Principios básicos sobre los que se estructuran las teorías de ‘gauge’

O.A. Sánchez-Valenzuela y M.E. Vázquez-Abal

Departamento de Geometría y Topología

Universidad de Santiago de Compostela

CIMAT

Apdo. Postal 402

36000 Guanajuato, Gto.

México

adolfo@cimat.mx, saval@servidor.unam.mx

meva@zmat.usc.es

Resumen

Las teorías de ‘gauge’ descansan sobre un principio muy básico: la acción de un grupo en un conjunto. En este artículo revisamos la fundamentación de esta afirmación. Proporcionamos también algunas imágenes geométricas así como algunos recursos algebraicos y analíticos centrales para la comprensión de las teorías de ‘gauge’.

Sea G un grupo y X un conjunto arbitrario. Denotaremos por $e \in G$ al elemento idéntico de G. *El grupo G actúa por la izquierda de un conjunto X* si existe una función $\Psi\colon G \times X \to X$ que satisface las siguientes dos propiedades:

- $\Psi(e, x) = x$ para todo $x \in X$
- $\Psi(g, \Psi(h, x)) = \Psi(gh, x)$.

Desde luego hay una definición análoga para acciones por la derecha: G actúa por la derecha del conjunto X si existe una función $\Phi\colon X \times G \to X$ que satisface:

· $\Phi(x,e) = x$ para todo $x \in X$

· $\Phi(\Phi(x,g),h) = \Phi(x,gh)$.

La relación entre acciones por la derecha y acciones por la izquierda es muy sencilla. Si $\Psi\colon G \times X \to X$ es una acción por la izquierda de X, la función $\Phi\colon X \times G \to X$ definida por $\Phi(x,g) = \Psi(g^{-1},x)$ proporciona una acción de G por la derecha de X y correspondientemente, si $\Phi\colon X \times G \to X$ es una acción por la derecha de X, la función $\Psi(g,x) = \Phi(x,g^{-1})$ define una acción por la izquierda de G en X.

Cuando G actúa en un conjunto X (ya sea por la izquierda o por la derecha), se define de manera natural una relación de equivalencia en X. Si la acción es por la izquierda (resp., por la derecha), $x \in X$ *está relacionado con x' si existe un elemento $g \in G$, tal que* $x' = \Psi(g,x)$ (resp., $x' = \Phi(x,g)$). Es inmediato verificar que efectivamente esta relación es de equivalencia.

Denotamos por $[x]$ la clase de equivalencia de $x \in X$ bajo esta relación, de manera que,

$$[x] = \{\Psi(g,x) \mid g \in G\}$$

cuando la acción es por la izquierda (resp., $[x] = \{\Phi(x,g) \mid g \in G\}$ cuando la acción es por la derecha). En el contexto de una acción de G en X, nos referimos a la clase de equivalencia $[x]$ como *la órbita de x.*

Lo usual es denotar por X/G al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia definidas por una acción de G en X. De la teoría de funciones y relaciones de equivalencia sabemos que existe una función suprayectiva natural $\pi\colon X \to X/G$ que asocia a cada $x \in X$, su órbita $\pi(x) = [x]$.

Un ejemplo muy básico de acción que aparece repetidamente en el álgebra elemental es el siguiente. Sea X un grupo y $G \subset X$ un subgrupo. Es inmediato comprobar que G actúa en X por la derecha mediante la función $X \times G \to X$ dada por la multiplicación en el grupo: $(x,g) \mapsto xg$. La clase de equivalencia $[x]$ de $x \in X$ bajo esta acción suele denotarse también por xG y se le refiere como la *clase lateral izquierda de x módulo G;* esta notación tiene su fundamento en el hecho de que,

$$[x] = \{xg \mid g \in G\} = x\,G$$

Finalmente, en el marco de esta fuente de ejemplos, la notación que usualmente se emplea para decir que x' está en la órbita de x es $x' \equiv x \mod G$.

Un caso particular de esta situación lo encontramos en el álgebra lineal elemental. Sea $X = V$ un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y considerémoslo un grupo abeliano bajo la suma de vectores. Un subespacio $W \subset V$ define entonces un subgrupo. La acción de W en V es simplemente $\Phi\colon V \times W \to V$, con $\Phi(v, w) = v + w$. La órbita de $v \in V$ bajo esta acción es el subconjunto

$$[v] = \{v + w \mid w \in W\} = v + W$$

El conjunto cuyos elementos son las órbitas de esta acción se denota —de acuerdo a la convención descrita anteriormente— por V/W y este conjunto puede a su vez convertirse en un espacio vectorial demandando que la función π que asigna a cada elemento $v \in V$ su clase de equivalencia $\pi(v) = [v] \in V/W$ sea un morfismo de espacios vectoriales; ie, una transformación lineal.

