

DOI: <https://doi.org/10.47234/mm.8207>

Resolviendo laberintos usando ecuaciones diferenciales parciales

Reymundo Itzá Balam

Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación,
Centro de Investigación en Matemáticas A.C, Unidad Mérida
reymundo.itza@cimat.mx

y

Miguel Uh Zapata

Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación,
Centro de Investigación en Matemáticas A.C, Unidad Mérida
angeluh@cimat.mx

1. Introducción

La resolución de laberintos es uno de los juegos de mesa en solitario más famosos y clásicos, ampliamente estudiado tanto en su forma recreativa como en aplicaciones computacionales [6]. Más allá de ser un simple pasatiempo, representa un desafío intelectual que estimula la lógica, la creatividad y la perseverancia. Resolver un laberinto no solo implica encontrar una salida, sino también desarrollar estrategias y tomar decisiones bajo incertidumbre. Por estas razones, los laberintos han capturado el interés de jugadores, educadores e investigadores, convirtiéndose en una poderosa herramienta para el aprendizaje y la exploración de conceptos fundamentales en la computación científica, inteligencia artificial, teoría de grafos, entre otros.

La figura 1 muestra algunos ejemplos de laberintos planos con distintas características geométricas. En esencia, el objetivo del juego es desplazarse desde un punto hasta otro punto a través de caminos definidos dentro del laberinto, aunque existen variantes que plantean diferentes retos. No obstante, todos los laberintos estudiados en este trabajo comparten un rasgo común: poseen una entrada y una salida claramente



Figura 1. Diferentes tipos de laberintos.

definidas, y se parte del supuesto de que existe al menos un camino que conecta ambos puntos.

La resolución computacional de laberintos permite abordar el problema desde diversas perspectivas: desde encontrar un camino óptimo, hasta minimizar el tiempo de recorrido o simplemente hallar un trayecto válido. Actualmente, existen algoritmos que resuelven sistemáticamente este tipo de problemas, muchos de los cuales emplean estructuras de control de flujo con condicionales anidadas y repetitivas [6]. Una de las aproximaciones más poderosas para abordar estos desafíos es a través de la teoría de grafos, que permite modelar laberintos como conjuntos de nodos y aristas, facilitando así el análisis y la búsqueda de caminos óptimos. Algoritmos clásicos como la búsqueda en profundidad (DFS), búsqueda en anchura (BFS) o el algoritmo A* se apoyan en estos conceptos para explorar el espacio de soluciones de forma eficiente [6]. Otros algoritmos modernos se apoyan en datos de sensores, adoptando estrategias de retroalimentación en contextos como las competencias internacionales de solución de laberintos [5, 10].

La resolución de laberintos, aunque en la mayoría de los casos se centra en el uso de herramientas computacionales, también ha sido explorada a través de fenómenos físico-químicos. Por ejemplo, en el trabajo de Lovass et al. [8], se estudia experimentalmente la resolución de laberintos mediante el flujo de Marangoni inducido por la temperatura, el cual surge por gradientes en la tensión superficial causados por estas variaciones térmicas. Se demuestra que este flujo puede encontrar el camino más corto en un laberinto lleno con una solución caliente de ácido graso, generando el gradiente de temperatura al enfriar la salida. Además, los resultados se complementan con un análisis teórico sustentado en un modelo matemático formulado a partir de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs). En este caso, se considera una capa delgada de fluido capaz de conducir calor bajo la aproximación de Boussinesq. En esta

Palabras clave: Laberinto, ecuación de Laplace, elemento finito, distribución de calor, condiciones de frontera.

aproximación las ecuaciones de conservación de masa y de movimiento tienen una densidad constante excepto en el término de flotación donde la densidad es variable [8]. Otro ejemplo destacado del uso de EDPs en la resolución de laberintos es el trabajo desarrollado por Finardi en su tesis doctoral [3]. En dicho estudio se analiza la ecuación eikonal, una EDP de primer orden y no lineal que surge en problemas de propagación de ondas. Entre las aplicaciones consideradas se incluyen simulaciones para la resolución óptima de laberintos, modelados como dominios con obstáculos y tratados numéricamente mediante técnicas basadas en el uso de interfaces.

En este artículo, la solución de laberintos se plantea a partir de una idea inicial sencilla: la distribución de temperaturas en una placa. La ecuación de calor, que describe un proceso de difusión, modela la evolución de la temperatura en una placa con una o varias fuentes de calor. La solución de esta ecuación, después de un tiempo suficientemente largo, muestra cómo se pegan suavemente las temperaturas máximas (provocadas por las fuentes de calor) y las temperaturas mínimas en el resto de la placa. De especial interés es el estado final de distribución de temperaturas (estado estacionario), que en su forma más sencilla puede modelarse mediante la ecuación de Laplace en dos dimensiones (2D). Esta EDP se complementa con condiciones de frontera específicas: se imponen condiciones de Dirichlet en los puntos de entrada y salida del laberinto, mientras que las paredes internas se modelan mediante condiciones de Neumann. Las condiciones de Dirichlet permiten fijar con precisión los extremos del trayecto, definiendo así los puntos de inicio y destino. Por otro lado, las condiciones de Neumann garantizan que no exista flujo a través de las paredes, lo cual se traduce matemáticamente en que la derivada normal de la función solución respecto a la pared es cero. Esto implica que no hay componente del gradiente que atraviese la frontera, reproduciendo el comportamiento característico de un laberinto con barreras impenetrables: el camino no puede cruzar las paredes. Este enfoque logra un equilibrio entre simplicidad y efectividad, destacando la versatilidad del modelo matemático propuesto.

