

DOI: <https://doi.org/10.47234/mm.7408>

Breve exposición formal del sistema musical diatónico: una exégesis de los escritos de Antoine Fabre D'Olivet sobre los principios de la música

Gerardo A. Laguna-Sánchez

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Lerma, México
g.laguna@correo.ler.uam.mx

y

Ricardo Barrón-Fernández

Centro de Investigación en Computación (CIC) del IPN, México
rbarron@cic.ipn.mx

1. Introducción

La escala musical diatónica, cuya introducción y estudio en occidente se le atribuye al filósofo y matemático Pitágoras [16, 19] se compone fundamentalmente de las siete notas musicales que, en los países occidentales de lengua romance, se les conoce como Do, Re, Mi, Fa, Sol, La y Si, debido a Guido D'Arezzo, un monje benedictino del siglo XI [13]; o simplemente con las letras C, D, E, F, G, A y B, en los países de habla anglosajona [2, 20].

En la actualidad, como ocurre con muchos temas que se dan como hechos dados, es muy difícil encontrar a alguien que dé una explicación clara de, por ejemplo, por qué son siete las notas musicales y no otro número. Al respecto, el amable lector puede consultar todas las referencias de este artículo, así como la bibliografía de cada uno de ellos, o realizar una simple búsqueda en Google, en cualquier idioma, y puede comprobar la abrumadora cantidad de respuestas y posturas, todas ellas diferentes, de personas más o menos expertas o eruditas, llámense músicos teóricos, músicos intérpretes, matemáticos y físicos, así como de músicos-matemáticos y matemáticos-músicos, dejando igualmente

azorado o anonadado al interesado y prácticamente con la misma pregunta sin responder.¹

La teoría detrás de la música tiene un origen ancestral que se pierde en los albores de la civilización humana y, por muy diversas causas, difícilmente han persistido las verdaderas razones de sus principios (véase [7, p. 29]).

Una de las circunstancias que en nuestros tiempos ha orillado a este desconocimiento de las «razones originales» de las cosas es la creciente complejidad y velocidad en los cambios de nuestro conocimiento en todas las disciplinas. La presión pragmática-utilitaria de nuestros tiempos nos obliga a adoptar algunas cosas como hechos dados, sin posibilidad, por falta de tiempo, de profundizar más en las razones originales de las cosas. Esto ocurre en todos los campos del conocimiento y la música no es la excepción.

Un panorama sobre la evolución de las escalas musicales, como las conocemos en occidente, se puede bosquejar a partir del artículo [3] y sus referencias. Al respecto, solo mencionaremos que, en relación con la cultura occidental, la escala diatónica es una referencia fundamental y que la cantidad de propuestas, teóricas y prácticas, en este sentido es muy numerosa y se encuentran involucrados grandes personajes, tanto de la música como de las matemáticas, incluyendo a Pitágoras, Descartes, Leibniz, Euler, Renau, Bach, entre otros muchos [1, 13, 16, 2, 20]. De todas estas propuestas, la que actualmente es el referente estándar en la música occidental, por razones de tipo práctico, es la denominada escala temperada.

Así las cosas, siendo la escala diatónica el punto de partida para otras (véase *Vida pitagórica*, 120 [10]), conviene procurar entender cómo es que se construye y de dónde surgen sus notas. A este respecto, en la literatura sobre teoría matemática de la música, existen excelentes trabajos de vanguardia que proponen emplear estructuras matemáticas modernas a fin de analizar, estudiar, caracterizar y reconstruir objetos musicales tales como la triada consonante, la escala diatónica, el modo Jónico (*Ionian Mode*), así como la dicotomía entre consonancia y disonancia, entre otros. En toda esta literatura especializada, se considera a los tonos como elementos dentro de un sistema tonal que se puede describir mediante un meta-lenguaje sintáctico. Trabajos, en este sentido, se pueden encontrar en colectivos de colaboración como el de Guerino Mazzola y colaboradores, entre los que destaca el trabajo de Thomas Noll (véase, por ejemplo, [14] y [15]). En el mismo sentido, también destacan los trabajos de David Lewin, desarrollados a partir de los estudios y propuestas formales de Hugo Riemann (véase, por

¹Solo como un ejemplo, ver el sitio: <https://es.quora.com/Por-qué-no-podemos-crear-una-octava-nota-en-la-música-Por-qué-solo-hay-7-Puede-la-ciencia-crear-la-octava-nota>

ejemplo, [11] y [12]). Muchos de los trabajos de la literatura especializada también hacen referencia a la construcción de la escala diatónica a partir de lo que se conoce como el «círculo de quintas» y el empalme de tetracordios, entre otras propuestas, todas ellas ampliamente conocidas y aceptadas entre los académicos y estudiosos de nuestra época.

Aunque los autores de este trabajo reconocen el muy pertinente y valioso trabajo disponible en la literatura especializada, creen que puede ser interesante para el público en general, sobre todo para el público no especializado, revisar brevemente alguna propuesta alternativa que no requiera más que de conocimientos de aritmética y álgebra básica. En este sentido, los autores están convencidos de que los escritos del francés Antoine Fabre D'Olivet, siendo un erudito orientalista, músico y teórico de la música, que vivió a finales del siglo XVIII e inicios del XIX, podrían brindar un enfoque diferente y enriquecedor a todo el trabajo ya existente que es, por demás, ampliamente difundido y aceptado.

En lo que resta de este artículo, en la sección 2, se hace una muy corta contextualización de los escritos del autor de referencia, Fabre D'Olivet; en la sección 3, se presenta una breve descripción de los conceptos y términos básicos referentes a las escalas musicales; en la sección 4, se explica el desarrollo formal para la construcción de una escala musical diatónica, a partir de una exégesis de los escritos de Fabre D'Olivet [7, 5, 6]; en la sección 5, se demuestra cómo la estructura de la escala diatónica da origen a una buena parte de la terminología musical actual; finalmente, en la sección 6, presentamos nuestras conclusiones.

2. Fabre D'Olivet y su búsqueda de los principios olvidados de la música

Fabre D'Olivet fue un erudito suigéneris que vivió a finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX. Siendo un dedicado estudioso de la cultura y lengua de los pueblos originarios de Europa, Medio Oriente y Oriente, así como original compositor y músico practicante, pudo teorizar sobre los principios de la música con una postura abierta y universalista, empática con visiones de mundo alternativas, a fin de encontrar soluciones prácticas a problemas concretos. Ya desde su época, su genio fue muchas veces incomprendido, debido a los prejuicios imperantes. Incluso, fue perseguido y hostigado injustamente, fundamentalmente por motivos políticos, por el mismísimo emperador Napoleón Bonaparte [4].

Al respecto de la autocomplacencia del materialismo positivista de su época, D'Olivet señaló en uno de sus múltiples escritos ([7, p. 16]):²

Creen conocer el mundo y no se conocen a sí mismos; balanza en mano, pesan a Saturno y sus satélites y no pueden calcular la vida de un mosquito; construyen sistemas sobre el flujo y reflujo de las mareas del océano y desconocen cómo sube la savia en la planta; establecen una mecánica del Universo y no perciben las leyes providenciales que los sostienen a sí mismos.

Ya entrando en materia, al respecto de la falta de conocimiento sobre las «razones originales» que sustentaban a la música, en lo general, y a la escala diatónica, en lo particular, el propio D'Olivet comenta en sus escritos sobre la situación que él pudo atestiguar en su época ([7, p. 40]):³

Cuando los eruditos modernos leen, en las obras de la Antigüedad, las extravagantes alabanzas a la música y las maravillas que se le atribuyen, no pueden concebirlas; y como no ven nada, ni en el estudio ni en la práctica de un arte, por demás frívolo a sus ojos, que justifique esas alabanzas o confirme esos milagros, tratan a los autores de videntes o los acusan de impostores, sin reflexionar que esos escritores, a los que se atreven a insultar así, eran los hombres más juiciosos, sabios, cultos y virtuosos de su época. Los propios músicos, avergonzados por su incapacidad para explicar mediante una música moderna que creen haber alcanzado el último grado de perfección, los asombrosos efectos atribuidos a la música antigua optan por culpar de sus efectos unas veces a la nobleza del arte, otras a la fuerza de la poesía que iba unida a ella, otras a lo que imaginan como rusticidad de los pueblos antiguos.

Y, en otra oportunidad, también refiere ([7, pp. 64-65]):⁴

²Traducción de los autores para el texto que aparece en la introducción de *The Secret Lore of Music*, de Joscelyn Godwin, citando una carta de Fabre D'Olivet, publicada en el libro *Notions sur le sens de l'ouïe* ([4], Lettre II, p. 31).