En general, si $\Psi\colon G \times X \to X$ es una acción izquierda de un grupo G en un conjunto X, para cada elemento $x \in X$ se establece una función suprayectiva $\Psi(\,\cdot\,, x)\colon G \to [x]$. Esta función define una relación de equivalencia en su dominio de la manera usual: g_1 está relacionado con g_2 si $\Psi(g_1, x) = \Psi(g_2, x)$. Esto significa que $\Psi\left(g_1^{-1}, \Psi\left(g_1, x\right)\right) = \Psi\left(g_1^{-1}, \Psi\left(g_2, x\right)\right)$; es decir, que $x = \Psi(g_1^{-1} g_2, x)$. Esta observación pone de manifiesto la importancia del siguiente concepto: *el subgrupo de isotropía de la acción* $\Psi\colon G \times X \to X$ *en el elemento* $x \in X$ es el subgrupo

$$G_x = \{h \in G \mid \Psi(h, x) = x\}\,.$$

En otras palabras, $g_1 \sim g_2$ si y sólo si $\Psi(g_1, x) = \Psi(g_2, x)$, lo cual ocurre si y sólo existe un $h \in G_x$ tal que $g_2 = g_1 h$; es decir, si y sólo si $g_2 \equiv g_1 \bmod G_x$. De la teoría elemental de funciones concluimos que la función suprayectiva $\Psi(\,\cdot\,, x)\colon G \to [x]$ induce de manera única una biyección $\bar{\Psi}\colon G/G_x \to [x]$, mediante la asignación $\bar{\Psi}(gG_x) = \Psi(g, x)$. La importancia y utilidad de este hecho es enorme porque permite 'representar' la órbita de $x \in X$ bajo la acción abstracta Ψ de G en X mediante el conjunto G/G_x de clases laterales izquierdas, el cual es un objeto algebraico muy concreto.

Otro recurso muy útil cuando un grupo G actúa en un conjunto X es el siguiente: escoger, en cada órbita $[x]$, un y sólo un elemento $x_{[\,\cdot\,]} \in [x]$ de manera que se puedan parametrizar todas las órbitas de la acción mediante una asignación,

$$\sigma\colon X/G \to X\,, \qquad [x] \mapsto \sigma([x]) = x_{[\,\cdot\,]}\,.$$

Obsérvese que de esta manera $\pi(x_{[\,\cdot\,]}) = [x]$; es decir, $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_{X/G}$. La terminología usual nos refiere a $x_{[\,\cdot\,]}$ como una *forma canónica de x bajo la acción de G* (siguiendo el criterio de σ).

En el ejemplo en el que $X = V$ y $G = W \subset V$, la parametrización de las órbitas puede además realizarse de tal manera que la asignación $[x] \mapsto \sigma([x]) = x_{[\,\cdot\,]}$ sea una aplicación lineal. En efecto, cada subespacio $U \subset V$ complementario a W en V define una función $\sigma_U\colon [v] \mapsto v_{[\,\cdot\,]}$, tal que

$$\sigma_U([v]) = v_{[\,\cdot\,]} := u \in U\,, \qquad \text{siempre que,} \quad v - u \in W\,.$$

En efecto, si U es un subespacio complementario a W en V, $V = U \oplus W$ dice que para cada $v \in V$ existen únicos $u \in U$ y $w \in W$ tales que $v = u + w$. De esta forma, queda bien definida la asignación $\sigma\colon [v] = [u + w] \mapsto u \in U$, de manera que cada órbita $[v]$ contiene un único $u \in U$ tal que $[u] = [v]$.