Por otra parte, el Principio del Máximo es una propiedad fundamental de las soluciones de la ecuación de Laplace y se manifiesta naturalmente en el contexto de la solución de laberintos. Este principio establece que el valor máximo (y también el mínimo) de una solución armónica se alcanza en la frontera del dominio; en otras palabras, no pueden existir extremos locales en el interior, a menos que la solución sea constante. Este principio sugiere que la información clave para la solución suele estar determinada por las condiciones en el borde del dominio, lo cual resulta coherente con la forma en que se abordan este tipo de problemas.

Además, en dominios simples, es posible obtener de forma explícita la solución exacta del problema. No obstante, cuando se trata de dominios más complejos, como los ilustrados en la figura 1, se vuelve necesario recurrir a métodos numéricos para resolver la ecuación y encontrar la solución correspondiente. Para resolver este problema clásico existen diversas metodologías numéricas, siendo el método de elementos finitos (FEM, por sus siglas en inglés) una de las más populares debido a su flexibilidad y robustez para resolver la correspondiente EDP en dominios arbitrarios [2, 7, 11, 1]. En este trabajo, utilizaremos esta herramienta numérica para abordar el problema planteado.

El resto de este artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se presentará el problema elíptico de valores de frontera que queremos resolver. En esta sección también se introduce la formulación variacional débil, en la cual se centrará nuestro análisis numérico. La sección 3 estará dedicada a la descripción del método de elementos finitos para aproximar nuestras ecuaciones y obtener soluciones aproximadas a nuestro problema. La sección 4 se centrará en la resolución de laberintos. Finalmente, en la sección 5 se presentan las conclusiones.

2. Solución de laberintos 2D usando la ecuación de Laplace

El problema de la solución de laberintos surge a partir de una idea inicial sencilla: analizar la distribución de temperatura en una placa. Por una parte, la ecuación del calor, que describe un proceso de difusión, modela la evolución temporal de la temperatura en una placa con una o varias fuentes de calor. La solución de esta ecuación, tras un tiempo suficientemente largo, muestra cómo las regiones de temperatura máxima (provocadas por las fuentes) y mínima en el resto del dominio se conectan suavemente a medida que se alcanza un equilibrio térmico. Una vez alcanzado el estado estacionario –es decir, cuando la temperatura deja de variar con el tiempo–, el comportamiento del sistema puede describirse de forma más sencilla mediante la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Resolver esta ecuación nos proporciona directamente la distribución final de temperaturas, revelando la conexión entre las zonas de temperatura alta y baja dentro del dominio considerado.

La propiedad de distribución de temperaturas en una placa puede aprovecharse para abordar el problema del laberinto mediante la ecuación de Laplace: si se imponen condiciones de frontera apropiadas, por ejemplo, asignando una temperatura baja en la entrada y una alta en la salida. Además, si en el resto de las fronteras se establecen condiciones de Neumann homogéneas (es decir, sin flujo de calor), como se explicó

en la introducción, se evita el intercambio térmico a través de los bordes externos, concentrando el análisis en la trayectoria que conecta entrada y salida dentro del laberinto.

En esta sección abordaremos el problema elíptico de valores en la frontera que modela la solución de un laberinto en dos dimensiones. Primero, se presenta el problema de Laplace en 2D en su formulación clásica (fuerte), para posteriormente re-formularlo en términos de su formulación variacional (débil) y, finalmente, aplicar el método de elementos finitos.

2.1 Formulación clásica

Sea Ω el dominio computacional el cual es un conjunto abierto, acotado y arco-conexo en $\mathbb{R}^2$ con frontera $\Gamma = \partial\Omega$. Se supone, además que la frontera Γ está dividida en dos conjuntos Γ_D y Γ_N como se indica en la figura 2.

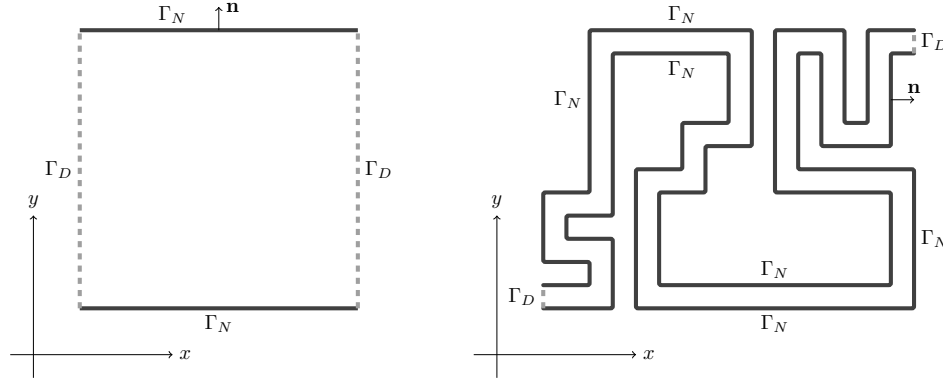


Figura 2. Ejemplos de dominios en el plano para el problema elíptico. La figura de la izquierda muestra el laberinto más simple, con entrada y salida alineadas. En contraste, la figura de la derecha representa un laberinto más complejo, que corresponde a un rectángulo alargado y deformado.

Es importante tener en cuenta que las fronteras Γ_D y Γ_N pueden estar compuestas a su vez por la unión finita de segmentos de curvas, como se ilustra en las figuras 1 y 2. El objetivo es encontrar la función u definida en $\bar{\Omega}$ (el cerrado de Ω , es decir, el dominio y la frontera), que satisface la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

junto con las condiciones de frontera dadas por:

$$u(\mathbf{x}) = u_D(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x})n_x + \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x})n_y = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N, \quad (3)$$

donde n_x y n_y son los componentes de la dirección normal $\mathbf{n}$ a la frontera en $\mathbf{x}$, con la orientación estándar. En este artículo, suponemos que u_D es una función conocida y está definida sobre Γ_D .

