimediano, es estrictamente más débil que el ser completo. En efecto, el campo $\mathbb{Q}$ *no es completo porque, por ejemplo, el conjunto*

$$A = \left\{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \ o \ x \geq 0 \ y \ x^2 < 2\right\},$$

está acotado superiormente en $\mathbb{Q}$*, pero no tiene supremo en* $\mathbb{Q}$*. Para verlo, supongamos que existe* $z \in \mathbb{Q}$ *que es el supremo de* A*. Tal* z *debe de ser positivo. Como el polinomio* $X^2 - 2$ *no tiene raíces racionales, hay dos posibilidades:* $z^2 < 2$*, o sea* $z \in A$*, o* $z^2 > 2$*, o sea* $z \in \mathbb{Q} \backslash A$*. Consideremos ([8, p. 2]),*

$$u = z - \frac{z^2 - 2}{z + 2} = \frac{2z + 2}{z + 2},$$

de donde,

$$u^2 - 2 = \frac{2\left(z^2 - 2\right)}{(z+2)^2}. \tag{3}$$

Si $z \in A$*, también* $u \in A$*, de acuerdo con (3). Pero* $u - z = \frac{2 - z^2}{z + 2} > 0$*, es decir,* $z < u$*, lo cual no puede ser. Si* $z \in \mathbb{Q} \backslash A$*, también* $u \in \mathbb{Q} \backslash A$*. Pero en este caso* $u - z < 0$ *o* $0 < u < z$*. Afirmamos que* $u > x$ *para todo* $x \in A$*. En efecto, si existiera* $x \in A$*,* $u < x$*, tendríamos*

$$u^2 < ux < x^2 < 2,$$

lo cual no puede ser. Es decir, u *resulta una cota superior para* A*. En conclusión,* z *no puede existir. Sin embargo,* $\mathbb{Q}$ *es arquimediano, pues, por ejemplo, el subconjunto* $\mathbb{N}$ *no es acotado en* $\mathbb{Q}$*. Si lo fuera, existiría* $\frac{p}{q}$ *con* $p, q \geq 1$*, tal que* $n \leq \frac{p}{q}$*, o* $nq \leq p$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. En particular,* $(p+1)\,q \leq p$*, lo cual no es posible.*

3. *El campo $\mathbb{R}(X)$, con el orden definido en 2) de los ejemplos 1, no es arquimediano puesto que, como mostramos allí, contiene infinitesimales o, equivalentemente, contiene infinitudes o, equivalentemente, $\mathbb{N}$ no es un subconjunto acotado.*
4. *Consideremos el conjunto $\mathbb{R}((X))$ de las series de Laurent formales. Es decir, series de la forma $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n$ para las que existe $N \in \mathbb{Z}$, que depende de la serie, tal que $a_n = 0$ para $n < N$. Aunque no entraremos en los detalles, $\mathbb{R}((X))$ es un campo con las operaciones habituales entre series formales. Dada $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n$ en $\mathbb{R}((X))$ distinta de cero, definimos*

$$v(f) = \text{mín}\{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\}.$$

Decimos que f es positiva si el coeficiente $a_{v(f)}$ es positivo. De la misma manera que en 2) de los ejemplos 1, se puede ver que el campo $\mathbb{R}((X))$, con esta noción de positividad, resulta ordenado. Observemos que, en este orden,

$$\frac{1}{X} > n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, pues si $f = \frac{1}{X} - n$, $v(f) = -1$ y el coeficiente a_{-1} es 1, positivo. Es decir, $\mathbb{R}((X))$ no es arquimediano.

Definición 3. Dado un subconjunto no vacío S de $\mathbb{R}$ con el orden usual, se dice que S está bien ordenado si cada subconjunto no vacío de S tiene un primer elemento en el orden.

Definición 4. El principio de buena ordenación dice que el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales está bien ordenado con el orden usual.

Este principio es equivalente al principio de inducción (véase, por ejemplo, [1]).