³Traducción de los autores para el texto que aparece en *The Secret Lore of Music* de Godwin, dentro del capítulo intitulado «The Ideas of the Ancients on Music», que corresponde a un manuscrito publicado originalmente por D'Olivet, en la *France Musicale*, con fecha 25 de septiembre de 1842, y que fue reproducido en *La musique expliquée comme science et comme art*, con el título «Idées des anciens sur la musique» ([8, p. 2]).

⁴Traducción de los autores para el texto que aparece en *The Secret Lore of Music* de Godwin, dentro del capítulo intitulado «Why the Principles of Music have Remained Unknown», que corresponde a un manuscrito publicado originalmente por D'Olivet, en la *France Musicale*, con fecha 1 de enero de 1843, y que fue reproducido en *La musique expliquée comme science et comme art*, con el título «Pourquoi les principes de la musique sont restés inconnus» ([8, pp. 28-29]).

Es imposible imaginar cuántos esfuerzos inútiles y negativos han hecho los hombres, desde la extinción de las luces y el cierre de los santuarios de los antiguos, para redescubrir los principios olvidados de la música; cuántos sistemas opuestos han surgido, entrado en conflicto y caído a su vez. Habría que haber leído todo lo que se ha escrito sobre este tema, desde Casiodoro y Boecio hasta nuestros días, para formarse una idea clara de ello.

El juicioso Tartini, después de haber hecho un valioso estudio de esas obras, afirma que no encontró nada que le iluminara, ni siquiera sobre la progresión diatónica de la que supone, y con razón, que los Antiguos ocultaron deliberadamente el principio constitutivo. «Es muy cierto», dice, «que la falta de un conocimiento perfecto del género diatónico siempre ha impedido e impedirá a los eruditos llegar a la fuente de la armonía...».

Los que piensan que este conocimiento consiste simplemente en el estudio de la escala musical están en un error; pero su error es involuntario, porque ¿cómo se puede esperar penetrar en el fundamento de esta escala? Ciertamente no por medio de los libros de los expertos. No hay ni uno solo que trate sólidamente este razonamiento primordial, ni siquiera entre los que nos han llegado de los griegos.

Así las cosas, D'Olivet fue uno de esos espíritus incomprendidos que, en algunos aspectos, se había adelantado muchos años a su tiempo. En este artículo se presenta una exégesis de algunos fragmentos suyos, en relación con la construcción de la escala diatónica, que escribió con base en sus profundos conocimientos sobre los pueblos y culturas originarios de Europa, Oriente y Medio Oriente. Pero, antes de entrar en materia, conviene repasar algunos conceptos básicos sobre el sonido y la música.

3. Conceptos básicos

Es sabido que la música era considerada entre los sabios de la antigüedad como parte del corpus del conocimiento, en estrecha relación con las matemáticas. Por ejemplo, entre los sabios latinos, en la época de la caída del imperio romano y justo antes del medioevo, Boecio hablaba del concepto *quadrivium* o «las cuatro vías» hacia la sabiduría: la música, la aritmética, la geometría y la astronomía [19]. Fue solo como resultado de la constante especialización de la ciencia occidental moderna que el estudio de la música fue eventualmente separado del

de las matemáticas y considerada tan solo como un arte, minimizando así su carácter de ciencia. Entonces, el lector no debe sorprenderse, si antes de construir la escala diatónica, tengamos que revisar, aunque sea muy brevemente, algunos conceptos que actualmente se encuentran en los campos de la física y las matemáticas.

Comenzaremos diciendo que los sonidos no son otra cosa más que la percepción que tenemos, a través del oído, de las vibraciones mecánicas transmitidas por el aire. Las vibraciones implican un número determinado de compresiones y expansiones por segundo del gas del aire. Una expansión y una compresión completan un ciclo, así que el número de ciclos por segundo de las vibraciones del aire es lo que se conoce como frecuencia de la vibración y se mide en Hertz o Hz (con Hz=ciclos/s). En el caso de los sonidos, mientras mayor sea la frecuencia, más «alto» o agudo escuchamos el tono del sonido. Por el contrario, mientras menor sea la frecuencia, más «bajo» o grave será el tono del sonido. Entonces el «tono» está íntimamente relacionado con la frecuencia del sonido escuchado y, por lo tanto, con su «altura». Así, los sonidos agudos corresponden a tonos altos, mientras que los sonidos graves corresponden a tonos bajos.

La expresión «tono» se deriva de la palabra griega *τόνος* (*tonos*) que hace referencia a una cuerda tensada y, por extensión, al sonido que se produce al hacerla vibrar. El sonido producido por una cuerda tensada se compone de una frecuencia fundamental, o tono fundamental, más múltiplos enteros de esta misma frecuencia que se conocen como armónicos.

Por ejemplo, los primeros 7 armónicos de una frecuencia fundamental de 128 Hz son 256 Hz, 512 Hz, 1024 Hz, 2048 Hz, 4096 Hz, 8192 Hz y 16,384 Hz. De hecho, el conjunto de una frecuencia fundamental y sus armónicos es lo que determina el «timbre» o perfil espectral de un instrumento musical.

La frecuencia fundamental que se produce depende de la tensión de la cuerda y de su masa pero, una vez fijos estos parámetros, el sonido producido siempre es el mismo. Los sabios antiguos⁵ observaron que, si una de estas cuerdas tensadas era segmentada, digamos con un dedo, a la mitad de su longitud original y se le hacía vibrar, el sonido producido correspondía a un tono con el doble de «altura», es decir, en términos modernos, un sonido con una frecuencia del doble de la frecuencia fundamental original. Más precisamente, observaron que la «altura» del tono producido por una cuerda se encuentra en una relación de proporción inversa respecto de la longitud de esta. Así, por

⁵En este artículo, cuando hacemos referencia a los sabios antiguos, nos referimos a los sabios de las culturas originarias, donde se estudiaron y desarrollaron los principios de la teoría musical, no necesariamente a Pitágoras o los griegos. Se sabe que el norte de África, en el Medio Oriente y en Oriente, estos principios se conocían desde tiempos inmemoriales.

ejemplo, al segmentar la cuerda en una proporción de 1:2 (al pasar de su longitud original a la mitad), el tono producido duplica la «altura» del tono original.

Antes de continuar, es necesario mencionar brevemente ciertos tecnicismos, sobre los que más adelante presentaremos su justificación formal, pero que por ahora es necesario conocer para no generar lagunas conceptuales. Nos referimos a los intervalos de frecuencia que en la música se conocen como octavas, cuartas y quintas.

Se dice que el intervalo entre un tono y otro es de una octava si el tono más alto duplica la frecuencia del tono más bajo, es decir, si guardan la proporción entre frecuencias de 2:1. Se verá más adelante que el nombre de octava responde al ordenamiento de las notas en las escalas musicales, en donde entre una nota musical y la siguiente nota musical con el mismo nombre, por ejemplo entre dos notas Do consecutivas, existen exactamente ocho notas musicales (incluyendo la nota inicial) y donde, entre la nota Do más alta y la nota Do por debajo, existe precisamente una relación de frecuencias de 2:1.

Por su parte, se dice que entre dos notas existe un intervalo de una cuarta si entre una nota musical y otra existen exactamente cuatro notas (incluyendo la nota inicial). Por ejemplo, entre una nota La y la siguiente nota Re. En este caso, entre la nota Re y la nota La debajo de ella, existe precisamente una relación de frecuencias de 4:3.

Finalmente, se dice que entre dos notas existe un intervalo de una quinta si entre una nota musical y otra existen exactamente cinco notas (incluyendo la nota inicial). Por ejemplo, entre una nota La y la siguiente nota Mi. En este caso, entre la nota Mi y la nota La debajo de ella, existe precisamente una relación de frecuencias de 3:2.

Para continuar, después de esta breve digresión técnica, vale la pena comentar que, si bien es cierto que no existe ningún documento escrito por la propia mano de Pitágoras, sí existe evidencia documental, proveniente de diversos autores griegos y latinos de la época clásica, identificados con las escuelas del pitagorismo y del neoplatonismo, que hacen referencias a estudios y tratados sobre las nociones musicales, así como su relación con Pitágoras. Por ejemplo, Jámblico, en su *Vida Pitagórica*, haciendo referencia al episodio donde Pitágoras pasaba frente a un taller de herrería y, al escuchar los constantes martilleos sobre el yunque, el referido sabio (*Vida pitagórica*, 115 [10]):

En ellos reconocía la consonancia de la octava, de la quinta y de la cuarta y veía el intermedio de la cuarta y de la quinta como una disonancia entre sí pero, por lo demás, completaba el gran intervalo que había entre ellos.