Como se explicó al inicio de esta sección, resolver el problema (1)–(3) con un dominio Ω representando el laberinto permite obtener la solución del mismo. Para ello, es fundamental identificar correctamente las regiones de la frontera: la sección A , donde se impone la temperatura máxima (condición de Dirichlet), y la sección B , correspondiente a la temperatura mínima (también de tipo Dirichlet). El resto de la frontera, en el que no hay intercambio de temperatura, se modela mediante condiciones de Neumann nulas. De este modo, la solución conecta la sección A (salida) con la sección B (entrada). En este contexto, las paredes de entrada y salida forman el subconjunto Γ_D , mientras que Γ_N representa el resto de las paredes del laberinto.

Para resolver numéricamente este problema, se aplica el método de elementos finitos, el cual hace uso de la formulación variacional de la ecuación de Laplace, y se describe en la siguiente sección.

2.2 Formulación variacional

El punto de partida para obtener una expresión variacional de la ecuación (1) consiste en multiplicar cada término por una *función de prueba* v e integrar sobre todo el dominio Ω , obteniendo la siguiente forma integral:

$$-\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) v d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) v d\mathbf{x} = 0. \quad (4)$$

Una función de prueba v , es una función que pertenece a un espacio de funciones dado por:

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_D\}, \quad (5)$$

donde $H^1(\Omega)$ es el *espacio de Sobolev de orden uno* definido como

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \mid \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + |v|^2) d\mathbf{x} < \infty \right\},$$

con su correspondiente producto interno

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + uv \right) d\mathbf{x},$$

y la norma

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{1/2} = \left(\int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + |v|^2) d\mathbf{x} \right)^{1/2}.$$

Mas información sobre estos espacios, las condiciones de regularidad sobre u y v , y del buen planteamiento del problema variacional puede encontrarse en [2].

Aplicando integración por partes las integrales del lado izquierdo de (4) se transforman en

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} d\mathbf{x} - \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} v n_x ds + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} v n_y ds \right) = 0.$$

Equivalentemente tenemos que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) v ds. \quad (6)$$

A continuación, observamos que las integrales de frontera pueden reescribirse en términos de integrales sobre los subconjuntos Γ_N y Γ_D de la frontera, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) v ds \\ &= \int_{\Gamma_N} \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) v ds + \int_{\Gamma_D} \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) v ds. \end{aligned}$$

Es importante notar que los operadores diferenciales que aparecen en las integrales sobre Γ_N corresponden a las condiciones de frontera de Neumann. En particular, utilizando (3), se obtiene que

$$\int_{\Gamma_N} \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) v ds = 0. \quad (7)$$

Asimismo, dado que v pertenece al espacio definido en (5), se cumple que

$$\int_{\Gamma_D} \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) v ds = 0. \quad (8)$$

Por tanto usando (7) y (8) en la ecuación (6) se obtiene:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\mathbf{x} = 0, \quad \forall v \in V. \quad (9)$$

Así se obtiene la formulación variacional de nuestro problema:

$$b(u, v) = 0, \quad \forall v \in V, \quad (10)$$

$$u(\mathbf{x}) = u_D(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \quad (11)$$

donde $b(u, v)$ es identificado como un funcional bilineal de la solución u y la función de prueba v , y está dado por

$$b(u, v) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\mathbf{x}. \quad (12)$$

Lo anterior sugiere que toda solución al problema clásico (1)–(3) de valores en la frontera (BVP) también satisface el problema (10)–(11) de valores en la frontera variacional (VBVP). No es difícil demostrar, la afirmación inversa, es decir, cualquier solución del VBVP también satisface el problema clásico de VBP. La demostración se basa en una versión más general del lema de Fourier. Para más detalles de esta prueba, se sugiere leer el capítulo 8 del libro de Demkowicz [2].

3. Discretización y el método de elemento finito

El espacio de funciones de prueba V es un espacio funcional y es de dimensión infinita. En general, se requiere un número infinito de funciones para aproximar la solución desconocida de (10) y (11). El *método de Galerkin* aproxima este espacio con otro espacio V_h generado con un número finito de N funciones linealmente independientes e_j del espacio de prueba V , definidas sobre todo Ω , y tal que $e_j(\mathbf{x}) = 0$ para todo valor $\mathbf{x}$ en la frontera de tipo Dirichlet.

3.1 Construcción de funciones base

Se consideran M elementos triangulares que discretizan el dominio bi-dimensional, como se muestra en la figura 3. Cada elemento se denota por Ω_s , con $s = 1, \dots, M$.

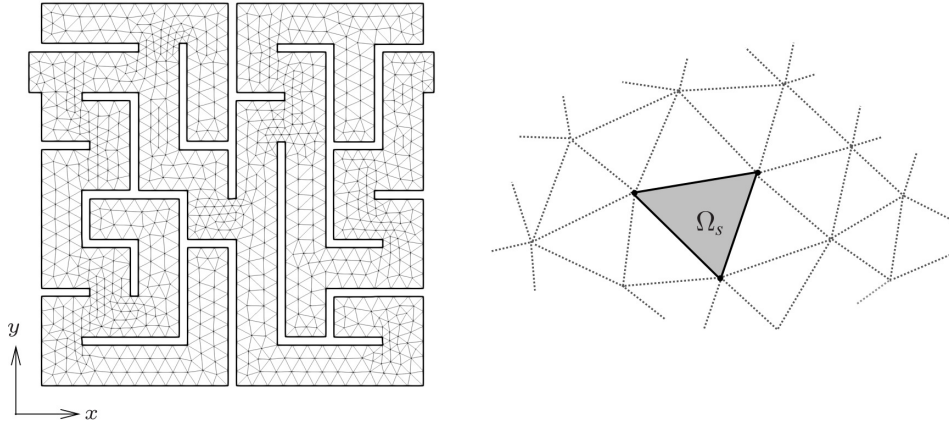


Figura 3. Discretización del dominio del problema del laberinto en elementos triangulares.