Proposición 3. *Dado un campo $\mathbf{K}$ ordenado, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$\mathbf{K}$ es arquimediano.*
2. *La función «parte entera» está definida en $\mathbf{K}$. Es decir, dado $a \in \mathbf{K}$, si $a \geq 0$, existe $n \in \mathbf{N} \bigcup \{0\}$ tal que $n \leq a < n+1$ y si $a < 0$, existe $n \in \mathbf{Z}$, $n < 0$, tal que $n < a \leq n+1$.*
3. *El conjunto $\mathbf{Q}$ es denso en $\mathbf{K}$. Es decir, si $x, y \in \mathbf{K}$, y $x < y$, existe $r \in \mathbf{Q}$ tal que $x < r < y$.*
4. *Densidad en $\mathbf{K}$ de cierto subconjunto de $\mathbf{Q}$: Si $x, y \in \mathbf{K}$, y $x < y$, existen $k \in \mathbf{Z}$ y $n \in \mathbf{N}$ tal que $x < \frac{k}{2^n} < y$. La potencia 2^n se interpreta como $\underbrace{(1+1)\ldots(1+1)}_{n \text{ veces}}$ en la imagen del homomorfismo de $\mathbb{Q}$ en $\mathbf{K}$.*

Demostración. Probemos que 1) es equivalente a 2): Supongamos que $\mathbf{K}$ es arquimediano y fijemos $a \in \mathbf{K}$. Si $a \geq 0$, usando 2) en la proposición 1 con $x = a$, concluímos que existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $a < n$. Esto quiere decir que el conjunto

$$\{k \in \mathbf{N} : a < k\}$$

es un subconjunto no vacío de $\mathbf{N}$. Por el principio de buena ordenación, tiene que tener un primer elemento que llamamos m. Es decir,

$$m - 1 \leq a < m.$$

Si $a < 0$, entonces $-a > 0$. Por lo tanto, debe de existir $m \in \mathbf{N}$ tal que $m - 1 \leq -a < m$. O sea,

$$-m < a \leq -m + 1.$$

Es decir, hemos probado 2).

Recíprocamente, si 1) no se cumple, podemos asegurar, de acuerdo con 4) en la proposición 1, que existe $a \in \mathbf{K}$ positivo, tal que $a \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Es decir, $n \leq \frac{1}{a}$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Por lo tanto 2) no se cumple para ese $a \in \mathbf{K}$ positivo.

Para probar que 2) $\Rightarrow$ 3), fijamos $x, y \in \mathbf{K}$, $x < y$. Si $x \geq 0$ e $y > 0$, de acuerdo con 2) en la proposición 1, existe $k \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{1}{y-x} < k$. En particular, $1 < k\,(y - x)$. Usando 2), existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $n \leq kx < n + 1$. Para concluir 3), sólo necesitamos manipular estas desigualdades:

$$n + 1 \leq kx + 1 < kx + k\,(y - x) = ky.$$

Es decir,

$$kx < n + 1 < ky,$$

o

$$x < \frac{n+1}{k} < y,$$

lo cual nos da 3).

Si $x < 0$ e $y > 0$, entonces $x < 0 < y$. Finalmente, si $x, y < 0$, usamos el primer caso con $-y < -x$, obteniendo

$$-y < r < -x,$$

para un cierto $r \in \mathbf{Q}$. Entonces,

$$x < -r < y,$$

lo cual completa la demostración de 3).

Para probar que 3) $\Rightarrow$ 1), dado $x > 0$ fijo en $\mathbf{K}$, sabemos que existe $r \in \mathbf{Q}$ tal que $0 < r < x$. Puesto que r es de la forma $\frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{1}{n} \leq \frac{m}{n} = r < x,$$

lo cual nos da 4) en la proposición 1. Es decir, el campo $\mathbf{K}$ es arquimediano.