Así, a partir de esto, Jámblico atribuyó a Pitágoras, a veces un tanto erróneamente,⁶ la realización de experimentos y la obtención de algunas relaciones, con cuerdas tensadas con diferentes pesos, afirmando que (*Vida pitagórica*, 118 [10]):

Y el sistema de la octava se estableció en dos sentidos: bien por la conjunción de la quinta y la cuarta, dado que la proporción 2:1 es el producto de $3/2$ y $4/3$, tal como en 12:8:6, o bien, a la inversa, como una conjunción de la cuarta y la quinta, dado que la proporción de 2:1 es el producto $4/3$ y $3/2$, tal como 12:9:6 y en tal orden es una octava.

Y, finalmente, Jámblico refiere que (*Vida pitagórica*, 119-121 [10]):

Completó [Pitágoras] los tramos intermedios, en la escala diatónica, con sones análogos. De este modo subordinó el octacordio a los números concordes: la proporción 2:1, 3:3, 4:3 y la diferencia entre las últimas, 9 a 8.

Encontró de este modo el paso, por cierta necesidad física, de lo más grave a los más agudo en esta escala diatónica. En efecto, por este mismo sistema diatónico explicó claramente a su vez el sistema cromático y armónico [...]. De este modo, pues, se dice que encontró [Pitágoras] la música y, una vez que la sistematizó, la confió a sus discípulos con vistas a conseguir todo lo más bello.

Con esto queda demostrado que, en la antigüedad, sabían que el sentido auditivo percibía con claridad la diferencia entre los tonos producidos al segmentar la cuerda con diferentes proporciones y, particularmente, que existían ciertos efectos convenientes con algunas proporciones específicas, sobre todo entre algunos números enteros, por ejemplo, las proporciones 3:4 (al segmentar la cuerda a 3 cuartos de su longitud) o 2:3 (al segmentar la cuerda a 2 tercios de su longitud).

Se percataron de que era posible trasladar el tono de referencia de una melodía, hacia arriba o hacia abajo, si la frecuencia del tono de referencia final se obtenía mediante la iteración consecutiva de la proporción 2:1 o 1:2 (al dividir consecutivamente cada segmento resultante por la mitad o, complementariamente, al duplicar la longitud de los segmentos en cada turno). También, notaron que, respecto de un tono de referencia, la melodía aparecía especialmente cuando se combinaban tonos producidos por la cuerda segmentada en proporciones 3:4 y 2:3.

⁶Jámblico hace referencia a experimentos realizados con cuerdas tensadas con diferentes pesos, pero es claro que hay un error al atribuir una dependencia lineal entre la frecuencia producida y el peso que genera la tensión. La relación lineal, aunque inversa, solo aplica entre la longitud de la cuerda y la frecuencia que produce, siempre que la tensión de una cuerda se mantenga constante.

En este punto vale la pena resaltar que, por ejemplo, una composición que únicamente empleara combinaciones de los tonos 128 Hz, 256 Hz, 512 Hz, 1024 Hz, 2048 Hz, 4096 Hz, 8192 Hz y 16,384 Hz resultaría en una composición monotónica que no produciría un efecto sonoro melódico. Y esto es así, porque todas estas frecuencias son sonidos con una diferencia de grado más no de tipo, es decir, en esencia se trata de tonos que pueden ser representados por una misma nota. Es como si quisiéramos crear una melodía exclusivamente con tonos correspondientes a una misma nota musical, por ejemplo, con puras notas Do. Resultaría en una secuencia de notas Do, pero no una melodía como tal.⁷

En otras palabras, desde el punto de vista de la composición melódica, observaron que los tonos con relaciones de «altura» con proporciones 1:2 corresponden esencialmente a traslados del mismo tono fundamental. Por ejemplo, podemos decir que las frecuencias 880 Hz, 1760 Hz, 3520 Hz, etc.,⁸ que son escalamientos en potencias de 2 de la frecuencia fundamental de 440 Hz y, por lo tanto, constituyen traslaciones en «altura», de un mismo tono de referencia o tono fundamental. Es decir que, en términos prácticos, todas estas frecuencias corresponden a tonos que se identifican con una misma nota y, por tanto, son tonos homónimos.⁹

La operación de segmentar n veces consecutivas una cuerda de longitud l , en proporciones de 1:2, puede expresarse formalmente como $(1/2)^n l$, mientras que las frecuencias correspondientes, partiendo de la frecuencia o tono fundamental f , serían expresadas por $2^n f$. Por lo tanto, todos los sonidos cuyas frecuencias guardan, entre ellos, una relación de magnitud en términos de una potencia de dos (2^n), corresponden esencialmente al mismo tono fundamental, siendo homónimos desde el punto de vista de la composición musical.

Así, el oído humano reconoce una composición melódica cuando se combinan sonidos que guardan ciertas proporciones de altura respecto de un sonido de referencia y, sobre todo, cuando estas proporciones son las relaciones 3:4 y 2:3. Entonces, toda composición musical es relativa más que absoluta, porque nuestro oído reconoce una melodía en términos de los cambios de frecuencia respecto a una frecuencia de referencia y conforme a ciertas proporciones.

⁷Como veremos, Fabre D'Olivet explica esto con mucha claridad en su *Exposé succinct du système musical* ([5, p. 33]).

⁸Aquí solo debemos tener en cuenta que el intervalo audible de una persona promedio va de los 20 Hz a los 20KHz (20,000 Hz).

⁹En este caso, tomando como referencia la actual escala temperada, los sonidos con las frecuencias 440 Hz, 880 Hz, 1760 Hz, 3520 Hz se identifican, todos ellos, con la nota La y, por tanto, son tonos homónimos.

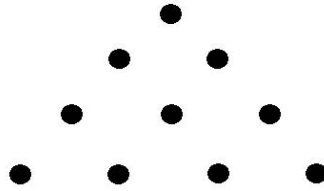


Figura 1. La *tetraktys* de los pitagóricos.

Por otro lado, los sabios antiguos estudiaron y descubrieron algunas relaciones aritméticas interesantes entre los primeros 4 números naturales: 1, 2, 3 y 4. No solo eso, también les asociaron un sistema simbólico y filosófico, que solo mencionaremos aquí muy brevemente debido a las limitaciones y el alcance de esta breve exposición que se circunscribe al ámbito de las ciencias exactas.¹⁰

Solo diremos que los números enteros 1, 2, 3 y 4 se encuentran relacionados de forma gráfica por lo que en la escuela pitagórica se conoció como la *tetraktys*, es decir el arreglo piramidal mostrado en la figura 1. En esencia, cada nivel de la pirámide representa, de alguna manera, la evolución aritmética de los cuatro primeros números naturales, a saber: el uno como unidad original; el dos como el agregado de la unidad consigo misma, en un conjunto binario; el tres como el conjunto ternario que se produce al agregar uno al binario y, finalmente, el cuaternario, el conjunto de cuatro que resulta de agregar uno al ternario o la duplicación del binario. Una propiedad interesante de estos primeros cuatro números es que al sumarlos entre sí (la unidad, más el binario, más el ternario, más el cuaternario) resultan en el número 10 ($1 + 2 + 3 + 4 = 10$), la decena que, de alguna forma, corresponde a la unidad en el siguiente orden de magnitud.¹¹

Cabe resaltar que este conjunto de 4 números primordiales (1, 2, 3 y 4), permiten expresar ciertas relaciones de interés para la composición musical. Para empezar, en relación con las proporciones de una cuerda tensada con un cierto tono fundamental, resulta que los dos primeros números guardan una proporción de 1:2. Pero ya vimos que los tonos producidos por una cuerda de longitud l y esta misma segmentada por la mitad, es decir con una longitud de $l/2$, son esencialmente un mismo tono fundamental, es decir que son tonos homónimos. Adicionalmente, en términos aritméticos, el 1 y el 2 representan principios generadores complementarios, ya que el 1 permite generar números impares,

¹⁰Los interesados pueden remitirse al libro *Music and the Occult*, de Joscelyn Godwin [9], así como a sus referencias, para profundizar en algunos aspectos filosóficos, tanto estéticos como metafísicos, de la escuela del pitagorismo en relación con la música.