En la construcción de las funciones base e_j , se eligen funciones de forma lo más sencilla posible, de modo que cumplan $e_j(\mathbf{x}_j) = 1$ en el vértice $\mathbf{x}_j$ y $e_j(\mathbf{x}_i) = 0$ en los demás vértices $\mathbf{x}_i$, con $i \neq j$. Esto conduce a funciones lineales por partes, comúnmente conocidas como

funciones tipo *sombrero* por su forma característica. Cabe destacar que el número total de funciones base coincide con el número de vértices de la discretización en el interior del dominio, es decir, N . La figura 4 muestra un ejemplo representativo de estas funciones.

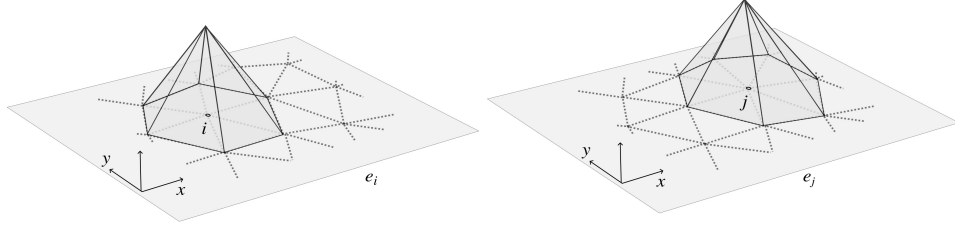


Figura 4. Funciones tipo sombrero e_j linealmente independientes con base en los vértices de la malla.

Una consecuencia inmediata de la definición de e_j es que, en cada elemento Ω_s , únicamente tres de estas funciones base son distintas de cero. Sin pérdida de generalidad, asociemos de manera local los tres vértices de Ω_s usando los índices 1, 2 y 3. Así, $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$ y $v_3 = (x_3, y_3)$ serán las coordenadas de vértices del triángulo y las funciones e_1 , e_2 y e_3 corresponden a aquellos planos donde uno de sus vértices es igual a 1, como se ilustra en la figura 5.

No es difícil ver que dichas funciones están dadas localmente por [7]:

$$e_1(x, y) = \left(\frac{y_2 - y_3}{2A_s} \right) x + \left(\frac{x_3 - x_2}{2A_s} \right) y + \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{2A_s}, \quad (x, y) \in \Omega_s, \quad (13)$$

$$e_2(x, y) = \left(\frac{y_3 - y_1}{2A_s} \right) x + \left(\frac{x_1 - x_3}{2A_s} \right) y + \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{2A_s}, \quad (x, y) \in \Omega_s, \quad (14)$$

$$e_3(x, y) = \left(\frac{y_1 - y_2}{2A_s} \right) x + \left(\frac{x_2 - x_1}{2A_s} \right) y + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2A_s}, \quad (x, y) \in \Omega_s, \quad (15)$$

donde A_s es el área del triángulo Ω_s . Mas aún, dado que las funciones base e_i están formados por planos, entonces sus derivadas cartesianas diferentes de cero sobre Ω_s son constantes. Esto facilita el cálculo del gradiente de la solución numérica.

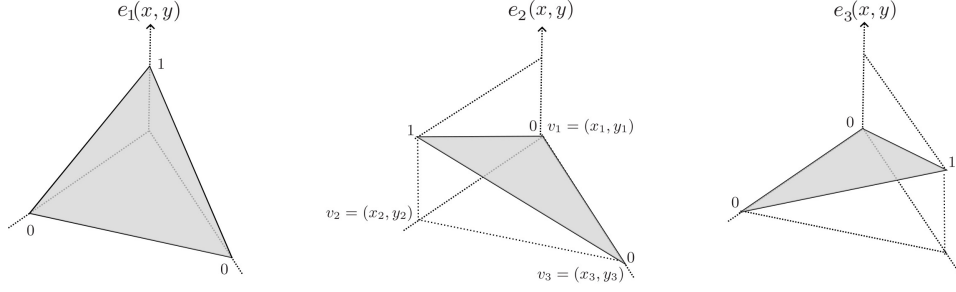


Figura 5. Funciones base e_1 , e_2 y e_3 diferentes de cero correspondiente al elemento Ω_s .

3.2 Sistema lineal

Ahora es posible aplicar el método de Galerkin utilizando funciones base de tipo sombrero para aproximar la solución del problema como

$$u(\mathbf{x}) \approx \bar{u}_D(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^N u_j e_j(\mathbf{x}), \quad (16)$$

donde los coeficientes constantes u_j son valores aún por determinar. Aquí, la función $\bar{u}_D$ representa un levantamiento de la condición de frontera u_D (la restricción de $\bar{u}_D$ a la frontera de Dirichlet Γ_D coincide con la función u_D). Las funciones e_j son las funciones base previamente presentadas y los coeficientes desconocidos u_j son llamados *grados de libertad* [7, 11].

