

DOI: <https://doi.org/10.47234/mm.7107>

# Espacios de Alexandrov y el problema de Erdős-Perelman

Mauricio Che Moguel  
Department of Mathematical Sciences  
Durham University  
Durham, Reino Unido  
[mauricio.a.che-moguel@durham.ac.uk](mailto:mauricio.a.che-moguel@durham.ac.uk)

En [9], P. Erdős propuso una lista de problemas abiertos en teoría de números, análisis y geometría. En particular, el problema 17 de su lista conjeturaba lo siguiente:

Si  $S$  es un conjunto de  $2^n + 1$  puntos en  $\mathbb{R}^n$  entonces tres de ellos forman un ángulo obtuso.

Este problema fue resuelto por L. Danzer y B. Grünbaum usando un elegante argumento de geometría convexa [7].

Por otro lado, en la teoría de espacios de Alexandrov con curvatura acotada inferiormente, un concepto de gran importancia es el de los conjuntos extremos. En este contexto, haciendo ligeras modificaciones al argumento de L. Danzer y B. Grünbaum para el problema anterior, G. Perelman demostró que el número de puntos extremos en un espacio de Alexandrov con curvatura no negativa es a lo más  $2^n$  [21]. Este es el *problema de Erdős-Perelman*.

En este artículo bosquejamos ambas demostraciones, la de L. Danzer y B. Grünbaum y la de G. Perelman, para ilustrar esta curiosa conexión entre dos ramas de la geometría, y damos un breve paseo por la teoría de espacios de Alexandrov como una invitación al lector a profundizar en este tópico.

La estructura del artículo es la siguiente: en la sección 1 exponemos la demostración de la conjetura original de P. Erdős. Posteriormente, en la sección 2 revisamos algunos elementos básicos de la teoría de espacios de Alexandrov, para luego, en la sección 3, enunciar y demostrar el problema de Erdős-Perelman. En la sección 4 discutimos un caso extremo del problema de Erdős-Perelman, a saber, aquellos espacios de Alexandrov compactos con curvatura no negativa que tienen la mayor cantidad

posible de puntos extremos. Finalmente, en la sección 5 platicamos sobre el concepto de conjuntos extremos en espacios de Alexandrov, y algunos resultados que generalizan toda la discusión anterior.

## 1. El problema de Erdős: una prueba de El libro

El *problema de Erdős* es el siguiente resultado de geometría euclidiana.

**Teorema 1.1.** *Si  $S$  es un conjunto de  $2^n + 1$  puntos en  $\mathbb{R}^n$  entonces tres de ellos forman un ángulo obtuso.*

Este problema surgió de estudiar la función

$\alpha_d(k) =$  máximo ángulo  $\alpha \in [0, \pi]$  tal que entre cualesquiera  $k$  puntos de  $\mathbb{R}^d$  existen tres que forman un ángulo mayor a  $\alpha$ .

P. Erdős y G. Szekeres demostraron que

$$\alpha_2(2^n) = \pi \left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

pero se sabe muy poco de  $\alpha_d(k)$  en general. Por ejemplo, con esta notación, el problema de Erdős afirma que  $\alpha_n(2^n + 1) \geq \pi/2$ , pero el valor preciso de  $\alpha_n(2^n + 1)$  no se conoce (véase [10, 11]). Esto nos lleva a considerar otro problema relacionado: evaluar la función

$h(d) =$  menor número  $k \in \mathbb{N}$  tal que entre cualesquiera  $k$  puntos de  $\mathbb{R}^d$  existen tres que forman un ángulo igual o mayor a  $\pi/2$ .

Se sabe que  $h(2) = 4$  y  $h(3) = 6$ , pero hasta donde el autor sabe, no existen avances considerables para el caso general.

La solución original de Erdős en [7] está escrita en alemán; una versión en inglés puede encontrarse en [1]. Esta última referencia es notable debido a que se trata de un libro escrito en honor al mismo P. Erdős, a quien se le atribuye la afirmación de que, si Dios existe, debe guardar en secreto las demostraciones más elegantes de toda la matemática en un libro. A continuación bosquejamos el argumento utilizado en la referencia [1].

*Demostración del teorema 1.1.* Primero observamos que el enunciado del teorema es equivalente a demostrar que, si  $S$  es un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\angle p_i p_j p_k \leq \pi/2$  para todo  $\{p_i, p_j, p_k\} \subset S$ , entonces  $S$  tiene a lo más  $2^n$  puntos.

Para demostrar esto, consideramos  $S' = \{p_1, \dots, p_N\}$  un subconjunto finito de  $S$  y  $P = \text{conv}(S')$ , la envolvente convexa de  $S'$ , que resulta ser

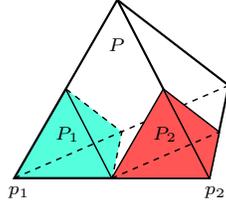


Figura 1.  $P_1$  y  $P_2$  tienen interiores disjuntos.

un politopo compacto y convexo en  $\mathbb{R}^n$ . Luego, podemos definir

$$P^* = \left\{ \frac{1}{2}(x - y) \in \mathbb{R}^n : x, y \in P \right\},$$

la *simetrización de Minkowski* de  $P$ , que a su vez es un politopo compacto, convexo y simétrico respecto al origen de  $\mathbb{R}^n$ , con la propiedad de que  $P^* + p_i$  y  $P^* + p_j$  tienen interiores disjuntos siempre que  $i \neq j$ .

Usando la convexidad de  $P^*$ , se puede demostrar que  $P^* + p_j$  contiene a  $\frac{1}{2}(p_i + p_j)$  para todo  $p_i \in S$ , de modo que los politopos

$$P_j = \frac{1}{2}(P + p_j) = \text{conv} \left( \left\{ \frac{1}{2}(p_i + p_j) : p_i \in S \right\} \right) \subset P^* + p_j,$$

también tienen la propiedad de que  $P_i$  y  $P_j$  tienen interiores disjuntos siempre que  $i \neq j$  (véase la figura 1).