¹¹El número 10 es, esencialmente, el 1 escalado.

mediante su adición a cualquier número par; mientras que el número 2 posibilita la generación de números pares, al multiplicar cualquier número entero por este. Es decir, que mientras que el número 1 representa la característica en potencia de la no paridad, el 2 representa lo propio para la condición de la paridad.¹²

Luego, tenemos la relación que guarda el 2 con el 3, es decir la proporción 2:3, y la relación que guarda el 3 con el 4, es decir la proporción 3:4; proporciones que, referidas a nuestra cuerda tensada, ya sabemos que producen tonos que permiten la conformación de una melodía. Por lo tanto, el número 3 y el número 4 posibilitan la realización de cualquier creación melódica, en tanto el número 3 es el primer número impar producido a partir de los principios generadores 1 y 2, mientras que el 4 es el primer número par producido como resultado de la primera duplicación del número 2.

Así, los sabios antiguos, reconocieron en los números 3 y 4 a las primeras producciones aritméticas (o números), como resultado de los principios generadores 1 y el 2, así como su completa correspondencia con ellos; en tanto que el 3 es de naturaleza impar mientras que el cuatro es de naturaleza par.¹³ Con ello, tuvieron a bien considerar a los números 1, 2, 3 y 4 como los pilares constructivos de sus creaciones melódicas, fundamentalmente mediante las proporciones 3:4 y 2:3, dado que la proporción 2:4 es idéntica a la proporción 1:2 y ya sabemos que esta proporción solo sirve para trasladar un tono hacia frecuencias que corresponden a tonos homónimos del mismo.

Entonces, aceptando al número 3 y al número 4 como sus elementos constructivos diferenciadores, los sabios antiguos consideraron como producciones aritméticas emblemáticas a la suma y la multiplicación entre ellos, es decir al número 7 ($3 + 4 = 7$) y al número 12 ($3 \times 4 = 12$); el primero de naturaleza impar y el segundo de naturaleza par. En particular, como más adelante lo demostraremos, comprobaron que el número 7 aparecía de manera natural durante la construcción de la escala diatónica.

Llegados a este punto, con lo expuesto hasta ahora, estamos listos para proceder con la construcción de la escala diatónica, con base en las proporciones fundamentales 3:4 y 2:3, tomando como marco de referencia las instrucciones y orientaciones que aparecen en los escritos de Fabre de D'Olivet.

¹²Al respecto, ver lo que argumenta Fabre D'Olivet en su *Exposé succinct du système musical* ([5, p. 33]), junto con nuestra traducción comentada por la nota 18.

¹³Plotino, en su tratado *Sobre el Uno*, citando a Diógenes Laercio, recuerda que «De la Diada indefinida y del Uno provienen las formas y los números» (*Enéada V*, 4 [17]).

4. Propuesta para la descripción y construcción formal de una escala diatónica a partir de una exégesis de los escritos de Fabre D'Olivet

Una breve, aunque muy sustantiva y concisa, referencia al problema de fondo abordado en este trabajo se encuentra en el libro sobre Teoría de Números, de Manfred Schroeder. Schroeder bosqueja muy bien el problema que implica encontrar la coincidencia exacta de lo que en música se conoce como los intervalos de octavas y de quintas, planteando la problemática de fondo con la pregunta ¿Cuántas quintas exactas constituyen un número entero de octavas? Schroeder reconoce que no es posible encontrar una equivalencia exacta, pero es posible encontrar soluciones aproximadas si se realizan ciertos «ajustes» ([18, pp. 26-28]). La construcción de la escala diatónica también se enfrenta, de alguna manera, con este mismo problema. Los autores de este artículo consideran que los escritos del teórico musical francés Fabre D'Olivet proporcionan algunas referencias y orientaciones, que pueden contribuir a la clarificación del tema que nos ocupa, a partir de un cierto ejercicio de exégesis para desarrollar las instrucciones e indicaciones que aparecen, implícitas o explícitas, en sus escritos sobre teoría musical.

Entonces, para desarrollar la descripción y construcción formal de la escala musical diatónica, aquí se han tomado como punto de partida, estrictamente en lo relativo a la teoría musical, los escritos de D'Olivet que aparecen en el libro intitulado *The Secret Lore of Music*,¹⁴ de Joscelyn Godwin [7]. Los autores consideran que las ideas expuestas por D'Olivet son interesantes en tanto que explican, de manera natural y en completa consistencia con la etimología del concepto «diatónico», los intervalos de la escala musical que nos ocupa: la escala musical diatónica.

¹⁴En el libro *The Secret Lore of Music*, Joscelyn Godwin, presenta esencialmente su traducción al inglés del libro póstumo de Fabre D'Olivet intitulado *La musique expliquée comme science et comme art et considérée dans ses rapports analogiques avec les mystères religieux, la mythologie ancienne et l'histoire de la Terre*, tomando como base la edición en francés de Jean Pinasseau, publicada en París en 1928. Esta edición es la más completa, en tanto incluye capítulos adicionales, que el propio Pinasseau encontró, enriqueciendo la edición de René Philippon, publicada en París en 1896 [8]. Hasta donde saben los autores del presente artículo, la última publicación de *La musique expliquée comme science et comme art* es la que corresponde a la edición de David Gattegno [6], en francés, con base en la edición de Pinasseau de 1928. Los autores toman como referencia la edición en inglés de Joscelyn Godwin, por tratarse de una publicación más asequible, pero los interesados pueden remitirse a la edición de Gattegno para estudiar el texto francés en su edición más completa.

En concreto, en este trabajo, se presenta la exégesis de algunos fragmentos de los escritos de D'Olivet. En el primer fragmento, D'Olivet menciona muy brevemente la idea general ([7, pp. 98-99]):¹⁵

Los principios fundamentales Si y Fa, al desarrollarse en sentido inverso, ya sea por cuartas o por quintas, es decir, procediendo en fracciones de $3/4$ o de $2/3$, producen dos conjuntos de tonos idénticos [aunque en orden diferente]. Es esta identidad la que constituye el septenario musical y la que hace que estas notas se llamen diatónicas, para distinguirlas de todos los demás tonos que pueden surgir más adelante de los dos principios fundamentales, pero que ya no son afines, al salir del orden diatónico para entrar en el cromático y el enarmónico. El septenario diatónico de la música, nacido de la unión de los dos principios [...] El primero [el tono fundamental Si] tiene un movimiento ascendente por cuartas, el segundo [el tono fundamental Fa] un movimiento descendente por quintas [...] Aquí bosquejaré una representación de este movimiento después de haber hecho algunas observaciones preliminares.

La primera, es que una cuerda medida por fracciones de cuartos, para dar las cuartas Si, Mi, La, Re, Sol, Do, Fa, no puede ser, al mismo tiempo, medida por fracciones de tercios, para dar las quintas Fa, Do, Sol, Re, La, Mi, Si; por lo tanto, se necesitan dos cuerdas para representar los dos principios Si y Fa.

La segunda observación es que estas dos cuerdas, suponiendo que sean iguales en todo lo demás, serán desiguales en longitud, ya que Fa necesita una distancia mayor para llegar a Si, procediendo por quintas, que la que necesita Si para llegar a Fa, por medio de cuartas.

En el segundo fragmento, D'Olivet hace referencia a un ejemplo numérico ([7, pp. 105-106]):¹⁶

[...] pasemos al desarrollo diatónico en la música. Este desarrollo funciona por la contraposición [alineamiento y

¹⁵Traducción de los autores para el texto que aparece en *The Secret Lore of Music* de Godwin, dentro del capítulo intitolado «Survey of Sacred Music» y corresponde a un manuscrito publicado originalmente por D'Olivet, en la *France Musicale*, con fecha 9 de junio de 1850.

¹⁶Traducción de los autores para el texto que aparece en *The Secret Lore of Music* de Godwin, dentro del capítulo intitolado «Survey of Celestial Music» y corresponde a un manuscrito publicado originalmente por D'Olivet, en la *France Musicale*, con fecha 16 de junio de 1850.

transposición] de las cuerdas fundamentales que dan los dos tonos primordiales Si y Fa:¹⁷

	Si		Mi		La	Re	Sol		Do		Fa	
	4096		3072		2304	1728	1296		972		729	
Fa		Do		Sol		Re		La		Mi		Si
5832		3888		2592		1728		1152		762		512

Encontramos en la contraposición de estas dos cuerdas las relaciones existentes entre todos los intervalos diatónicos y la identidad de los tonos queda irresistiblemente probada por la coincidencia establecida en el tono Re, que es el tono medio de las dos cuerdas [...] Si ahora trasladamos las cuerdas Si y Fa a sus octavas superiores, moviéndolas siempre por la progresión contraria apropiada, obtendremos inmediatamente la serie de tonos diatónicos, siguiendo el ordenamiento que les da la Naturaleza.