Los coeficientes desconocidos u_j presentes en (16) pueden determinarse si se emplean las funciones base e_j para aproximar las funciones de prueba v , de la siguiente manera:

$$v(\mathbf{x}) \approx \sum_{\ell=1}^N v_\ell e_\ell(\mathbf{x}). \quad (17)$$

Sustituyendo las ecuaciones (16) y (17) en la formulación variacional abstracta (12), se obtiene

$$b\left(\bar{u}_D + \sum_{j=1}^N u_j e_j, \sum_{\ell=1}^N v_\ell e_\ell\right) = 0. \quad (18)$$

La ecuación (18) se debe satisfacer para toda función de prueba v , lo que en la aproximación de dimensión finita se traduce en la ecuación debe ser satisfecha para toda elección de coeficientes v_ℓ , $\ell = 1, \dots, N$. En particular, si en (18) se selecciona $v_\ell = \delta_{\ell i}$ (delta de Kronecker¹)

¹La función delta de Kronecker satisface $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ en caso contrario, $i \neq j$.

entonces se obtiene el siguiente sistema de N ecuaciones algebraicas:

$$b\left(\bar{u}_D + \sum_{j=1}^N u_j e_j, e_i\right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Usando las propiedades del operador bilineal b , se puede reescribir de forma equivalente como:

$$b(\bar{u}_D, e_i) + \sum_{j=1}^N b(e_j, e_i) u_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Como la función $\bar{u}_D$ representa un levantamiento de la condición de frontera u_D (el cual es conocido), es aconsejable mover este término al lado derecho de la ecuación de la siguiente forma:

$$\sum_{j=1}^N u_j b(e_j, e_i) = l(e_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (19)$$

donde $l(e_i) = -b(\bar{u}_D, e_i)$. La matriz $\{b_{ij}\} := \{b(e_j, e_i)\}$ es llamada la *matriz de rigidez (global)* y el vector $\{l_i\} := \{l(e_i)\}$ es el *vector de carga (global)*.

Una etapa clave del método de elementos finitos ocurre tras la discretización del dominio, permitiendo trabajar de forma individual en cada elemento. En este caso se tiene

$$b(e_j, e_i) = \sum_{s=1}^M b_s(e_j, e_i) \quad \text{y} \quad l(e_i) = \sum_{s=1}^M l_s(e_i),$$

donde

$$b_s(e_j, e_i) = \int_{\Omega_s} \left(\frac{\partial e_j}{\partial x} \frac{\partial e_i}{\partial x} + \frac{\partial e_j}{\partial y} \frac{\partial e_i}{\partial y} \right) d\mathbf{x}$$

y

$$l_s(e_i) = - \int_{\Omega_s} \left(\frac{\partial \bar{u}_D}{\partial x} \frac{\partial e_i}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_D}{\partial y} \frac{\partial e_i}{\partial y} \right) d\mathbf{x},$$

respectivamente. Por lo tanto, el problema puede ser calculado mediante una suma de problemas más pequeños correspondientes a cada elemento Ω_s . Es decir, usando (19) y con cierta flexibilidad en la notación, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{s=1}^M \left[\sum_{j=1}^N u_j b_s(e_j, e_i) = l_s(e_i) \right], \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

De manera que lo único que resta es calcular los valores de b_s y l_s por cada elemento Ω_s dado por las funciones base de tipo sombrero. Así,

para resolver el problema aproximado tenemos que calcular la matriz $\{b_{ij}\}$, el vector $\{l_i\}$ y resolver el sistema lineal de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^N u_j b_{ij} = l_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (20)$$

Finalmente, solo falta resolver el sistema lineal (20). Existen diversos métodos para hacerlo, desde métodos directos como la *Eliminación Gaussiana* hasta métodos iterativos como *Gauss-Seidel*, por mencionar algunos. La elección del método determinará la eficiencia en la obtención de la solución. Es importante notar que, a medida que el mallado se hace más fino, aumenta el número de incógnitas del sistema, lo que puede impactar significativamente en el tiempo de cómputo y en los recursos necesarios. En este trabajo, el esquema numérico fue implementado siguiendo el trabajo clásico de Alberty et al. [1] ampliamente validado en la solución de ecuaciones elípticas en dos dimensiones.

4. Resultados numéricos

En esta sección se aborda la solución numérica de problemas relacionados con laberintos, incluyendo casos con formas y niveles de complejidad variados. El análisis se llevará a cabo en dos etapas: en la primera etapa se introduce una idea sencilla pero ingeniosa, destacando cómo la correcta selección de las condiciones iniciales permite obtener soluciones efectivas. En esta etapa, se busca ilustrar los principios básicos del método aplicado a problemas simples. En la segunda etapa se amplía el enfoque para considerar dominios más complejos, como los diseños representados en la figura 1. En este caso, las condiciones de frontera desempeñan un papel crucial al definir el recorrido del «juego del laberinto».

En ambos escenarios, se establecen condiciones de frontera específicas. A la entrada y salida del laberinto se les asignan condiciones de Dirichlet, mientras que las paredes internas se modelan con condiciones de Neumann. Las condiciones de Dirichlet en los extremos del camino permiten definir de manera precisa los puntos de entrada y salida, mientras que las condiciones de Neumann en las paredes aseguran que no exista flujo a través de ellas, reproduciendo así el comportamiento típico de un laberinto con paredes impenetrables. Este enfoque combina simplicidad y eficacia, demostrando la versatilidad del esquema numérico propuesto.

Consideremos en concreto el siguiente problema de Laplace, definido sobre el dominio Ω :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (21)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_{D_0}, \quad (22)$$

$$u(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \Gamma_{D_1}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)n_x + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)n_y = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_N. \quad (24)$$

Aquí, el dominio Ω representa el laberinto, mientras que las diferentes partes de su frontera se definen de la siguiente manera: Γ_{D_0} denota la entrada, Γ_{D_1} corresponde a la salida, y Γ_N representa las paredes del laberinto. Para este ejemplo se aplica el método de elemento finito para resolver la ecuación de Laplace (21)-(24). En estos ejemplos se utiliza una *mallla no estructurada*, caracterizada por una disposición y forma irregular y no uniforme de los elementos triangulares [9]. Esta mallla se genera especificando los tamaños deseados de los triángulos mediante el software *Gmsh* [4].