Sin embargo, los politopos  $P_j$  están contenidos en  $P$  por convexidad, y son copias homotéticas de  $P$  por un factor de  $\frac{1}{2}$ , de modo que

$$\text{vol} \left( \bigcup_{j=1}^N P_j \right) \leq \text{vol}(P) \quad \text{y} \quad \text{vol}(P_j) = \frac{1}{2^n} \text{vol}(P). \quad (1)$$

Por otro lado, dado que los politopos  $P_j$  tienen interiores disjuntos por parejas,

$$\text{vol} \left( \bigcup_{j=1}^N P_j \right) = \sum_{j=1}^N \text{vol}(P_j) \quad (2)$$

Combinando (1) y (2) con el hecho de que  $P$  es compacto, y que por lo tanto  $0 < \text{vol}(P) < \infty$ , se sigue que  $N \leq 2^n$ . Finalmente, como  $N = \#S'$  y  $S'$  es un subconjunto finito arbitrario de  $S$ , concluimos que de hecho  $S$  es finito y que  $\#S \leq 2^n$ .  $\square$

**Nota 1.1.** Obsérvese que el caso particular en el que  $S$  consta de los  $2^n$  vértices de un cubo  $n$ -dimensional muestra que la cota para la cardinalidad de  $S$  en la demostración anterior es óptima.

## 2. Espacios de Alexandrov

Como se mencionó antes, el problema de Erdős-Perelman es un resultado sobre puntos extremos en espacios de Alexandrov con curvatura no negativa. En esta sección veremos algunos hechos preliminares acerca de dichos espacios para luego, en la sección 3, enunciar y demostrar el problema de Erdős-Perelman.

Los *espacios de Alexandrov* son espacios métricos con una noción sintética de curvatura acotada inferiormente. Estos espacios surgen de manera natural al considerar límites de ciertas sucesiones de variedades riemannianas, vistas como elementos de la clase de espacios métricos, que a su vez está dotada de la métrica de Gromov-Hausdorff. En este sentido, podemos pensar que los espacios de Alexandrov se encuentran en la frontera de la geometría riemanniana, aunque en general no tienen una estructura tan regular como las variedades, de modo que para estudiarlos suele ser necesario emplear otras técnicas.

Pueden encontrarse excelentes introducciones a este tema en [3, 4, 5, 6, 26]. El contenido de esta sección está basado en dichas referencias.

Para comenzar, el contexto en el que nos encontramos es el de los espacios métricos y nos interesa la noción de *geodésica minimizante*, es decir, una curva cuya longitud realiza la distancia entre sus puntos extremos.

Más formalmente, dado un espacio métrico  $(X, d)$  y una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ , podemos definir la longitud de  $\gamma$  como

$$L_d(\gamma) = \sup \sum_{i=1}^n d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i))$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones finitas  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  del intervalo  $[a, b]$ . De esta manera, una geodésica minimizante entre los puntos  $p, q \in X$  es una curva  $\gamma$  que une dichos puntos con la propiedad de que

$$L_d(\gamma) = d(p, q).$$

Si cualquier par de puntos en  $X$  puede unirse con una geodésica minimizante, decimos que  $X$  es un *espacio geodésico*. Todos los espacios en lo subsecuente serán geodésicos y, por simplicidad, también supondremos que son completos.

Las variedades riemannianas completas y conexas de dimensión finita son los ejemplos típicos de espacios geodésicos gracias al teorema de Hopf-Rinow. En dicho caso, se sabe que

$$L_d(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \quad (3)$$

donde  $\gamma$  es una curva diferenciable a trozos y  $d$  es la función distancia inducida por la métrica riemanniana [8].

La identidad (3) tiene la siguiente generalización a espacios geodésicos [2, 13].

**Lema 2.1.** *Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  es una curva Lipschitz entonces la rapidez métrica*

$$|\gamma'(t)| = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(\gamma(t+s), \gamma(t))}{|s|}$$

existe para casi todo  $t \in [a, b]$  y

$$L_d(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

En el caso particular de que  $\gamma$  sea una geodésica minimizante, siempre puede suponerse que  $|\gamma'(t)| = 1$  para casi todo  $t \in [a, b]$  y por tanto  $L_d(\gamma) = b - a$ .

Esto es solo un ejemplo de muchas nociones *diferenciables* que pueden generalizarse al contexto de espacios métricos. Referimos al lector a [2, 13, 15] para un estudio detallado de las propiedades diferenciables de primer orden que uno puede estudiar en este contexto generalizado.

Por otro lado, una clase importante de variedades son los *espacios modelo*  $\mathbb{M}_k^n$ , a saber, las variedades completas simplemente conexas de curvatura constante  $k$  para cada  $k \in \mathbb{R}$ . Estos espacios están completamente clasificados: el  $n$ -espacio euclidiano cuando  $k = 0$ , la  $n$ -esfera ó el  $n$ -espacio hiperbólico con la métrica reescalada de manera adecuada cuando  $k > 0$  ó  $k < 0$ , respectivamente.

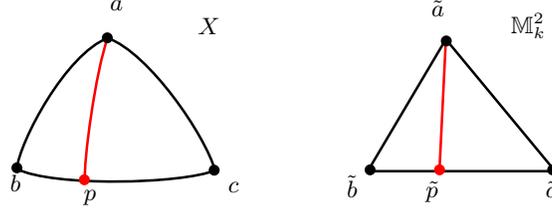
Consideremos ahora la noción de un *triángulo geodésico*  $\triangle abc$  en  $X$ , es decir, la elección de tres puntos  $a, b, c \in X$  y tres geodésicas minimizantes  $[ab], [bc], [ca]$  entre cada par de dichos puntos. Dado un triángulo geodésico  $\triangle abc$  en  $X$ , un *triángulo de comparación* en  $\mathbb{M}_k^n$  es un triángulo geodésico  $\tilde{\triangle}_k abc := \triangle \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}$  en  $\mathbb{M}_k^n$  tal que  $d(a, b) = d(\tilde{a}, \tilde{b})$ ,  $d(b, c) = d(\tilde{b}, \tilde{c})$  y  $d(c, a) = d(\tilde{c}, \tilde{a})$ .

Con esta terminología, podemos introducir los espacios de Alexandrov.

*Definición 2.1.* Un espacio geodésico  $(X, d)$  es un *espacio de Alexandrov de curvatura mayor o igual que  $k$* , lo cual denotamos como  $(X, d) \in \text{Alex}_k$  o simplemente  $X \in \text{Alex}_k$ , si cada punto  $x \in X$  tiene una vecindad  $U_x$  con la siguiente propiedad: dado un triángulo geodésico  $\triangle abc$  en  $U_x$  y un triángulo de comparación  $\tilde{\triangle}_k abc$  en  $\mathbb{M}_k^n$ , se satisface que

$$d(a, p) \geq d(\tilde{a}, \tilde{p})$$

para todo  $p \in [bc]$  y  $\tilde{p} \in [\tilde{b}\tilde{c}]$  tales que  $d(b, p) = d(\tilde{b}, \tilde{p})$ .