[...] Estos tonos, como estamos convencidos, deben su identidad a los desdoblamientos opuestos de los dos principios, así como su ordenamiento a la reconciliación de estos mismos principios. Sus relaciones están establecidas por proporciones matemáticas de rigurosa exactitud, de las que no se puede alterar nada sin que todo se confunda. Podemos, pues, aceptarlas con toda certeza y hacer de ellas la base imperturbable de nuestro sistema.

Como se puede comprobar, en los dos fragmentos anteriores, D'Olivet proporciona ciertas instrucciones y orientaciones, que permiten desarrollar con más detalle lo que él mismo bosquejó en su manuscrito intitulado «Exposé succinct du système musical» ([5, pp. 32-34]),¹⁸ a saber:

Cualquier sonido que se escuche puede concebirse como una unidad. Cada sonido comprende a todos los sonidos. Pero la cuerda que lo genera puede dividirse en partes y, en cuanto se divide, produce otros sonidos que son afines al sonido generador, pero cuya afinidad es armónica o inarmónica. Para que los sonidos producidos sean armónicos, la división de la cuerda debe realizarse según proporciones geométricas. El cuaternario pitagórico 1, 2, 3, 4, ofrece las únicas proporciones admisibles en música. Estas proporciones son notables porque funcionan según

¹⁷En la versión en inglés de Godwin, en la secuencia para la cuerda del tono Fa (F), aparece 728 como valor para la nota Mi (E), pero se trata de un error pues debe ser 762, tal y como aparece en nuestra versión del texto.

¹⁸Traducción de los autores para el texto original de D'Olivet que se encuentra en el libro *La vraie maçonnerie et la céleste culture*, con introducción y notas de León Cellier. La versión en inglés aparece en *The Secret Lore of Music* de Godwin, en el capítulo intitulado «A Brief Exposition of the Musical System», páginas 167-170.

una progresión aritmética y geométrica. Cualquier otra progresión que no sea la contenida o producida por el cuaternario 1, 2, 3, 4, solo resulta en sonidos inarmónicos, falsos y heterogéneos.

Una cuerda, concebida como unidad, produce un sonido con un tono cualquiera que adquiere propiedades y un nombre [de nota] solo por la relación que tiene con otros tonos. Es necesario que un tono sea considerado como un productor o un producto. Ahora bien, un tono solo puede producir otros tonos por la división que se hace de la cuerda que lo produce y, al mismo tiempo, solo puede producirse por la división que se hace de la cuerda generadora a la que pertenece.

Entonces, tomemos una cuerda como productora y comencemos a someterla a la progresión del cuaternario 1, 2, 3, 4. Llamemos a esta cuerda Si. Dividida de 1 en 2, dará su propia octava y no se apartará de su nota. Así no habremos hecho nada por el sistema musical, ya que Si no difiere de Si. Y aunque subiéramos este Si o lo bajáramos, de octava en octava, no produciría ninguna melodía. Esto demuestra que los dos principios fundamentales, 1 y 2, no pueden actuar desde su propia esencia. Solo pueden actuar desde su característica. Ahora la característica de 1 es la no paridad y la característica de 2 es la paridad. El 3, al ser el primer número [a partir del 1 y del 2], presenta por tanto la característica del 1 y, en consecuencia, el 4 presenta la característica del 2, del que es su potencia. Pero si una cuerda se divide en 3, no está permitido que sea dividida en 4; porque la paridad y la no paridad son incompatibles. Por lo tanto, necesitamos dos cuerdas, una que representará al principio 1, que dividiremos en 3, y la otra que representará el principio 2, que dividiremos en 4. Pero, ¿qué cuerdas son las que debemos someter a tales divisiones? Son necesariamente las cuerdas que se reproducen recíprocamente a sí mismas y que producen recíprocamente a todos los demás tonos, sin salir del septenario musical dado por la naturaleza. Ahora, las dos cuerdas que cumplen con estas condiciones son las cuerdas Fa y Si. Estas cuerdas forman, entre ellas, un intervalo irracional e incommensurable. Son opuestas, entre sí, como lo son los números pares y los impares. Dejemos que la cuerda Fa sea dividida en 3 y que represente al

principio fundamental 1. Así dividida, esta cuerda produce su quinta Do, avanzando de $2/3$ en $2/3$. Dejemos que la cuerda Si, dividida en 4, que representa al principio fundamental 2. Esta cuerda, así dividida, produce su quinta Mi, avanzando de $3/4$ en $3/4$. Para la cuerda Fa, continuando la progresión mediante $2/3$ se desarrolla, de quinta en quinta, la secuencia Fa, Do, Sol, Re, La, Mi, Si. Para la cuerda Si, continuando con la progresión mediante $3/4$, se desarrolla, de cuarta en cuarta, la secuencia Si, Mi, La, Re, Sol, Do, Fa. Así, estas dos cuerdas se reproducen mutuamente mediante un avance en sentido opuesto y, al reproducirse mutuamente, dan lugar al nacimiento de todos los tonos de la escala. Hay que tener en cuenta que el tono en el que coinciden las dos cuerdas es Re. [...] Si en la cuerda Fa continuamos con la progresión [después del séptimo tono], mediante $2/3$, se llega a un [tono] sostenido y, por tanto, se destruye así misma por la acción de la cuerda Si, de la cual el [tono] sostenido es directamente su producto y principio latente. [...] Estas nociones musicales son suficientes para la teoría [del sistema musical].

Para proceder con nuestra exégesis de estos textos, empezaremos por explicar que el concepto «diatónico» se deriva de las palabras griegas *δια* (*dia*, «a través de»), *τόνος* (*tonos*, «cuerda tensada») e *ίκος* (*ikos*, «relativo a»), es decir que una interpretación de la palabra diatónico podría ser expresado por «lo relativo a la transposición de cuerdas», lo que implica la contraposición (alineamiento) de al menos 2 cuerdas, así como la combinación de los tonos producidos por ellas.

Dicho lo anterior, la idea detrás de la construcción de una escala diatónica consiste en alinear, transponer y combinar los tonos producidos por dos cuerdas segmentadas, en forma iterada e independiente, una mediante la aplicación exclusiva de la relación fundamental 3:4 y la otra mediante la aplicación exclusiva de la relación fundamental 2:3. A la cuerda que vamos a segmentar en forma iterativa con la proporción 3:4 la vamos a denotar como la cuerda *C*, mientras que la cuerda que vamos a segmentar en forma iterativa con la proporción 2:3 la vamos a denotar como la cuerda *Q*.

Dijimos que necesitamos los tonos producidos al segmentar las cuerdas con sus respectivas proporciones en forma iterativa. De acuerdo pero, específicamente, ¿de qué cuerdas estamos hablando? Para empezar, necesitamos una referencia común, es decir un tono fundamental, producido por una cuerda de longitud *l* con ciertas características de masa y tensión. Si contamos con dos cuerdas idénticas, de longitud *l* y

mismas características de masa y tensión, entonces solo nos resta identificar al punto inicial de segmentación para cada una de las cuerdas, a saber, C_0 , para la cuerda C , y Q_0 , para la cuerda Q , de tal forma que podamos proceder con las segmentaciones consecutivas, en cada una de ellas, a partir de dichos puntos. Debemos garantizar que, al segmentar a C con la proporción 3:4 y a Q con la proporción 2:3, se llegue en ambas cuerdas a una misma longitud de segmentación (para producir un mismo tono, es decir, la nota Re coincidente que señala D'Olivet) después de un cierto número de iteraciones.

En este punto, una pregunta crucial es ¿exactamente después de cuántas iteraciones? Fabre D'Olivet muestra, en su ejemplo numérico, que esto ocurre en la tercera segmentación, cuando se alcanza la cuarta nota en cada una de las cuerdas, es decir la nota central de cada uno de los dos septenarios (como Fabre D'Olivet llama a las tuplas de 7 tonos o notas).