El algoritmo fue evaluado en diversos escenarios en los que es posible determinar la solución exacta de forma explícita, obteniéndose resultados numéricos precisos y consistentes con lo esperado. Estos casos de validación no se presentan en este trabajo, ya que no constituyen el objetivo principal de este estudio. Cabe señalar que, en algunos de los ejemplos considerados en este trabajo, también es posible obtener la solución exacta de manera explícita; sin embargo, en nuestro enfoque nos centramos únicamente en la solución numérica.

4.1 Laberintos simples

Para ilustrar el resultado de resolver el problema (21)-(24), consideremos dos laberintos sencillos ubicados dentro del cuadrado unitario, como se muestra en las figuras 6 (a) y (d). Obsérvese que se han etiquetado de manera específica las siguientes partes del dominio: la entrada (Γ_{D_0}), la salida (Γ_{D_1}) y las paredes (Γ_N). Las flechas indican la entrada y la salida del laberinto, es decir, la dirección del recorrido. El primer caso corresponde a un rectángulo que muestra el ejemplo más simple de laberinto, mientras que el segundo caso presenta un laberinto que no es otra cosa más que un rectángulo deformado, por lo que podemos aplicar las mismas ideas en ambos casos.

La figura 6 muestra la solución de los dos laberintos (imágenes (b) y (e)) junto con el campo gradiente (imágenes (c) y (f)). La figura 6 (b) muestra claramente que la solución del problema de Laplace es una superficie continua que representa la temperatura en todo el dominio.

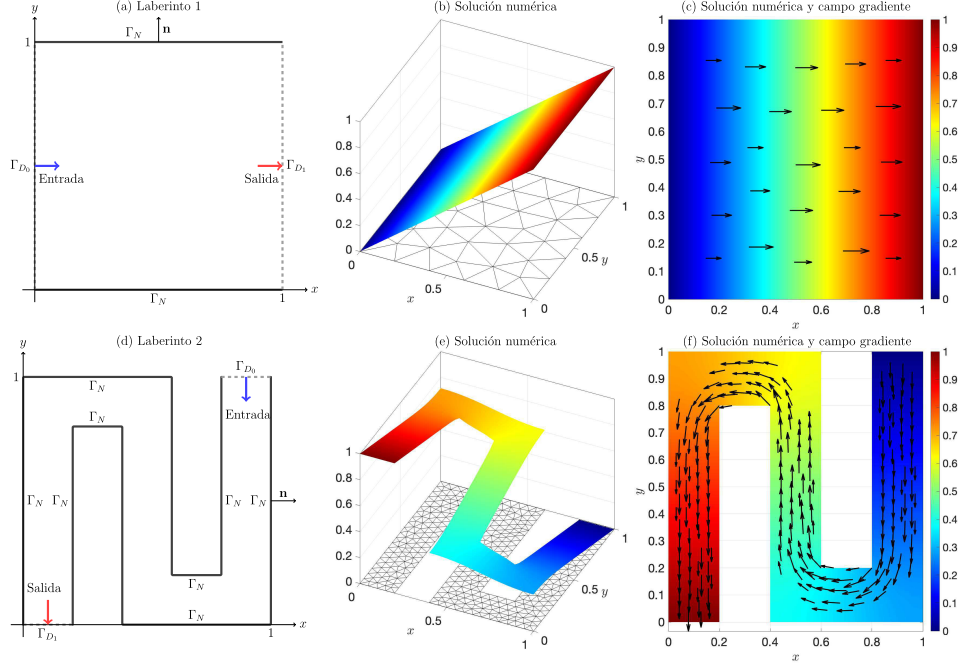


Figura 6. En las figuras (a) y (d) se muestran laberintos sencillos donde se ubican claramente las entradas (Γ_{D_0}), las salidas (Γ_{D_1}) y las paredes (Γ_N). Las figuras (b) y (e) muestran la superficie de la solución y la malla utilizada para la discretización. Finalmente, en las figuras (c) y (f) se presenta la solución para los laberintos, representada mediante los vectores del campo gradiente.

Esta superficie conecta la entrada (Γ_{D_0} , que corresponde a la menor temperatura) con la salida (Γ_{D_1} , que corresponde a la mayor temperatura). Los valores en azul representan las magnitudes más pequeñas, mientras que los valores en rojo corresponden a las magnitudes más grandes. Esta solución nos permite visualizar el camino a seguir para resolver nuestro problema, utilizando la paleta de colores como guía. Algo muy similar y consistente se observa en la figura 6 (e).

Por otro lado, las figuras 6 (c) y (f) muestran que los vectores de mayor magnitud del campo gradiente indican la dirección de mayor cambio en la temperatura, señalando de esta forma la salida del laberinto. Por último, en la misma figura con las imágenes (b) y (e) se muestra la malla triangular utilizada en cada caso, lo que permite visualizar la discretización aplicada para obtener la solución.

Como se puede observar, el método de elementos finitos es suficientemente robusto para obtener soluciones tanto en mallas gruesas (con pocos elementos) como en mallas finas (con muchos elementos). No obstante, con el fin de representar con mayor claridad el campo vectorial asociado a las derivadas de la solución, se opta por utilizar mallas finas

en todos los casos, especialmente en los laberintos más complejos que se presentan a continuación.

4.2 Laberintos complejos

A continuación, se presentan soluciones para laberintos más complejos, demostrando que la estrategia es aplicable independientemente de su geometría o tamaño. El primer conjunto incluye soluciones para laberintos con diversas configuraciones y formas, como los mostrados en la figura 1. Cada laberinto posee características distintivas: uno formado exclusivamente por líneas rectas, otro por líneas curvas y un tercero con una combinación de ambos. El último ejemplo analiza un laberinto con una cantidad significativamente mayor de caminos en comparación con los casos previos, lo que permite evaluar el desempeño del método en estructuras más complejas. Los resultados obtenidos confirman que la estrategia de solución es independiente del tamaño del laberinto y se mantiene eficaz incluso en configuraciones de mayor complejidad como se muestra en la figura 7. En resumen, estos ejemplos tienen como propósito destacar la flexibilidad del método y demostrar cómo la estrategia de solución se adapta eficazmente a cada caso.