La figura que ilustra esta situación es la siguiente:

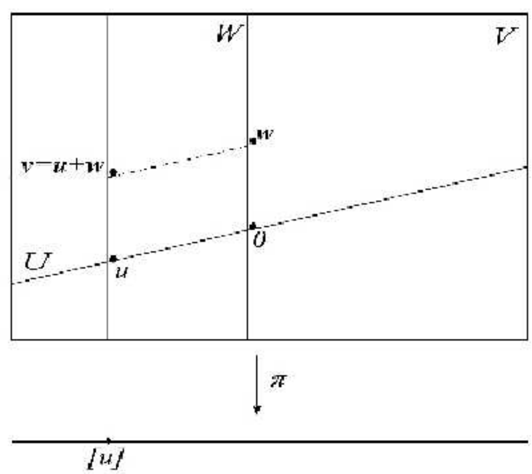

Figura 1:

En general, las funciones $\sigma\colon X/G \to X$, $[x] \mapsto x_{[\,\cdot\,]}$ que parametrizan las órbitas de la acción seleccionando un punto en cada órbita se llaman *secciones* y el conjunto de todas las secciones suele denotarse así:

$$\Gamma(X) = \{\, \sigma\colon X/G \to X \mid \pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_{X/G} \,\}\,.$$

Resulta muy conveniente tener en mente una figura muy similar a la Figura 1 para una acción general de G en X. La única diferencia cualitativa es que las secciones se ven como en la Figura 2. De hecho, se suele llamar *fibración* a una función suprayectiva como $\pi\colon X \to X/G$ y a los subconjuntos $\pi^{-1}([x])$ se les refiere como *las fibras*.

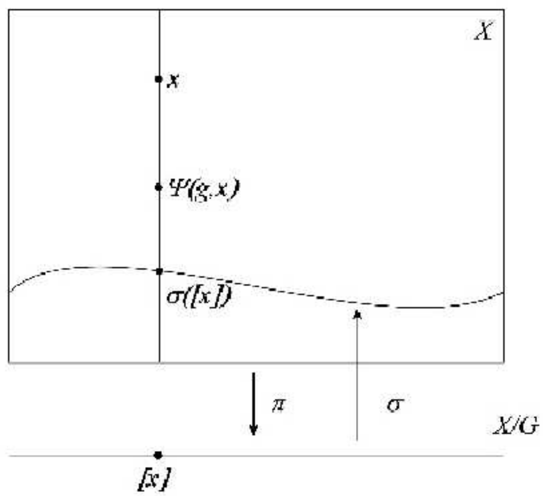

Figura 2:

Una vez que se tienen estas imágenes, cuando se nos da una acción $\Psi\colon G \times X \to X$, lo siguiente es considerar el grupo de todas las aplicaciones biyectivas $\varphi\colon X \to X$ que conmutan con la acción, sin alterar las órbitas; a saber, uno fija su atención en el grupo

$$\mathrm{Gau}(\Psi) = \{\, \varphi : X \to X \mid \varphi(\Psi(g,x)) = \Psi(g,\varphi(x)) \ \text{ y } \ \pi(\varphi(x)) = \pi(x)\,\}$$

que suele llamarse *el grupo de 'gauge' asociado a la acción* Ψ *de* G *en* X.

Hay dos observaciones importantes a tener en cuenta. La primera es que el conjunto $\{\gamma\colon X \to G \mid \forall g \in G,\ \gamma(\Psi(g,x)) = g\gamma(x)g^{-1}\}$ se puede identificar con $\mathrm{Gau}(\Psi)$ al poner $\varphi(x) = \Psi(\gamma(x), x)$, siempre que podamos garantizar que para cada $x \in X$, el subgrupo de isotropía G_x sea precisamente $\{e\}$; en la terminología usual decimos que una acción con esta propiedad es *libre*. Bajo esta hipótesis resulta fácil comprobar que si $\varphi_i \leftrightarrow \gamma_i$ $(i = 1,2)$, entonces $\varphi_1 \circ \varphi_2 \leftrightarrow \gamma_2\gamma_1$, siendo $\gamma_2\gamma_1$ la función $x \mapsto \gamma_2(x)\gamma_1(x)$. Si la acción es libre, cada órbita $[x]$ está en correspondencia biyectiva con G y también es fácil ver que en este caso el conjunto $\{s\colon X \to G \mid \forall g \in G,\ s(\Psi(g,x)) = s(x)g^{-1}\}$ se puede identificar con $\Gamma(X)$ al poner $\sigma([x]) = \Psi(s(x), x)$.