Puesto que la implicación 4) $\Rightarrow$ 3) claramente se cumple, sólo nos queda por probar que 1) $\Rightarrow$ 4) para completar la equivalencia de los cuatro enunciados. Supongamos que 4) no se cumple. Es decir, existen $x, y \in \mathbf{K}$ tal que $x < y$ y para cada $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, o bien $\frac{k}{2^n} \leq x$ o $y \leq \frac{k}{2^n}$. Si la segunda desigualdad nunca se cumple, entonces, en particular, para $n \in \mathbf{N}$ fijo,

$$k \leq x 2^n,$$

para todo $k \in \mathbf{N}$, lo cual contradice 3) en la proposición 1. Es decir, 1) no se cumple. Supongamos entonces que para algún $k \in \mathbf{Z}$ y $n \in \mathbf{N}$, se cumple $y \leq \frac{k}{2^n}$. Es decir, el conjunto

$$\mathbf{Z}_n = \{k \in \mathbf{Z} : y 2^n \leq k\},$$

es no vacío. Entonces, hay dos casos a considerar:

a.: El conjunto $\mathbf{Z}_n$ tiene un primer elemento.
b.: El conjunto $\mathbf{Z}_n$ no tiene un primer elemento.

En el caso a), existe $k_n \in \mathbf{Z}_n$ tal que $k_n - 1 \notin \mathbf{Z}_n$. Es decir,

$$\frac{k_n - 1}{2^n} \leq x < y \leq \frac{k_n}{2^n}.$$

Por lo tanto,

$$0 < y - x \leq \frac{k_n}{2^n} - \frac{k_n - 1}{2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

Usando el principio de inducción, podemos demostrar, sin dificultad, que $n < 2^n$ para todo $n \in \mathbf{N}$. O sea,

$$0 < y - x < \frac{1}{n},$$

para todo $n \in \mathbf{N}$. Es decir, $y - x$ es un infinitesimal positivo y por lo tanto, $\mathbf{K}$ no es arquimediano.

En el caso b), para cada $k \in \mathbf{Z}_n$ también $k - 1 \in \mathbf{Z}_n$. Esto implica que $\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}$, de donde resulta que no puede existir $k \in \mathbf{Z}_n$ tal que $k - 1 \leq y 2^n \leq k$. De acuerdo con la equivalencia 1) $\Leftrightarrow$ 2), $\mathbf{K}$ no es arquimediano.

Esto completa la demostración de la proposición. $\square$

Observemos que 2) en la proposición 3, típicamente se prueba, en el caso real, usando el axioma de completitud en el sentido de Dedekind (véase, por ejemplo, [4, p. 23, teo. 0.21]).

Las proposiciones 1 y 3 nos dan muchas posibilidades para la formulación de la propiedad de Arquímedes, algunas más usuales que otras. Por ejemplo, podríamos haberla definido pidiendo que $\mathbf{Q}$ sea denso en

$\mathbf{K}$, o pidiendo que los elementos de $\mathbf{K}$ de la forma $\frac{k}{2^n}$ para $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, formen un conjunto denso en $\mathbf{K}$, etc.

Para concluir, observemos que la propiedad de Arquímedes juega un papel fundamental en el desarrollo del Análisis Real. Por ejemplo, es esa propiedad la que nos permite asegurar que la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ converge a cero. Este es un hecho que parece trivial y obvio en el campo $\mathbb{R}$, pero que es fundamental en muchos de los teoremas centrales del Análisis Real.

Reconocimientos: La inspiración para este artículo proviene, en parte, de [3] y [6].

Bibliografía

[1] Brilliant, «The Well-Ordering Principle», `http://brilliant.org/wiki/the-well-ordering-principle`.

[2] J. D. DePree y C. W. Swartz, *Introduction To Real Analysis*, John Wiley, 1988.

[3] M. Deveau y H. Teismann, «$72 + 42$: Characterizations of the completeness and archimedean properties of ordered fields», *Real Analysis Exchange*, vol. 39, núm. 2, 2014, 261–304.

[4] E. D. Gaughan, *Introduction To Analysis*, 5.ª ed., Brooks/Cole, 1998.

[5] J. J. O'Connor y E. F. Robertson, «The MacTutor History Of Mathematics», `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk`.

[6] J. Propp, «Analysis in reverse», *The Amer. Math. Monthly*, vol. 120, núm. 5, 2013, 392–408.

[7] H. L. Royden, *Real Analysis*, 2.ª ed., Macmillan, 1968.

[8] W. Rudin, *Principles Of Mathematical Analysis*, 3.ª ed., McGraw-Hill, 1976.

[9] Wikipedia, «Archimedean property», `https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedean_property`.