Las figuras 7(a), (d) y (g) muestran la entrada y la salida del laberinto. Aunque no se representan explícitamente en la imagen, se aplican las mismas condiciones de frontera descritas en la subsección anterior. La malla utilizada en cada caso, junto con la superficie solución, se presenta en las figuras 7(b), (e) y (h). Por otro lado, los vectores de mayor magnitud del campo gradiente indican el camino a seguir para resolver el laberinto. Esta visualización del gradiente confirma que la aproximación numérica captura adecuadamente el comportamiento esperado del problema, como se puede observar en las figuras 7(c), (f) y (i).

Finalmente, la figura 8 presenta la solución de un laberinto de mayor tamaño, lo que permite evaluar la eficacia del método en estructuras más complejas. Es importante destacar que, al igual que en los casos anteriores, la metodología numérica implementada es capaz de identificar con precisión el camino de salida, incluso en escenarios que representarían un desafío considerable para una persona sin asistencia computacional. Estos resultados refuerzan la robustez y versatilidad del enfoque propuesto, evidenciando su aplicabilidad a una amplia gama de configuraciones y escalas.

A partir del análisis de las gráficas obtenidas, se observa que los caminos sin salida mantienen una temperatura constante. Esto se debe a las condiciones de frontera impuestas, que impiden la difusión del calor en esas regiones. En contraste, el único trayecto que presenta una variación continua de temperatura es el que conecta directamente

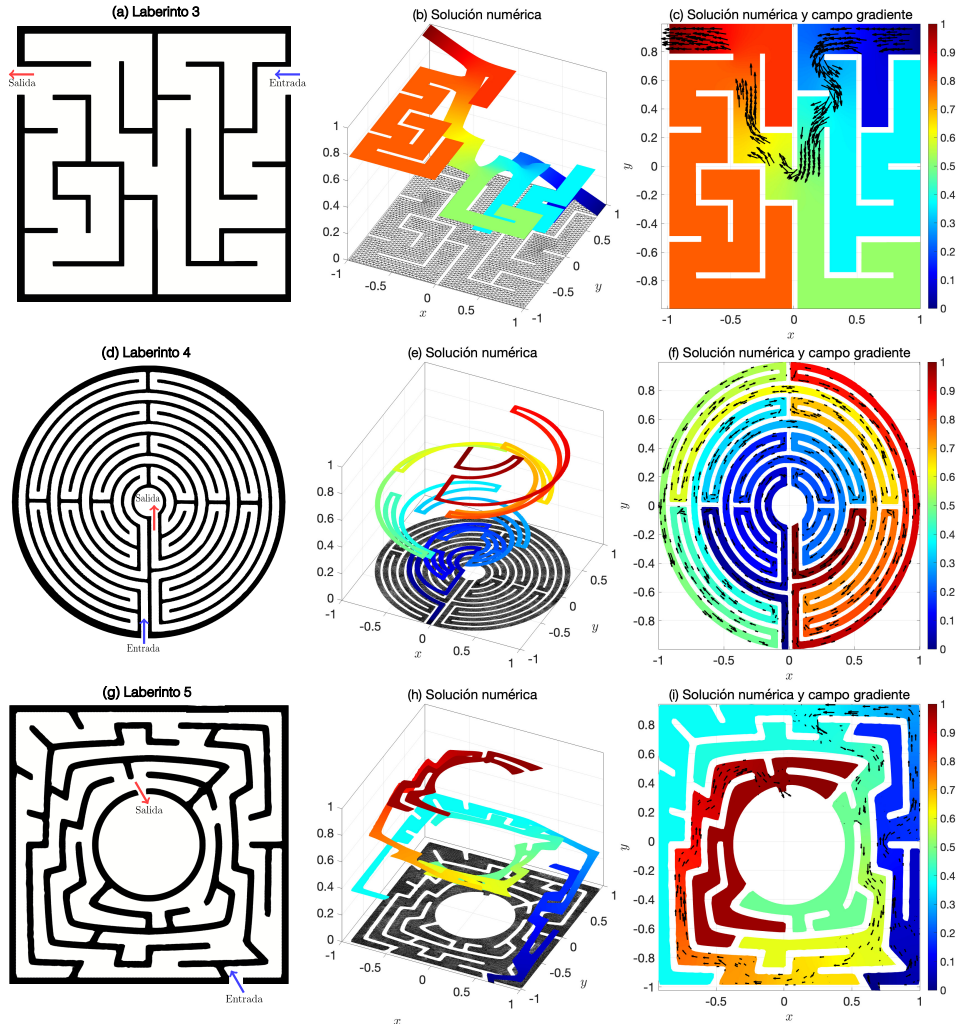


Figura 7. Solución de los tres laberintos presentados en la figura 1.

la entrada con la salida del laberinto, lo que evidencia que es el único camino físicamente relevante en términos del flujo de calor. Los caminos laterales adoptan un valor constante, determinado por la temperatura en el punto donde se unen al trayecto principal.