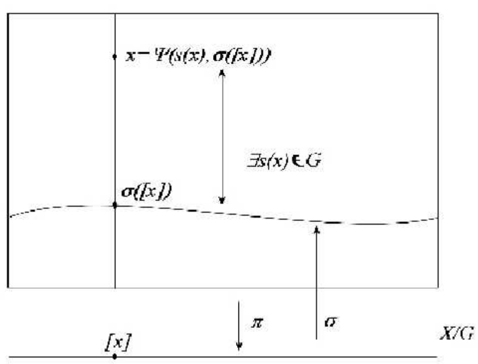

Figura 3:

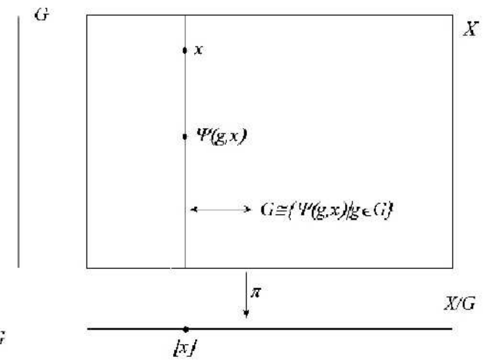

Figura 4:

Obsérvese que el grupo $\mathcal{G} = \mathrm{Gau}(\Psi)$ actúa en el conjunto $\mathcal{X} = \Gamma(X)$ mediante la correspondencia, $(\varphi, \sigma) \mapsto \varphi \cdot \sigma$ de manera que $\varphi \cdot \sigma([x]) = \varphi\,(\sigma([x]))$ y entonces podemos repetir la imagen fundamental de las acciones; esta vez con el grupo $\mathcal{G} = \mathrm{Gau}(\Psi)$ actuando en $\mathcal{X} = \Gamma(X)$. El resultado se puede ver esquemáticamente en la Figura 5.

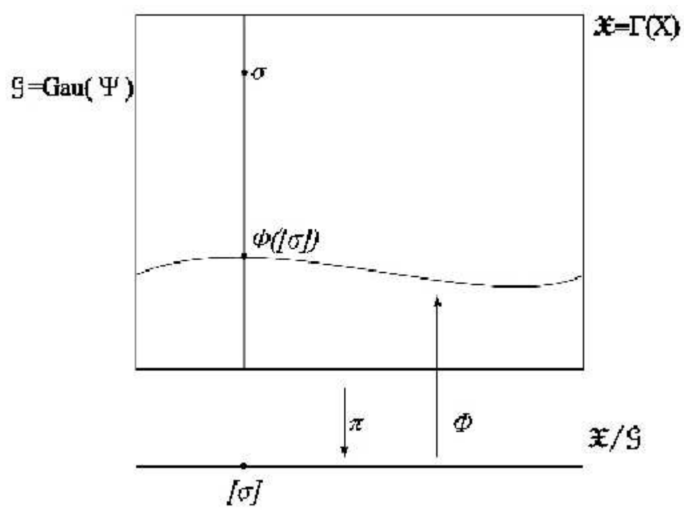

Figura 5:

Aquí el punto es que $\mathcal{G}$ realmente actúa en todos los espacios que de manera natural —geométrica o algebraica— se pueden asociar a la acción fundamental de la Figura 1. En particular, si G es un grupo de Lie, X es una variedad diferenciable y si la acción es tal que X/G es también una variedad diferenciable para la que π es una sumersión, entonces $\mathcal{G}$ actúa en los campos vectoriales de X, en las métricas de X, en las conexiones de X, etc.

En efecto, los campos vectoriales, las métricas, las conexiones, y en general todos los objetos geométricos son secciones de fibraciones similares a $\pi \colon X \to X/G$ para las que el esquema general es prácticamente idéntico al de la Figura 4. De hecho, en presencia de una acción $\Psi \colon G \times X \to X$, los campos vectoriales, las métricas, o las conexiones, son secciones de fibraciones asociadas a alguna *representación* $\rho \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ para algún espacio vectorial V adecuado, [1] o más generalmente, a homomorfismos $\rho \colon G \to \mathrm{Difeo}(Y)$ de G en el grupo de difeomorfismos de una variedad Y.

La construcción general es la siguiente. Dada una variedad diferenciable Y y un homomorfismo $\rho \colon G \to \mathrm{Difeo}(Y)$, se define una nueva acción $G \times X \times Y \to X \times Y$, mediante $(g, x, y) \mapsto (\Psi(g, x), \rho(g)(y))$ y se considera el conjunto $X[Y] = X \times Y/G$ de las órbitas de esta acción. Si la acción $\Psi \colon G \times X \to X$ es libre, entonces se obtiene un diagrama similar al de la Figura 3 como se muestra en la Figura 6.