**Figura 2.** Comparación de distancias.

Dado un triángulo geodésico  $\Delta abc$  en  $X$ , denotamos por  $\tilde{Z}_k abc$  el ángulo correspondiente al vértice  $b$  en el triángulo de comparación  $\tilde{\Delta}_k abc$ . En general, es posible definir el *ángulo de Alexandrov* entre dos geodésicas minimizantes  $\alpha$  y  $\beta$  que parten de un mismo punto  $p \in X$  como

$$\angle(\alpha, \beta) = \limsup_{s, t \rightarrow 0} \tilde{Z}_k \alpha(s) p \beta(t).$$

Además, si  $\alpha = [yx]$  y  $\beta = [yz]$  entonces escribimos  $\angle xyz$  para denotar el ángulo de Alexandrov  $\angle(\alpha, \beta)$ .

A partir de la definición 2.1 se puede demostrar el siguiente teorema de comparación de ángulos.

**Teorema 2.1.** *Sea  $X \in \text{Alex}_k$  y  $x \in X$ . Entonces existe una vecindad  $U_x$  de  $x$  tal que, si  $\Delta abc$  es un triángulo geodésico en  $U_x$ , entonces*

$$\angle abc \geq \tilde{Z}_k abc, \quad \angle bca \geq \tilde{Z}_k bca, \quad \angle cab \geq \tilde{Z}_k cab$$

Una consecuencia importante de la hipótesis de completez en la teoría de espacios de Alexandrov es el siguiente *teorema de globalización*.

**Teorema 2.2.** *Sea  $X \in \text{Alex}_k$ . Entonces en la definición 2.1 y en el teorema y 2.1 podemos elegir  $U_x = X$ .*

Los ejemplos prototípicos de espacios de Alexandrov con curvatura mayor o igual que  $k$  son precisamente las variedades riemannianas con curvatura seccional acotada inferiormente por  $k$ . Otros ejemplos sencillos son los poliedros convexos en  $\mathbb{R}^3$  o, más en general, politopos convexos en  $\mathbb{R}^n$ ; en estos casos, tenemos espacios de Alexandrov con curvatura no negativa.

Otros ejemplos, que en realidad son construcciones geométricas importantes en la teoría, son el *espacio de direcciones* y el *cono tangente* a un espacio de Alexandrov dado en un punto dado. A saber, si  $X$  es un espacio de Alexandrov y  $p \in X$ , podemos considerar el conjunto de geodésicas minimizantes que emanan de  $p \in X$ , identificar entre sí aquellas que forman ángulo de Alexandrov igual a cero, y obtener así un espacio métrico con la métrica dada por el ángulo de Alexandrov. La completación de dicho espacio es lo que se conoce como el espacio de

direcciones de  $X$  en  $p$ , denotado por  $\Sigma_p X$ . Así mismo, el cono tangente a  $X$  en  $p$ , denotado por  $T_p X$ , se define como el cono topológico sobre  $\Sigma_p(X)$ , es decir,

$$T_p X = \Sigma_p \times [0, \infty) / \langle (v, 0) \sim (w, 0) \rangle$$

dotado de la métrica dada por la ley de cosenos, es decir,

$$d((\alpha, s), (\beta, t))^2 = s^2 + t^2 - 2st \cos \angle(\alpha, \beta).$$

El lector puede pensar en el caso en que  $X$  es una variedad riemanniana. En ese caso, el cono tangente  $T_p X$  no es otra cosa que el espacio tangente a  $X$  en  $p$ , mientras que el espacio de direcciones  $\Sigma_p X$  coincide con la esfera unitaria en  $T_p X$ . En general, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 2.3.** *Si  $X \in \text{Alex}_k^n$  y  $p \in X$ , entonces  $\Sigma_p X \in \text{Alex}_1^{n-1}$ , es compacto y  $\text{diam}(\Sigma_p X) \leq \pi$ , mientras que  $T_p X \in \text{Alex}_0^n$ .*

En el enunciado anterior, la notación  $X \in \text{Alex}_k^n$  hace referencia a que  $X$  tiene *dimensión de Hausdorff* igual a  $n$ . La dimensión de Hausdorff es una noción de dimensión bastante natural en el contexto de espacios métricos. En el caso particular de los espacios de Alexandrov, se puede demostrar que la dimensión de Hausdorff siempre es un número entero o infinita [6]. Este resultado es importante para nosotros, pues enunciaremos el problema de Erdős-Perelman para espacios de Alexandrov de dimensión finita.

Por último, la *medida de Hausdorff* nos da una noción conveniente de volumen para espacios de Alexandrov, y en general, para espacios métricos. Esta medida tiene la siguiente propiedad respecto a las funciones de Lipschitz:

**Lema 2.2.** *Sean  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  espacios métricos  $n$ -dimensionales y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función  $C$ -Lipschitz (es decir, que satisface la desigualdad  $d_Y(f(x), f(x')) \leq C \cdot d_X(x, x')$  para cualesquiera  $x, x' \in X$ ). Entonces*

$$\text{vol}_Y(f(X)) \leq C^n \cdot \text{vol}_X(X).$$

Nótese que en este lema y en lo subsecuente, siempre que  $X$  tenga dimensión de Hausdorff igual a  $n$ , denotamos por  $\text{vol}_X$  la medida de Hausdorff  $n$ -dimensional en  $X$ .

En este punto ya tenemos todas las definiciones y resultados necesarios para enunciar y bosquejar la demostración del problema de Erdős-Perelman. En lo que resta de la sección platicamos sobre algunos resultados relevantes en la teoría de espacios de Alexandrov únicamente para ilustrar la geometría de dichos espacios.

El primer resultado que queremos comentar nos dice que los espacios de Alexandrov de dimensión finita pueden estratificarse en variedades topológicas.

**Teorema 2.4.** *Sea  $X \in \text{Alex}_k^n$ . Entonces  $X$  se puede estratificar en variedades topológicas. Esto quiere decir que existe una partición  $\{X_i\}_{i=1}^N$  de  $X$  tal que:*

1. *Cada  $X_i$  es una variedad topológica*
2.  *$n = \dim X_1 > \dim X_2 > \dots > \dim X_N$*
3. *Para cada  $k = 1, \dots, N$  el conjunto  $X_k^+ = \bigcup_{i=k}^N X_i$  es cerrado en  $X$ .*

La estratificación en el teorema 2.4 se puede describir como sigue:  $X_1$  es el conjunto de puntos que tienen una vecindad euclidiana en  $X$ ;  $X_2$  es el conjunto de puntos en  $X \setminus X_1$  que tienen una vecindad euclidiana de dimensión máxima en  $X \setminus X_1$ , y así sucesivamente.

Por otro lado, uno de los resultados más profundos en la teoría es el siguiente teorema de estabilidad de Perelman.