5. Conclusiones

En este trabajo se desarrolló e implementó una estrategia basada en la solución numérica de la ecuación de Laplace para resolver laberintos con diferentes características geométricas, utilizando el método de elemento finito. Los resultados obtenidos demuestran que el método numérico fue implementado correctamente, resolviendo de manera efectiva los

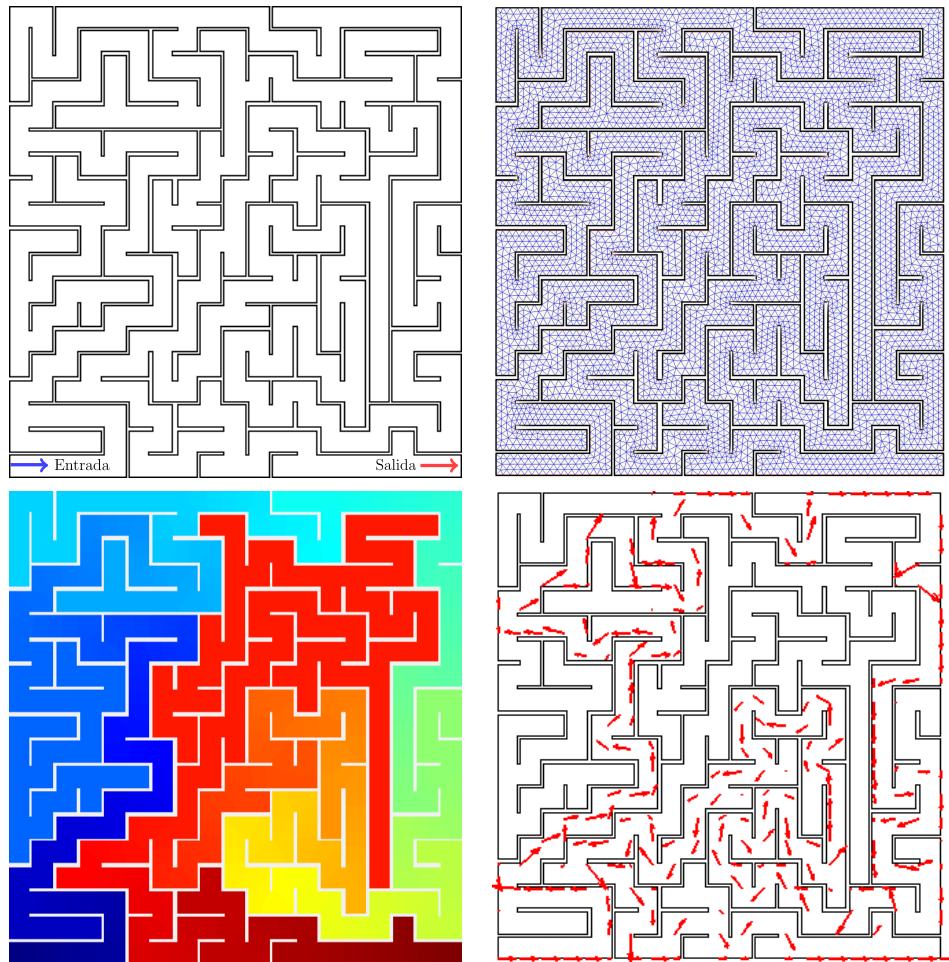


Figura 8. Configuración y solución de un laberinto con un número significativo de caminos.

laberintos presentados, incluyendo aquellos con líneas rectas, curvas y estructuras mixtas. La visualización del campo gradiente permitió identificar claramente las trayectorias de salida dentro de los laberintos. Además, la flexibilidad del método permite adaptarlo a diversas configuraciones de laberintos, destacando su potencial como herramienta para resolver problemas similares en otros contextos, como la distribución de temperaturas en placas de circuito impreso.

Agradecimientos

Se agradece a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (Secihti) por el apoyo parcial a través del programa *Investigadores e Investigadoras por México* y por el Proyecto Ciencia de Frontera No. CF-2023-I-2639. También se agradecen las instalaciones de supercómputo proporcionadas por el CIMAT, específicamente el Clúster Mérida TOLOK, por su invaluable apoyo en la realización de esta investigación.

Bibliografía

- [1] J. Albery, C. Carstensen y S. A. Funken, «Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation», *Numerical algorithms*, vol. 20, núm. 2, 1999, 117–137, <https://doi.org/10.1023/A:1019155918070>.
- [2] L. Demkowicz, *Computing with hp-adaptive finite elements: volume 1 one and two dimensional elliptic and maxwell problems*, Chapman and Hall/CRC, 2006.
- [3] P. R. Finardi, «Ecuación iconal, fast marching e caminhos ótimos», tesis de doctorado, [sn], 2016.
- [4] C. Geuzaine y J.-F. Remacle, «Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities», *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 79, núm. 11, 2009, 1309–1331, <https://doi.org/10.1002/nme.2579>.
- [5] A. Islam, F. Ahmad y P. Sathya, «Shortest distance maze solving robot», *IJRET: International Journal of Research in Engineering and Technology*, vol. 05, núm. 07, 2016, 253–259.
- [6] N. Kumar y S. Kaur, «A review of various maze solving algorithms based on graph theory», *International Journal for Scientific Research & Development*, vol. 6, núm. 12, 2019, 431–434.
- [7] R. W. Lewis, P. Nithiarasu y K. N. Seetharamu, *Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow*, John Wiley & Sons, 2004.
- [8] P. Lovass, M. Branicki, R. Tóth, A. Braun, K. Suzuno, D. Ueyama y I. Lagzi, «Maze solving using temperature-induced Marangoni flow», *Rsc Advances*, vol. 5, núm. 60, 2015, 48563–48568, <https://doi.org/10.1039/C5RA08207B>.
- [9] J. F. Thompson, B. K. Soni y N. P. Weatherill, *Handbook of grid generation*, CRC press, 1998.
- [10] L. Wyard-Scott y Q.-H. Meng, «A potential maze solving algorithm for a micromouse robot», en *IEEE Pacific Rim Conference on Communications, Computers, and Signal Processing. Proceedings*, IEEE, 1995, <https://doi.org/10.1109/PACRIM.1995.520440>, 614–618.
- [11] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor y J. Z. Zhu, *The finite element method: its basis and fundamentals*, Elsevier, 2005.