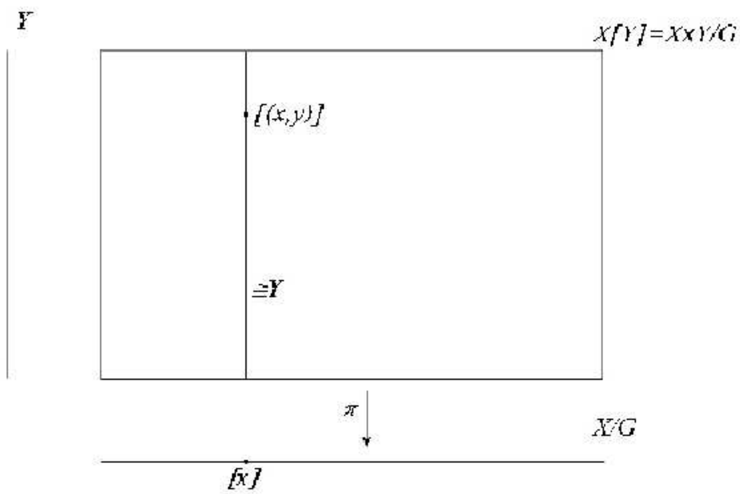

Figura 6:

En efecto, para cada par $(x, y) \in X \times Y$, la variedad Y se puede poner en correspondencia biyectiva con $\{(\Psi(g, x), \rho(g)(y)) \mid g \in G\}$. El conjunto $\Gamma(X[Y])$ de las secciones de $X[Y]$ se pueden poner en corres-

[1]Recordamos al lector que $\mathrm{GL}(V)$ denota al grupo de todas las transformaciones lineales invertibles del espacio vectorial V en sí mismo y que una representación $\rho \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es un homomorfismo de grupos; esto es, $\rho(gh) = \rho(g) \circ \rho(h)$.

pondencia biyectiva con

$$\{f\colon X \to Y \mid f(\Psi(g,x)) = \rho(g)(f(x))\}$$

Las funciones f que satisfacen la propiedad que caracteriza a este conjunto se llaman *equivariantes* y es precisamente dicha propiedad la que permite demostrar que queda bien definida una sección $\sigma_f\colon X/G \to X \times Y/G$, al poner $\sigma_f([x]) = [(x, f(x))]$.

El punto importante a notar aquí es que el grupo de 'gauge' $\mathrm{Gau}(\Psi)$ actúa en $\Gamma(X[Y])$ mediante, $(\varphi, f) \mapsto \varphi \cdot f$ con

$$(\varphi \cdot f)(x) = \rho(\gamma(x))(f(\varphi^{-1}(x))),$$

siendo $\gamma(x) \in G$ el único elemento tal que $\varphi(x) = \Psi(\gamma(x), x)$. Bajo esta acción obtenemos nuevamente un esquema como los anteriores:

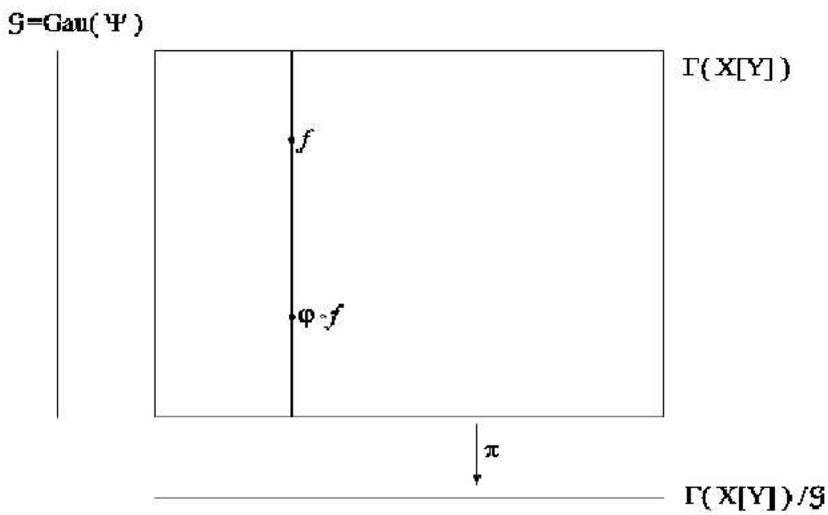

Figura 7:

El objetivo de las llamadas *teorías de gauge* consiste en determinar la fibración $Y \to X/G$ cuyas secciones $\Gamma(X[Y])$ son *conexiones*; las conexiones son los objetos que necesitamos para 'derivar' —en el espíritu del cálculo diferencial— las secciones de la fibración $X \to X/G$ para volver a obtener secciones de la misma fibración. Esquemáticamente, el acto de 'derivar' una sección $\sigma \in \Gamma(X)$ lo pensamos como una asociación $\sigma \mapsto \nabla\sigma$, en el que requerimos que $\nabla\sigma \in \Gamma(X)$, tomando $\nabla \in \Gamma(X[Y])$ (ver Figura 8). Luego, al poner $\mathcal{Y} = \Gamma(X[Y])$ y considerar la acción del grupo $\mathcal{G} = \mathrm{Gau}(\Psi)$, lo que interesa es determinar la estructura del espacio $\mathcal{Y}/\mathcal{G}$ de las distintas órbitas bajo la acción del grupo de 'gauge' (ver Figura 9).

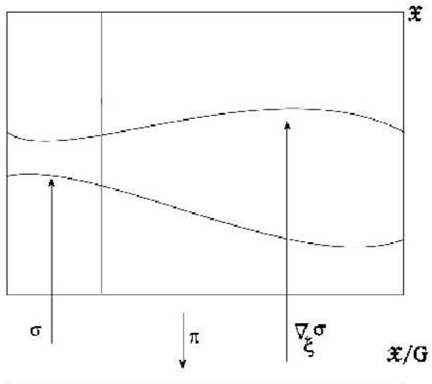

Figura 8:

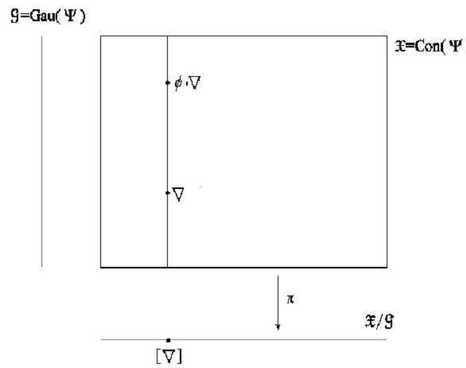

Figura 9:

En la física, las conexiones con las que se derivan las secciones de la fibración $X \to X/G$ definida por una acción libre de G en X se llaman *potenciales*. Dos potenciales son equivalentes, en el sentido de que producen la misma física, si uno se obtiene del otro mediante una transformación del grupo de 'gauge'. Una aplicación importante de las teorías de 'gauge' en la geometría y la topología diferencial fue descubierta por Donaldson en 1983-1984 al encontrar que cuando el grupo $G = SU(2) = \{g \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \mid g\,\bar{g}^t = \mathbb{1}_{2\times 2}\}$ actúa en X de tal manera que X/G es una variedad compacta, orientada y simplemente conexa de dimensión 4, el espacio de órbitas $\mathcal{Y}/\mathcal{G}$ tiene una estructura muy sencilla de comprender topológicamente; a saber, que se trata de una variedad con frontera en la que las componentes conexas de la frontera se pueden identificar con X/G mismo y una serie de copias de $\mathbb{CP}^2$ —la variedad de todos los subespacios de dimensión 1 dentro de $\mathbb{C}^2$— de cada una de las cuales se ha removido un cono al infinito (ver Figura 10). Referimos al lector interesado a las notas de Blaine Lawson [1].

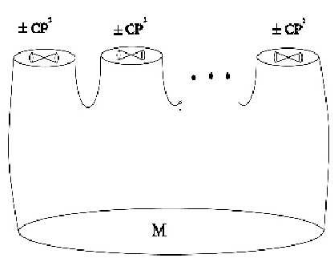

Figura 10:

Agradecimientos

Los autores de este trabajo desean agradecer el apoyo del Proyecto BFM 2003-02949 de España, el apoyo del Proyecto InterDiscipl 2005-MB1411 y el financiamiento recibido a través del proyecto CONACyT 46274 “Estructuras Geométricas Distinguidas IV”, así como la hospitalidad del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Santiago de Compostela, del Centro de Investigación en Matemáticas A.C. y de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Guanajuato.

Referencias

[1] Lawson, B. The Theory of Gauge Fields in Four Dimensions, CBMS No. 58, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1983.

[2] Lee, JṀ; Riemmanian manifoilds; an introduction to curvature, Graduate Texts in Mathematics No. 176, Springer-Verlag, New York, 1997.

[3] Sternberg, S; Lectures on differential geometry, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[4] Warner, F; Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott, Foresman, Glenview, Ill, 1964.