**Teorema 2.5.** *Sean  $X_i \in \text{Alex}_k^n$  una sucesión y  $X \in \text{Alex}_k^n$  tales que  $X_i \xrightarrow{\text{GH}} X$ . Entonces  $X_i$  es homeomorfo a  $X$  para  $i$  suficientemente grande.*

Las demostraciones de los teoremas 2.4 y 2.5 son bastante técnicas y están basadas en el estudio de ciertas familias de funciones y una versión adecuada de la teoría de Morse [16, 18]. En la sección 5 damos una idea breve acerca de estas herramientas avanzadas y también veremos que es posible generalizar estos resultados a los *conjuntos extremos*.

Por último, mencionamos el siguiente teorema de compacidad en la topología de Gromov-Hausdorff [6].

**Teorema 2.6** (Compacidad de Gromov). *Para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ,  $D > 0$  y  $v > 0$  dados, sea*

$$\text{Alex}_k^n(D, v) = \{X : X \in \text{Alex}_k^n, \text{diam}(X) \leq D, \text{vol}(X) \geq v\} / \text{isometrías}.$$

*Entonces  $\text{Alex}_k^n(D, v)$  es compacto en la topología Gromov-Hausdorff.*

Un caso particular importante de este resultado es cuando  $M_i \in \text{Alex}_k^n(D, v)$  es una sucesión de variedades. En ese caso, sabemos que una subsucesión  $M_{i_j}$  converge en Gromov-Hausdorff a un límite  $M \in \text{Alex}_k^n(D, v)$ . Por el teorema 2.5,  $M$  tiene la topología de una variedad. En general, si  $M$  es el límite de una sucesión de variedades riemannianas con la misma dimensión que  $M$ , decimos que  $M$  es suavizable. Se sabe que todo espacio de Alexandrov de 2-dimensional es suavizable, al igual que toda métrica poliedral de curvatura no negativa en variedades 3-dimensionales, pero sigue siendo un problema abierto encontrar un proceso para suavizar espacios de Alexandrov en general [25].

### 3. El problema de Erdős-Perelman

La siguiente definición se debe a G. Perelman y A. Petrunin [23].

*Definición 3.1.* Decimos que  $p \in X$  es un *punto extremo* si  $\text{diam}(\Sigma_p) \leq \pi/2$ .

Los ejemplos prototípicos de puntos extremos son los vértices de polítopos convexos en  $\mathbb{R}^n$  tales que todos los ángulos entre aristas que pasan por tales vértices son a lo más  $\pi/2$ . El lector puede pensar en los vértices de un cubo o de un tetraedro para tener una imagen más concreta.

Otra familia de ejemplos son las órbitas singulares en cocientes de espacios de Alexandrov de curvatura no negativa por acciones isométricas, discretas y cocompactas (comparar con el corolario 4.1).

Ahora podemos enunciar el problema de Erdős-Perelman.

**Teorema 3.1.** *Si  $X \in \text{Alex}_0^n$  entonces  $X$  contiene a lo más  $2^n$  puntos extremos.*

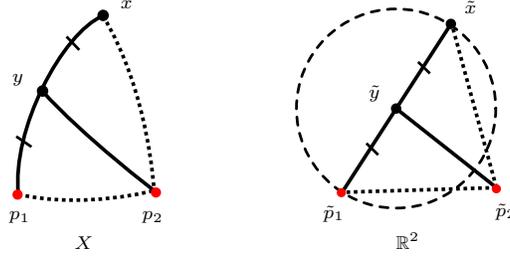
Este resultado generaliza el teorema 1.1 en el siguiente sentido: sabemos que todo cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^n$  es un espacio de Alexandrov de curvatura no negativa, en particular, si  $P = \text{conv}(S)$  para algún  $S \subset \mathbb{R}^n$  con la propiedad de que  $\angle p_i p_j p_k \leq \pi/2$  para todo  $\{p_i, p_j, p_k\} \subset S$  (como en la demostración del teorema 1.1) entonces  $P \in \text{Alex}_0^n$  y  $S$  es el conjunto de puntos extremos en  $P$ . Aplicando el teorema 3.1 obtenemos la conclusión del teorema 1.1.

A continuación, desarrollamos una demostración de este resultado basados en [17]. Para comenzar, necesitamos el siguiente lema que intuitivamente afirma que si construimos «copias homotéticas» del espacio  $X$  con factor  $1/2$  respecto a dos puntos extremos distintos, estas tienen interiores disjuntos:

**Lema 3.1.** *Sean  $p_1, p_2 \in X$  puntos extremos. Sean  $x, y \in X$  tales que  $y$  es el punto medio de una geodésica minimizante  $[p_1 x]$ . Entonces  $\mathbf{d}(p_1, y) \leq \mathbf{d}(p_2, y)$ .*

*Demostración.* Consideremos un triángulo de comparación  $\Delta \tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \tilde{x}$  en  $\mathbb{R}^2$ . Sabemos que  $\angle \tilde{x} \tilde{p}_2 \tilde{p}_1 \leq \angle x p_2 p_1$  por el teorema 2.1 y como  $p_2$  es un punto extremo, se sigue que  $\angle \tilde{x} \tilde{p}_2 \tilde{p}_1 \leq \pi/2$ . En particular, si  $\tilde{y}$  es el punto medio de  $\tilde{p}_1 \tilde{x}$  y  $r := \mathbf{d}(p_1, y)$  entonces  $\tilde{p}_2$  no puede estar en el interior del círculo con centro en  $\tilde{y}$  y radio  $r$ , es decir,  $\mathbf{d}(\tilde{p}_2, \tilde{y}) \geq r$ . Por la definición 2.1, se sigue que  $\mathbf{d}(p_2, y) \geq r$ , es decir,  $\mathbf{d}(p_2, y) \geq \mathbf{d}(p_1, y)$ .  $\square$

*Demostración del Teorema 3.1.* Consideremos primero el caso en que  $X$  es compacto, de modo que  $\text{vol}(X) < \infty$ . Definimos las *celdas de*