Aquí es donde aparece, con mucha claridad, el 7 como un número prototípico. Resulta que el número 7 es muy conveniente porque, siendo un número impar, permite que las dos secuencias de segmentaciones puedan compartir un punto en común, precisamente el del centro (el que correspondería al cuarto tono de cada cuerda) en el que ambas cuerdas producen exactamente el mismo tono (un sonido con la misma frecuencia) y, más importante aún, porque en la propuesta bosquejada por D'Olivet se observa que en cada una de las cuerdas, después de la sexta segmentación consecutiva, se termina produciendo (precisamente en el lugar del séptimo tono) un sonido que guarda relación en octavas con la frecuencia fundamental de la cuerda contraria. Es decir, que la cuerda C , después de 6 segmentaciones consecutivas, a partir de la longitud C_0 , resulta en una longitud cuyo sonido corresponde a un tono (el séptimo en esta progresión) cuya frecuencia es, precisamente, la de la frecuencia fundamental que produce la longitud Q_0 multiplicada por una potencia de 2 (la frecuencia correspondiente a C_0 multiplicada sucesivamente por 2, un cierto número de veces). De forma complementaria, la cuerda Q , después de 6 segmentaciones consecutivas, a partir de la longitud Q_0 , resulta en una longitud cuyo sonido corresponde a un tono (el séptimo en esta progresión) cuya frecuencia es la del tono fundamental de la longitud C_0 multiplicada por una potencia de 2.

En pocas palabras, las cuerdas C y Q , partiendo de los tonos fundamentales sustancialmente diferentes y correspondientes a las longitudes de los puntos C_0 y Q_0 , después de seis segmentaciones consecutivas, mediante las proporciones que les conciernen a cada una (3:4, para C , y 2:3, para Q), terminan produciendo un tono homónimo de la frecuencia fundamental contraria, a saber, la cuerda C termina produciendo

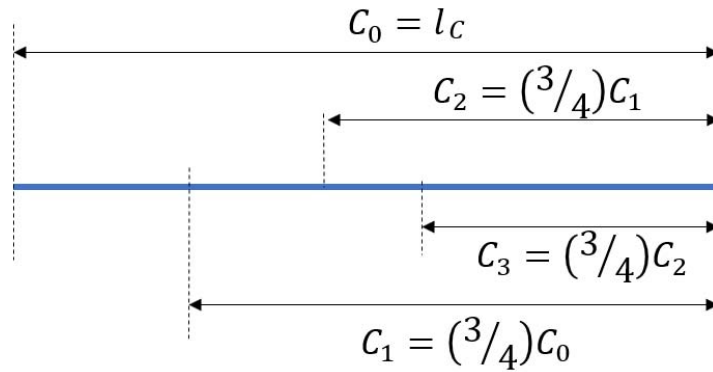


Figura 2. Aplicación de la proporción 3:4 para segmentar iterativamente la cuerda C .

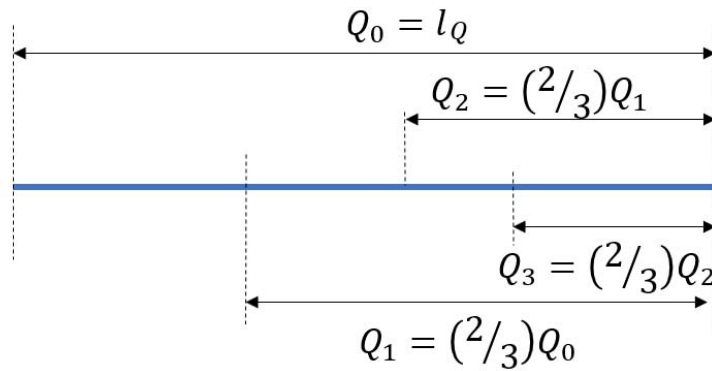


Figura 3. Aplicación de la proporción 2:3 para segmentar iterativamente la cuerda Q .

un tono homónimo del tono fundamental de Q y la cuerda Q termina produciendo un tono homónimo del tono fundamental de C .

Por lo tanto, si a cada cuerda la segmentamos 6 veces, en forma consecutiva para obtener un total de 7 tonos, tomando en cuenta que a los puntos iniciales de cada cuerda (a saber, C_0 y Q_0) les corresponden los tonos fundamentales de cada una de ellas, podemos confirmar fácilmente que solo tenemos que iterar tres veces la segmentación para alcanzar sus puntos medios.

Ahora solo nos resta precisar lo que significa iterar la segmentación de una cuerda de forma consecutiva. Por ejemplo, en la figura 2, se muestra la segmentación consecutiva para la cuerda C , después de tres iteraciones, con la proporción de 3:4; mientras que, en la figura 3, se muestra la segmentación consecutiva para la cuerda Q , después de tres iteraciones, con la proporción de 2:3. La idea es que, partiendo de una longitud inicial dada, ya sea C_0 o Q_0 , se proceda con la segmentación

mediante la multiplicación de la longitud por el cociente que corresponde a la proporción de interés. Por ejemplo, para la cuerda C , el punto de segmentación C_1 sería $C_1 = (3/4)C_0$, es decir tres cuartas partes de la longitud inicial de la cuerda C . El siguiente punto de segmentación, C_2 , correspondería a tres cuartas partes del segmento C_1 , es decir $C_2 = (3/4)C_1 = (3/4) \times (3/4)C_0 = (3/4)^2 C_0$ y, así, sucesivamente. Para la cuerda Q , el punto de segmentación Q_1 sería $Q_1 = (2/3)Q_0$, es decir dos terceras partes de la longitud inicial de la cuerda Q . El siguiente punto de segmentación, Q_2 , correspondería a dos terceras partes del segmento Q_1 , es decir $Q_2 = (2/3)Q_1 = (2/3) \times (2/3)Q_0 = (2/3)^2 Q_0$ y, así, sucesivamente.

Entonces, si se requiere que en la tercera segmentación de ambas cuerdas C y Q , partiendo respectivamente de los puntos iniciales C_0 y Q_0 , se llegue a una misma longitud que produzca un mismo tono, esto lo podemos expresar algebraicamente como sigue:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 C_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 Q_0, \quad (1)$$

de donde

$$\frac{C_0}{Q_0} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{\left(\frac{3}{4}\right)^3} = \left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^3 = \left(\frac{8}{9}\right)^3. \quad (2)$$

Es decir, que la longitud inicial de la cuerda C , debe ser el equivalente a tres segmentaciones consecutivas de la longitud inicial de Q mediante una proporción de 8:9. Y aquí es donde aparece, por primera vez en nuestro desarrollo, otra de las relaciones fundamentales de la escala diatónica, la que involucra a los números 8 y 9.

Ahora, si hacemos que el punto inicial de la cuerda Q defina a la longitud de referencia, es decir $Q_0 = l$, entonces, a partir de la expresión (2), tenemos que el punto inicial para la cuerda C es

$$C_0 = \left(\frac{8}{9}\right)^3 Q_0 = \left(\frac{8}{9}\right)^3 l. \quad (3)$$

Después, para producir los tonos restantes de cada una de las cuerdas, podemos proceder con 6 segmentaciones consecutivas en cada una de ellas, a fin de contar con 7 tonos en cada cuerda, quedando garantizado que el cuarto tono en cada una de ellas será exactamente el mismo, es decir que $C_3 = Q_3$. En los cuadros 1 y 2 se presentan las longitudes resultantes, después de cada una de las iteraciones del proceso de segmentación, para ambas cuerdas.

La primera cosa que debemos notar es que, en efecto, las longitudes de los segmentos correspondientes a los puntos centrales, Q_3 y C_3 son las mismas. Es decir, que el tono producido por ambas progresiones de segmentación, a la mitad del camino, es exactamente el mismo. Con esto

Punto	Longitud (notación explícita)	Longitud (expresión simplificada)	Longitud (como fracción)
Q_0	l	l	$1.000l$
Q_1	$\frac{2}{3}l$	$\frac{2}{3}l$	$0.666l$
Q_2	$\left[\frac{2}{3}\right]^2 l$	$\frac{4}{9}l$	$0.444l$
Q_3	$\left[\frac{2}{3}\right]^3 l$	$\frac{8}{27}l$	$0.296l$
Q_4	$\left[\frac{2}{3}\right]^4 l$	$\frac{16}{81}l$	$0.197l$
Q_5	$\left[\frac{2}{3}\right]^5 l$	$\frac{32}{243}l$	$0.131l$
Q_6	$\left[\frac{2}{3}\right]^6 l$	$\frac{64}{729}l$	$0.087l$

Cuadro 1. Puntos de segmentación consecutiva para la cuerda a Q mediante la proporción de 2:3.