**Figura 3.**  $\tilde{p}_2$  no puede estar dentro del círculo de radio  $r$  y centro  $\tilde{y}$ .

Voronoi asociadas a un conjunto finito de puntos extremos  $\{p_1, \dots, p_N\}$  como

$$Q_i = \{x \in X : d(p_i, x) \leq d(p_j, x), j = 1, \dots, N\}.$$

El lema 3.1 prueba que el conjunto

$$P_i = \{x \in X : x \text{ es punto medio de alguna geodésica minimizante } [p_i y]\}$$

está contenido en  $Q_i$ . Dado que los espacios de Alexandrov son *no ramificantes* (es decir, que si dos geodésicas minimizantes se intersecan en un intervalo no trivial entonces alguna está contenida en la otra) [6], está bien definida la función  $\phi : P_i \rightarrow X$  tal que  $x$  es punto medio de la geodésica minimizante  $[p\phi(x)]$ . Además,  $\phi$  es suprayectiva dado que  $X$  es geodésico y para cualquier punto  $y \in X$  podemos encontrar alguna geodésica minimizante  $[py]$  y tomar su punto medio como un elemento en  $\phi^{-1}(y)$ . Más aún, por comparación de triángulos es claro que

$$d(\phi(x_1), \phi(x_2)) \leq 2 \cdot d(x_1, x_2)$$

para cualesquiera  $x_1, x_2 \in X$ . Por el lema 2.2,

$$\text{vol}(P_i) \geq \frac{1}{2^n} \text{vol}(X).$$

Ahora bien, dado que  $P_i \subset Q_i$  y las celdas  $Q_i$  cubren a  $X$ , entonces

$$\text{vol}\left(\bigcup_i Q_i\right) \leq \text{vol}(X) \quad \text{y} \quad \text{vol}(Q_i) \geq \frac{1}{2^n} \text{vol}(X)$$

Finalmente, como los conjuntos  $Q_i$  y  $Q_j$  tienen interiores disjuntos siempre que  $i \neq j$ , entonces

$$\text{vol}\left(\bigcup_i Q_i\right) = \sum_i \text{vol}(Q_i)$$

y concluimos como en la prueba del teorema 1.1.

Para el caso en que  $X$  no es compacto, bosquejamos la idea de la prueba: fijando un punto cualquiera  $p \in X$ , una consecuencia de la no compacidad es que existe al menos un *rayo* que emana de  $p$ , es decir,

una trayectoria de la forma  $c : [0, \infty) \rightarrow X$  tal que  $c(0) = p$  y  $c|_{[s,t]}$  es una geodésica minimizante para cualesquiera  $s < t$ .

Ahora bien, para cada rayo  $c$  que emana de  $p$ , podemos definir la *función de Busemann* asociada  $b_c : X \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$b_c(q) = \lim_{t \rightarrow \infty} t - d(q, c(t)).$$

Una consecuencia de que  $X \in \text{Alex}_0$  es que  $b_c$  es una función convexa, es decir, que para cualquier geodésica minimizante  $\sigma : [a, b] \rightarrow X$  la composición  $b_c \circ \sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función convexa.

En particular, si definimos  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$f(q) = \sup_c b_c(q),$$

donde el supremo se toma sobre todos los rayos  $c$  que emanan de  $p$ , entonces  $f$  también es convexa. Más aún, los conjuntos de subnivel  $C_t := f^{-1}((-\infty, t])$  son convexos (es decir, para cualesquiera  $x, y \in C_t$  todas las geodésicas minimizantes entre  $x$  y  $y$  están contenidas en  $C_t$ ), compactos (si alguno no fuera compacto, sería posible construir un rayo dentro de él, lo cual es absurdo) y satisfacen que  $X = \bigcup_{t>0} C_t$ .

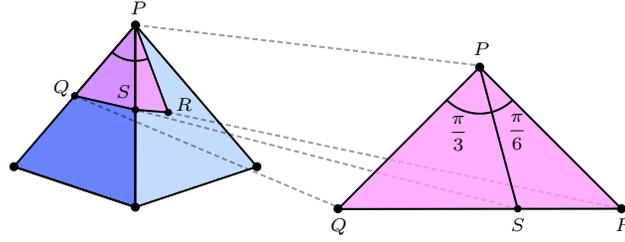
Por todo lo anterior, si  $p_1, \dots, p_N$  son puntos extremos en  $X$ , podemos elegir  $t$  suficientemente grande tal que  $C_t$  contiene a todos los  $p_i$ . Por las propiedades de  $C_t$  antes descritas, se tiene que  $C_t \in \text{Alex}_0$  es compacto y de dimensión a lo más  $n$ . Por lo tanto, gracias al caso compacto, se sigue que  $N \leq 2^n$ .  $\square$

## 4. El caso extremo del problema de Erdős-Perelman

Es natural preguntarse cómo son aquellos espacios de Alexandrov en los que se tiene el máximo número posible de puntos extremos. Por ejemplo, para el caso de dimensión 2, podemos pensar en la superficie de un tetraedro regular; es claro que en el interior de las caras y en el interior de las aristas siempre existen direcciones con ángulo  $\pi$ , mientras que en los vértices podemos considerar las direcciones generadas por una arista y la bisectriz interna del ángulo formado por las otras dos aristas que pasan por el vértice (en la figura 4, estas direcciones están dadas por  $\overrightarrow{PQ}$  y  $\overrightarrow{PR}$ ). Estas direcciones tienen ángulo  $\pi/2$  y claramente es el mayor ángulo posible desde  $P$ .

Para responder esa pregunta de manera general, debemos hacer primero un par de comentarios extras sobre los espacios de Alexandrov.

En primer lugar, una de las propiedades más importantes de la familia de espacios de Alexandrov es su estabilidad bajo cocientes por ciertas acciones de grupos. En general, si un grupo  $\Gamma$  actúa sobre un espacio  $X$ , escribimos  $\Gamma \curvearrowright X$ . Tenemos entonces el siguiente resultado [6].



**Figura 4.** Direcciones diametralmente opuestas en un vértice de un tetraedro.

**Teorema 4.1.** *Sea  $X \in \text{Alex}_k$  y sea  $\Gamma \curvearrowright X$  una acción por isometrías y con órbitas cerradas. Entonces  $X/\Gamma \in \text{Alex}_k$ , donde a este cociente lo dotamos de la métrica*

$$\rho(\Gamma(p), \Gamma(q)) = \inf\{d(p, r) : r \in \Gamma(q)\}.$$

Un caso particular de este resultado se tiene al considerar acciones discretas, isométricas y *cocompactas*; esto último quiere decir que el cociente  $X/\Gamma$  sea compacto. Dada una acción  $\Gamma \curvearrowright X$  de este tipo, decimos que un punto  $p \in X$  es una *órbita singular* si  $\Gamma(p) = \{p\}$ .

Con esta terminología, una consecuencia del problema de Erdős-Perelman es que podemos acotar el número de órbitas singulares de este tipo de acciones (comparar con el ejemplo 2 después del teorema 5.1).

**Corolario 4.1.** *Sea  $\Gamma \curvearrowright \mathbb{R}^n$  una acción cocompacta de un grupo discreto de isometrías. Entonces hay a lo más  $2^n$  órbitas singulares.*

En general, decimos que un espacio compacto  $X \in \text{Alex}_0^n$  que tiene exactamente  $2^n$  puntos extremos es una *n-caja*. En [17], N. Lebedeva obtuvo los siguientes resultados sobre *n-cajas*.