Punto	Longitud (notación explícita)	Longitud (expresión simplificada)	Longitud (como fracción)
C_0	$\left[\frac{8}{9}\right]^3 l$	$\frac{512}{729}l$	$0.702l$
C_1	$\frac{3}{4}\left[\frac{8}{9}\right]^3 l$	$\frac{128}{243}l$	$0.526l$
C_2	$\left[\frac{3}{4}\right]^2\left[\frac{8}{9}\right]^3 l$	$\frac{32}{81}l$	$0.395l$
C_3	$\left[\frac{3}{4}\right]^3\left[\frac{8}{9}\right]^3 l$	$\frac{8}{27}l$	$0.296l$
C_4	$\left[\frac{3}{4}\right]^4\left[\frac{8}{9}\right]^3 l$	$\frac{2}{9}l$	$0.222l$
C_5	$\left[\frac{3}{4}\right]^5\left[\frac{8}{9}\right]^3 l$	$\frac{1}{6}l$	$0.166l$
C_6	$\left[\frac{3}{4}\right]^6\left[\frac{8}{9}\right]^3 l$	$\frac{1}{8}l$	$0.125l$

Cuadro 2. Puntos de segmentación consecutiva para la cuerda a C mediante la proporción de 3:4.

hemos avanzado significativamente, en favor de lograr el alineamiento y la transposición de ambas cuerdas, ya que, precisamente, emplearemos a este tono común como el punto de empalme o «de amarre» entre las dos cuerdas y sus correspondientes tonos.

La segunda cosa que debemos resaltar es que al punto C_6 , teniendo una longitud de $(1/8)l$, le corresponde un sonido con una frecuencia que equivale a un tono homónimo de la frecuencia fundamental generada en el punto Q_0 , en tanto que $C_6 = (1/8)l = (1/2)^3 l = (1/2)^3 Q_0$. De forma complementaria, al punto Q_6 , teniendo una longitud de $(64/729)l$, le corresponde un sonido con una frecuencia que equivale a un tono homónimo de la frecuencia fundamental generada en el punto C_0 , en tanto que $Q_6 = (64/729)l = (1/2)^3 (512/729)l = (1/2)^3 C_0$. Así, comprobamos que la cuerda C , partiendo del tono fundamental asociado a la longitud del punto C_0 , después de seis segmentaciones consecutivas con la proporción 3:4, termina produciendo un sonido con una frecuencia que corresponde a un tono homónimo de la frecuencia fundamental de la cuerda Q ; mientras que la cuerda Q , partiendo del tono fundamental asociado a la longitud del punto Q_0 , después de seis segmentaciones

consecutivas con la proporción 2:3, termina produciendo un sonido con una frecuencia que corresponde a un tono homónimo de la frecuencia fundamental de la cuerda C .

En los cuadros 1 y 2, dentro de las columnas con las expresiones simplificadas para las longitudes de cada segmento, es muy importante remarcar que las proporciones 3:4 y 2:3 expresan progresiones con comportamientos contrarios aunque, de alguna forma, complementarios. Concretamente, la progresión de los cocientes para la cuerda C , que se segmenta mediante la aplicación consecutiva de la proporción 3:4, muestra una tendencia a expresar la longitud alcanzada de forma cada vez más simple; es decir, que el cociente pasa de expresarse con números enteros relativamente grandes a expresarse con números enteros cada vez más pequeños. Así, se trata de una progresión que tiende a disminuir la magnitud de los números involucrados en el cociente que expresa a la longitud de segmentación y, con ello, a simplificar la representación de la proporción final resultante, ya que esta queda en términos de enteros cada vez más cercanos a los números de la *tetraktys*.

Por su parte, la progresión de los cocientes para la cuerda Q , que se segmenta mediante la aplicación consecutiva de la proporción 2:3, muestra una tendencia a expresar la longitud alcanzada de forma cada vez más elaborada; es decir, que el cociente pasa de expresarse con números enteros pequeños a expresarse con números enteros cada vez más grandes. Es decir, se trata de una progresión que tiende a aumentar la magnitud de los números involucrados en el cociente que expresa a la longitud de segmentación y, con ello, a dificultar la reducción de la proporción final resultante, ya que esta queda en términos de enteros cada vez más alejados de los números de la *tetraktys*.

Así las cosas, después de haber completado seis seccionamientos consecutivos en las cuerdas a C y Q , en cada una de ellas contamos con 7 longitudes y la producción de los 7 tonos correspondientes, de los cuales los tonos centrales son exactamente un mismo sonido, mientras que los séptimos tonos corresponden a tonos homónimos de la frecuencia fundamental de la cuerda contraria.

Ahora ya estamos listos para pasar a la última etapa en la construcción de la escala diatónica, es decir, la concerniente a la combinación y el traslado de los tonos de las dos cuerdas. De lo que se trata es de alinear ambas cuerdas, recurriendo al punto de seccionamiento central como un punto de intersección, para combinar ambas secuencias de tonos y, con ello, obtener una nueva secuencia de tonos que integre y armonice los dos principios que las producen por separado y que, en principio, son fundamentalmente contrarios, ya que la proporción 3:4

Punto	Longitud (expresada como cociente)	Longitud (expresada como fracción)
Q_0	l	$1.000l$
C_0	$\frac{512}{729}l$	$0.702l$
Q_1	$\frac{2}{3}l$	$0.666l$
C_1	$\frac{128}{243}l$	$0.526l$
Q_2	$\frac{4}{9}l$	$0.444l$
C_2	$\frac{32}{81}l$	$0.395l$
Q_3 y C_3	$\frac{8}{27}l$	$0.296l$
C_4	$\frac{2}{9}l$	$0.222l$
Q_4	$\frac{16}{81}l$	$0.197l$
C_5	$\frac{1}{6}l$	$0.166l$
Q_5	$\frac{32}{243}l$	$0.131l$
C_6	$\frac{1}{8}l$	$0.125l$
Q_6	$\frac{64}{729}l$	$0.087l$

Cuadro 3. Alineamiento, transposición y combinación de los tonos (longitudes) de las cuerdas C y Q .

avanza hacia cocientes cada vez más simples, mientras que la proporción 2:3 avanza hacia cocientes cada vez más elaborados, como ya se vio párrafos arriba.

El proceso de alineamiento, transposición, combinación y traslado lo vamos a realizar en dos pasos. El primer paso, simplemente consiste en combinar los puntos C_i con los puntos Q_i , teniendo claro que los puntos C_3 y Q_3 quedan empalmados, por tratarse de un mismo tono (misma frecuencia) y un mismo punto de seccionamiento (misma longitud), y respetando la posición relativa de los demás puntos, expresándolos a todos en términos de la longitud de referencia. El resultado se presenta en el cuadro 3.

Antes de continuar con el segundo paso, debemos remarcar que los séptimos tonos de cada cuerda (denotados por el índice 6) «desertan» de la naturaleza de su propia cuerda generadora, al alcanzar una frecuencia que corresponde a un tono homónimo de la frecuencia fundamental de la cuerda opuesta. Concretamente, en la cuerda Q aparece un tono homónimo de la frecuencia fundamental de la cuerda C , precisamente en la sexta segmentación de Q , en Q_6 , mediante la proporción 2:3, alcanzando una frecuencia que guarda una relación en octavas respecto de la frecuencia de C_0 y que se expresa como $2^3 f_{C_0}$, en términos de la frecuencia, o como $(1/2)^3 C_0$, en términos de la longitud. Esto implica

que al séptimo tono de la cuerda Q le corresponde un sonido con un valor de frecuencia que es igual a la frecuencia fundamental de la cuerda C , correspondiente al punto C_0 , multiplicada tres veces por 2.

En forma complementaria, en la cuerda C aparece un tono homónimo de la frecuencia fundamental de la cuerda Q , justamente en la sexta segmentación de C , en C_6 , mediante la proporción 3:4, alcanzando una frecuencia que guarda una relación en octavas respecto de la frecuencia de Q_0 y que se expresa por $2^3 f_{Q_0}$, en términos de la frecuencia, o como $(1/2)^3 Q_0$, en términos de la longitud. Esto implica que al séptimo tono de la cuerda C le corresponde un valor de frecuencia que es igual a la frecuencia fundamental de la cuerda Q , corresponde al punto Q_0 , multiplicada tres veces por 2.

Por lo antes mencionado, el espectro sonoro de las cuerdas alineadas, transpuestas y combinadas, representado en el cuadro 3, comprende un intervalo que alcanza hasta la tercera octava de cada una de las frecuencias fundamentales involucradas.

Por ahora, nos enfocaremos en el espectro sonoro que corresponde al intervalo de frecuencias dentro de una sola octava. Por razones de simetría, tomaremos el intervalo de la octava central, localizada entre los tonos C_2 y C_4 , precisamente alrededor de los puntos de intersección C_3 y Q_3 .