**Teorema 4.2.** *Para cada n-caja existe un grupo  $\Gamma$  y una acción discreta, isométrica y cocompacta  $\Gamma \curvearrowright \mathbb{R}^n$  tal que dicha n-caja es isométrica a  $\mathbb{R}^n/\Gamma$ .*

Más aún, N. Lebedeva pudo decir cuáles son los posibles grupos  $\Gamma$  en el teorema anterior. Para ello, hay que considerar el *grupo de Coxeter* del *n-cubo unitario*  $Q^n$  en  $\mathbb{R}^n$ , es decir, el grupo de isometrías en  $\mathbb{R}^n$  generado por las reflexiones respecto a las caras de  $Q^n$ . Denotamos dicho grupo por  $\text{Cox}(Q^n)$ . Entonces se tiene lo siguiente:

**Teorema 4.3.** *Sea  $\Gamma \curvearrowright \mathbb{R}^n$  una subacción de  $\text{Cox}(Q^n) \curvearrowright \mathbb{R}^n$ , de tal manera que cada vértice del cubo unitario es un punto fijo aislado para algún subgrupo de  $\Gamma$ . Entonces  $\mathbb{R}^n/\Gamma$  es una n-caja. Más aún, toda n-caja se obtiene de una acción como la anterior o una acción afín-conjugada a una de las anteriores.*

Resulta que todas las acciones  $\Gamma \curvearrowright \mathbb{R}^n$  descritas en el teorema 4.3 se pueden obtener como sigue: sea  $S$  un subconjunto de caras de  $Q^n$  de modo que cada vértice  $v \in Q^n$  es la única intersección de las caras en  $S$  que contienen a  $v$ ; entonces el conjunto de reflexiones respecto a las caras en  $S$  generan una acción como la deseada.

Más aún, las acciones afín-conjugadas de las acciones antes descritas se obtienen considerando métricas en  $\mathbb{R}^n$  que son invariantes bajo las reflexiones en las caras de  $S$ . Más explícitamente, se deben considerar reescalamientos de la métrica euclidiana en  $\mathbb{R}^n$  en las direcciones perpendiculares a las caras contenidas en  $S$ .

Esto permite, por ejemplo, dar una clasificación de  $n$ -cajas para valores pequeños de  $n$ :

1. Para  $n = 1$ , las únicas  $n$ -cajas son los intervalos cerrados de todas las longitudes.
2. Para  $n = 2$  hay dos familias de  $n$ -cajas: el cuadrado con la métrica reescalada vertical y horizontalmente de manera independiente (es decir, todos los rectángulos), de modo que se tiene una familia 2-dimensional, y el tetraedro unitario con métricas tales que cada par de aristas opuestas miden lo mismo (poliedros también conocidos como *disfenoides*). Esta última familia es claramente 3-dimensional.
3. Para  $n = 3$  hay cinco  $n$ -cajas (módulo la elección de la métrica afín): el cubo; el cubo doble (que se obtiene pegando dos cubos por la frontera); el cubo doble por cinco caras (que se obtiene pegando dos cubos por cinco de sus caras en la frontera); el producto del cubo doble con el intervalo unitario y, por último, el cociente del 3-toro por la simetría central. Estas familias tienen dimensiones 3, 3, 3, 4 y 6.

Véase [17] para más detalles sobre la clasificación anterior.

## 5. Conjuntos extremos

En esta sección platicamos sobre los *conjuntos extremos* en espacios de Alexandrov, que generalizan la idea de los puntos extremos. El objetivo principal es dar una idea de algunas herramientas avanzadas que se usan en la teoría de espacios de Alexandrov para motivar al lector en el estudio de esta bonita rama de la geometría métrica. Recomendamos las referencias [16, 25] para una discusión más detallada sobre conjuntos extremos y los resultados presentados en esta sección.

Para hablar de los conjuntos extremos en un espacio de Alexandrov, primero es necesario hacer un par de comentarios sobre la familia de *funciones semicóncavas* y sus flujos gradiente.

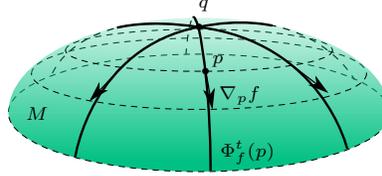
Más precisamente, tenemos la siguiente definición:

*Definición 5.1.* Dado un espacio  $X \in \text{Alex}_k$ , decimos que una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es *semicóncava* si para cada  $x \in X$  existe una vecindad  $\Omega_x$  y  $\lambda_x \in \mathbb{R}$  tal que  $f|_{\Omega_x}$  es  $\lambda_x$ -cóncava. Esto último significa que la función  $f|_{\Omega_x}$  es localmente Lipschitz y satisface que

$$t \mapsto f \circ \gamma(t) - \frac{\lambda_x}{2} \cdot t^2$$

es cóncava para cada geodésica minimizante  $\gamma$  en  $\Omega_x$ .

La razón de que estas funciones tengan especial importancia en este contexto es principalmente que las funciones distancia de la forma  $\text{dist}_p(q) := d(p, q)$  son *semicóncavas* y mucha información geométrica está contenida de forma sucinta en este tipo de funciones. Además, gracias al trabajo de G. Perelman y A. Petrunin [22, 25], es posible desarrollar una maquinaria de cálculo diferencial para funciones *semicóncavas*.



**Figura 5.** Función distancia en una variedad  $M$ .

Por ejemplo, para este tipo de funciones se puede definir un *campo vectorial gradiente*  $p \mapsto \nabla_p f \in T_p X$  y un *flujo gradiente*  $(p, t) \mapsto \Phi_f^t(p) \in X$  como objetos que, en un sentido muy preciso, satisfacen la siguiente identidad

$$\nabla_p f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0^+} \Phi_f^t(p).$$

Podemos ilustrar el significado geométrico de estos campos gradiente considerando funciones distancia en variedades: si  $M$  es una variedad riemanniana, fijamos  $q \in M$  y definimos  $f = \text{dist}_q$ , entonces, usando el lema de Gauss [24], es posible demostrar que

$$|\nabla_p f| = 1, \quad \forall p \in M,$$

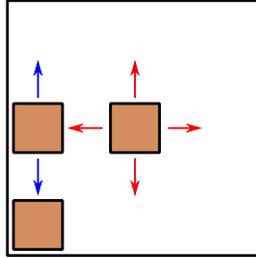
y que el flujo gradiente  $\Phi_f^t$  está dado por geodésicas radiales desde  $q$  (véase la figura 5).

Con tales formalismos, podemos ahora introducir los conjuntos extremos.

*Definición 5.2.* Decimos que un conjunto cerrado  $E \subset X$  es un *conjunto extremo* si para cualquier función semicóncava  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , cualquier  $t \geq 0$  y cualquier  $p \in E$ , se tiene que  $\Phi_f^t(p) \in E$ .

Como se enfatizó anteriormente, los espacios de Alexandrov son generalizaciones de las variedades riemannianas. Una manera de precisar en qué medida un espacio de Alexandrov *no* es una variedad y que a la vez nos da información geométrica valiosa del espacio es a través de estos conjuntos extremos. En [25], A. Petrunin da una visión muy intuitiva de todo esto:

Imagina que quieres mover una caja pesada empujándola dentro de una habitación vacía. Si la caja está en medio de la habitación, puedes empujarla en cualquier dirección. Sin embargo, una vez que la caja se encuentra con una pared, no puedes empujarla de vuelta al centro; y una vez que se encuentra con una esquina, no puedes empujarla en ninguna dirección. Lo mismo sucede si uno intenta mover un punto en un espacio de Alexandrov siguiendo un flujo gradiente, pero el papel de las paredes lo juegan los conjuntos extremos.



**Figura 6.** Los flujos gradientes se limitan en las paredes y se frenan en las esquinas.

La razón por la que este asunto de los conjuntos extremos viene a colación es la siguiente equivalencia [12, 25].

**Teorema 5.1.** *Un conjunto cerrado  $E \subset X$  es extremo si y solo si para cada  $q \in X \setminus E$  se satisface lo siguiente: si  $\text{dist}_q|_E$  tiene un mínimo local en  $p \in E$ , entonces  $\angle qpx \leq \pi/2$  para todo  $x \in X$ .*

En particular, dado un punto  $p \in X$ , el conjunto  $\{p\}$  es extremo si y solo si para cada  $q \in X$  y cada  $x \in X$  se tiene que  $\angle qpx \leq \pi/2$ , lo cual es equivalente a que  $\text{diam}(\Sigma_p) \leq \pi/2$ . En otras palabras, el conjunto  $\{p\}$  es extremo si y solo si el punto  $p$  es extremo (de hecho, cualquier conjunto finito de puntos en  $X$  es extremo si y solo si cada punto es extremo; comparar con el ejemplo 3 abajo). De esta manera, vemos que las definiciones 3.1 y 5.2 son consistentes.

Más en general, tenemos los siguientes ejemplos de conjuntos extremos [25]:

1. El espacio total  $X$ , la frontera  $\partial X$  y el conjunto vacío son conjuntos extremos.
2. Si  $\Gamma$  es un subgrupo cerrado del grupo de isometrías de  $X$ , y  $X^\Gamma$  es el conjunto de puntos fijos por  $\Gamma$ , entonces la imagen de  $X^\Gamma$  en  $X/\Gamma$  es un conjunto extremo.
3. Si  $E$  y  $F$  son conjuntos extremos, entonces  $E \cap F$ ,  $E \cup F$  y  $\overline{E \setminus F}$  también son extremos.

Dada una función semicóncava  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $p \in X$ , decimos que  $p$  es un *punto crítico* para  $f$  si  $\nabla_p f = o_p$ , donde  $o_p$  es el vértice del cono  $T_p X$ . De otro modo, decimos que  $p$  es un *punto regular* para  $f$  y denotamos por  $X_{\text{reg}}(f)$  al conjunto de puntos regulares para  $f$ . Con esta terminología, podemos enunciar el *lema de Morse* para funciones semicóncavas.

**Teorema 5.2.** *Sea  $f : \Omega \subset X \rightarrow \mathbb{R}$  una función semicóncava. Entonces  $f|_{X_{\text{reg}}(f)} : X_{\text{reg}}(f) \rightarrow \mathbb{R}$  es localmente un haz fibrado en el siguiente sentido: para cada  $p \in X_{\text{reg}}(f)$  existe una vecindad  $\Omega_p \subset \Omega$  y un homeomorfismo  $h : f^{-1}(f(p)) \times f(\Omega_p) \rightarrow \Omega_p$  tal que  $f \circ h(y, f(x)) = f(x)$  para todo  $x \in \Omega_p$ ,  $y \in f^{-1}(f(p))$ .*

En pocas palabras, las funciones semicóncavas en espacios de Alexandrov se pueden ver localmente como proyecciones sobre  $\mathbb{R}$ , al menos cerca de sus puntos regulares.

Una aplicación de la teoría de conjuntos extremos y el lema de Morse es el siguiente *teorema de la esfera* [25]. Este teorema generaliza un teorema de K. Grove para variedades riemannianas [14].

**Teorema 5.3.** *Sea  $X \in \text{Alex}_1^n$  tal que  $\text{diam}(X) > \pi/2$  y  $X$  no tiene conjuntos extremos. Entonces  $X$  es homeomorfo a una esfera.*

Se pueden formular versiones del lema de Morse para familias de funciones más generales [16, 18, 19, 20, 25], pero dichas formulaciones requieren tecnicismos que escapan del objetivo y alcance de este artículo. Las versiones más generales del lema de Morse son fundamentales en las demostraciones de los teoremas 2.4 y 2.5 [16, 18]. Más aún, V. Kapovitch demostró una versión del lema de Morse relativa a conjuntos extremos [16], con lo cual se pueden demostrar los siguientes resultados que generalizan los teoremas antes mencionados.

**Teorema 5.4.** *Sea  $X$  un espacio de Alexandrov y sea  $E \subset X$  un conjunto extremo. Entonces  $E$  se puede estratificar en variedades topológicas.*

Esta estratificación es un refinamiento de la estratificación en el teorema 2.4, pues se puede demostrar que la cerradura de cada estrato  $X_\ell$  en el teorema 2.4 es un conjunto extremo [23].

**Teorema 5.5.** *Sea  $X_i \in \text{Alex}_k^n$  una sucesión y  $X \in \text{Alex}_k^n$  tales que  $X_i \xrightarrow{\text{GH}} X$  y sean  $E_i \subset X_i$  y  $E \subset X$  conjuntos extremos tales que  $E_i \rightarrow E$  bajo la convergencia  $X_i \xrightarrow{\text{GH}} X$ . Entonces el par  $(X_i, E_i)$  es homeomorfo a  $(X, E)$  para  $i$  suficientemente grande.*

Este resultado extiende el teorema de estabilidad de Perelman a los conjuntos extremos.

Concluimos este trabajo con un resultado de T. Fujioka sobre cotas uniformes para el tamaño de los conjuntos extremos en espacios de Alexandrov [12].

**Teorema 5.6.** *Dados  $n, k, D$ , existe una constante  $C = C(n, k, D)$  tal que para todo  $X \in \text{Alex}_k^n$  con  $\text{diam}X \leq D$  se tiene lo siguiente:*

1. *El número de conjuntos extremos en  $X$  es a lo más  $C$ .*
2. *El número de Betti total de cualquier conjunto extremo en  $X$  es a lo más  $C$ .*
3. *La medida de Hausdorff  $m$ -dimensional de cualquier conjunto extremo  $m$ -dimensional en  $X$  es a lo más  $C$ .*

Usando el problema de Erdős-Perelman se puede ver que, si  $X \in \text{Alex}_0^n$  entonces  $X$  tiene a lo más  $2^{2^n}$  conjuntos extremos 0-dimensionales, y cada uno tiene número de Betti total y medida de Hausdorff 0-dimensional menor o igual que  $2^n$ . Por lo tanto, vemos que el teorema 5.6 generaliza el problema de Erdős-Perelman.

## Agradecimientos

El autor quiere agradecer a Jesús Núñez Zimbrón por la motivación, el apoyo y las múltiples conversaciones que despertaron su interés en este tema. Así mismo, a Oscar Palmas Velasco, a Fernando Galaz García y a los dos árbitros, cuyas cuidadosas observaciones permitieron mejorar la presentación de este trabajo.

## Bibliografía

- [1] M. Aigner y G. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, 4.<sup>a</sup> ed., Springer-Verlag, 2009, <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-00856-6>.
- [2] L. Ambrosio, N. Gigli y G. Savaré, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, Birkhäuser, 2005, <http://dx.doi.org/10.1007/b137080>.

- [3] W. Barrera, L. M. de Oca, D. Solis y M. Navarro, *De la geometría riemanniana a los espacios de Alexandrov i: Estructuras por caminos y métricas inducidas*, vol. 12, Abstraction & Application, 2015.
- [4] ———, *De la geometría riemanniana a los espacios de Alexandrov ii: Caminos de longitud mínima y el teorema de Hopf-Rinow*, vol. 13, Abstraction & Application, 2015.
- [5] ———, *De la geometría riemanniana a los espacios de Alexandrov iii: Ángulos y espacios de curvatura acotada por abajo*, vol. 18, Abstraction & Application, 2017.
- [6] D. Burago, Y. Burago y S. Ivanov, *A course in metric geometry*, American Mathematical Society, 2001, <http://dx.doi.org/10.1090/gsm/033>.
- [7] L. Danzer y B. Grünbaum, «Über zwei probleme bezüglich konvexer körper von P. Erdős und von v. I. klee», *Math. Z.*, vol. 79, núm. 1, 1962, 95–99, <https://doi.org/10.1007/BF01193107>.
- [8] M. do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser, 1992.
- [9] P. Erdős, «Some unsolved problems», *Michigan Math. J.*, vol. 4, núm. 3, 1957, 291–300, <http://dx.doi.org/10.1307/mmj/1028997963>.
- [10] ———, *Some old and new problems in combinatorial geometry*, vol. 20, Annals of Discrete Mathematics, 1984, [https://doi.org/10.1016/S0304-0208\(08\)72816-0](https://doi.org/10.1016/S0304-0208(08)72816-0).
- [11] P. Erdős y G. Szekeres, «On some extremum problems in elementary geometry», *Ann. Univ. Sci. Budapest Sect. Math*, vol. 3-4, 1960, 53–62.
- [12] T. Fujioka, «Uniform boundedness on extremal subsets in Alexandrov spaces», preprint [arXiv:1809.00603](https://arxiv.org/abs/1809.00603).
- [13] N. Gigli, *Nonsmooth differential geometry—an approach tailored for spaces with Ricci curvature bounded from below*, Memoirs of the American Mathematical Society, 2018, <https://doi.org/10.1090/memo/1196>.
- [14] K. Grove, *Critical point theory for distance functions*, vol. 54, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 1993, <https://doi.org/10.1090/pspum/054.3/1216630>.
- [15] J. Heinonen, P. Koskela, N. Shanmugalingam y J. Tyson, *Sobolev spaces on metric measure spaces: An approach based on upper gradients*, Cambridge University Press, 2015, <https://doi.org/10.1017/CBO9781316135914>.
- [16] V. Kapovitch, *Perelman’s stability theorem*, vol. 11, Surv. Differ. Geom., 2007, Int. Press, Somerville, MA, <https://dx.doi.org/10.4310/SDG.2006.v11.n1.a5>.
- [17] N. Lebedeva, *Alexandrov spaces with maximal number extremal points*, vol. 19, Geom. Topol., 2015, <https://doi.org/10.2140/gt.2015.19.1493>.
- [18] G. Perelman, «Alexandrov paces with curvature bounded from below ii», preprint <https://anton-petrinin.github.io/papers/alexandrov/perelmanASWCBF2+.pdf>.
- [19] ———, «Dc structure on alexandrov space», preprint. <https://anton-petrinin.github.io/papers/alexandrov/Cstructure.pdf>
- [20] ———, *Elements of Morse theory on Aleksandrov spaces*, vol. 5, Algebra i Analiz, 1993, traducción al inglés en St. Petersburg Math. J. **5** (1994).
- [21] ———, *Spaces with curvature bounded below*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zurich, Switzerland 1994, Birkhauser, 1995, [https://doi.org/10.1007/978-3-0348-9078-6\\_45](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-9078-6_45).
- [22] G. Perelman y A. Petrunin, «Quasigeodesics and gradient curves in Alexandrov spaces», preprint. [https://anton-petrinin.github.io/papers/qg\\_ams.pdf](https://anton-petrinin.github.io/papers/qg_ams.pdf).
- [23] ———, *Extremal subsets in Aleksandrov spaces and the generalized Liberman theorem*, vol. 5, Algebra i Analiz, 1993, traducción al inglés en St. Petersburg Math. J. **5** (1993).
- [24] P. Petersen, *Riemannian geometry*, 2.<sup>a</sup> ed., Springer Science +Business Media, 2006, [https://doi.org/10.1007/978-0-387-29403-2\\_1](https://doi.org/10.1007/978-0-387-29403-2_1).
- [25] A. Petrunin, *Semiconcave functions in Alexandrov’s geometry*, Surv. Differ. Geom., XI, Int. Press, Somerville, MA, 2007, <https://dx.doi.org/10.4310/SDG.2006.v11.n1.a6>.

- [26] K. Shiohama, *An introduction to the geometry of Alexandrov spaces*, Lecture Notes Series 8. Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, 1993.