Para concluir con la construcción de nuestra escala diatónica, completaremos el septenario de tonos dentro de la octava central y, para ello, recurriremos al traslado de los tonos que quedan fuera de ella, mediante un conveniente mapeo, hacia su interior. Este mapeo lo realizaremos respetando la esencia de cada uno de los tonos externos, mediante la conveniente generación de tonos homónimos (guardando una relación en octavas con los tonos originales) mediante la aplicación de la proporción 1:2, es decir, mediante un escalamiento de la respectiva longitud por un factor de $(1/2)^n$ o 2^n , según sea el caso. Este proceso se muestra en el cuadro 4.

En el cuadro 4, se puede apreciar, con mucha claridad, que aparecen cuatro tonos nuevos al interior del intervalo de la octava central, como resultado del mapeo de los tonos externos a ella. Con ello, se completa el intervalo de interés: el total de tonos del septenario de la escala diatónica. Estos son precisamente los tonos que corresponden, como veremos más adelante, a las 7 notas musicales. Ahora, se pueden completar los intervalos de la octava superior y la octava inferior, mediante el mapeo de los tonos que hagan falta, desde la octava central y recurriendo al traslado que convenga con ayuda de los factores de escalamiento $(1/2)^n$ o 2^n .

Punto	Longitud (como cociente)	Longitud (como fracción)
Q_0	l	$1.000l$
C_0	$\frac{512}{729}l$	$0.702l$
Q_1	$\frac{2}{3}l$	$0.666l$
C_1	$\frac{128}{243}l$	$0.526l$
Q_2	$\frac{4}{9}l$	$0.444l$
$C_2 = 2Q_4$	$\frac{32}{81}l$	$0.395l$
$\frac{1}{2}C_0 = 4Q_6$	$\frac{256}{729}l$	$0.351l$
$\frac{1}{2}Q_1 = 2C_5$	$\frac{2}{6}l$	$0.333l$
Q_3 y C_3	$\frac{8}{27}l$	$0.296l$
$\frac{1}{2}C_1 = 2Q_5$	$\frac{64}{243}l$	$0.263l$
$\frac{1}{4}Q_0 = 2C_6$	$\frac{1}{4}l$	$0.250l$
$C_4 = \frac{1}{2}Q_2$	$\frac{2}{9}l$	$0.222l$
Q_4	$\frac{16}{81}l$	$0.197l$
C_5	$\frac{1}{6}l$	$0.166l$
Q_5	$\frac{32}{243}l$	$0.131l$
C_6	$\frac{1}{8}l$	$0.125l$
Q_6	$\frac{64}{729}l$	$0.087l$

Cuadro 4. Traslado de los tonos externos a la octava central y su y mapeo al interior de esta.

5. Influencia de la estructura de la escala diatónica en el lenguaje especializado de la música

Para concluir, vamos a comentar el ordenamiento y las relaciones entre los tonos de la escala diatónica. Para ello, nos enfocaremos en el intervalo de la octava central del cuadro 4, que ahora presentamos en el cuadro 5 con información adicional. El cociente que se reporta en la última columna es una medida de la «distancia», en frecuencia, entre dos notas adyacentes de la escala. Obsérvese como las distancias en frecuencia entre cada nota solo presenta dos posibles valores: $9/8 = 1.125$ o $256/243 = 1.053$. En el primer caso, el cociente $9/8$, es decir el factor

Tono	Punto	Longitud (como cociente)	Longitud (como fracción)	Métrica de distancia tonal (al siguiente tono)
0	C_2	$\frac{32}{81}l$	$0.395l$	$\frac{32 \times 729}{81 \times 256} = \frac{9}{8} = 1.125$
1	$\frac{1}{2}C_0 = 4Q_6$	$\frac{256}{729}l$	$0.351l$	$\frac{256 \times 6}{729 \times 2} = \frac{256}{243} = 1.053$
2	$\frac{1}{2}Q_1 = 2C_5$	$\frac{2}{6}l$	$0.333l$	$\frac{2 \times 27}{6 \times 8} = \frac{9}{8} = 1.125$
3	Q_3 y C_3	$\frac{8}{27}l$	$0.296l$	$\frac{8 \times 243}{27 \times 64} = \frac{9}{8} = 1.125$
4	$\frac{1}{2}C_1 = 2Q_5$	$\frac{64}{243}l$	$0.263l$	$\frac{64 \times 4}{243 \times 1} = \frac{256}{243} = 1.053$
5	$\frac{1}{4}Q_0 = 2C_6$	$\frac{1}{4}l$	$0.250l$	$\frac{2 \times 27}{6 \times 8} = \frac{9}{8} = 1.125$
6	C_4	$\frac{2}{9}l$	$0.222l$	$\frac{2 \times 81}{9 \times 16} = \frac{9}{8} = 1.125$

Cuadro 5. Tonos y puntos de la escala diatónica en la octava central de nuestra construcción.

1.125, denota una distancia en frecuencia que, dentro de la jerga musical, se conoce como distancia de «un tono». Por su parte, el cociente $256/243$ denota una distancia en frecuencia mínima, mediante el factor 1.053 que, aunque relativamente pequeña, es perfectamente identificada por el oído humano. A esta última distancia tonal se le denomina distancia de «un semitono».

Por ejemplo, entre el tono 0 y el tono 1 existe una distancia en frecuencia de 1.125, mientras que la distancia en frecuencia entre el tono 1 y el 2 es de 1.053. Es decir, que entre el tono 0 y el tono 1 existe un tono completo de separación, mientras que entre el tono 1 y el 2 tan solo existe un semitono.

En favor de una mayor claridad expositiva de lo que se va a comentar a continuación, en el cuadro 6 se presenta la información de los 7 tonos de la escala diatónica correspondientes al intervalo de la octava central, más el primer tono (el tono 0) de la siguiente octava. Nótese que el tono correspondiente al punto Q_4 es homónimo del correspondiente al punto C_2 , ya que guardan entre ellos una relación de exactamente una octava, pues $(32/81)l = 2 \times (16/81)l$, razón por la que ambos tonos son afines y se denotan con el mismo numeral (ambos se identifican con el «tono 0»). Por lo tanto, podemos decir que, después de la nota 6, aparece de nueva cuenta la nota 0, mostrando una periodicidad que se puede representar perfectamente con la operación matemática de módulo 7.

Por otro lado, así como el cociente de las frecuencias de dos tonos adyacentes (o, equivalentemente, al inverso del cociente de las longitudes de las cuerdas que los producen) permite definir una métrica de «distancia», en la jerga de los músicos se llama intervalo a la «distancia» entre dos notas y se especifica en término del número de notas intermedias. A esto también se le denomina como «grados» de la escala. Así, por ejemplo, en el cuadro 6, del primer tono 0, que corresponde al punto C_2 , al segundo tono 0, que corresponde al punto Q_4 , existen

Tono	Punto	Longitud (como cociente)	Longitud (como fracción)	Métrica de distancia tonal (al siguiente tono)
0	C_2	$\frac{32}{81}l$	$0.395l$	$\frac{32 \times 729}{81 \times 256} = \frac{9}{8} = 1.125$
1	$\frac{1}{2}C_0 = 4Q_6$	$\frac{256}{729}l$	$0.351l$	$\frac{256 \times 6}{729 \times 2} = \frac{256}{243} = 1.053$
2	$\frac{1}{2}Q_1 = 2C_5$	$\frac{2}{6}l$	$0.333l$	$\frac{2 \times 27}{6 \times 8} = \frac{9}{8} = 1.125$
3	Q_3 y C_3	$\frac{8}{27}l$	$0.296l$	$\frac{8 \times 243}{27 \times 64} = \frac{9}{8} = 1.125$
4	$\frac{1}{2}C_1 = 2Q_5$	$\frac{64}{243}l$	$0.263l$	$\frac{64 \times 4}{243 \times 1} = \frac{256}{243} = 1.053$
5	$\frac{1}{4}Q_0 = 2C_6$	$\frac{1}{4}l$	$0.250l$	$\frac{2 \times 27}{6 \times 8} = \frac{9}{8} = 1.125$
6	C_4	$\frac{2}{9}l$	$0.222l$	$\frac{2 \times 81}{9 \times 16} = \frac{9}{8} = 1.125$
0	Q_4	$\frac{16}{81}l$	$0.197l$	[Pendiente de calcular]

Cuadro 6. Tonos y puntos de la escala diatónica extendida.

exactamente 8 notas o grados, sin importar que la separación entre cada uno de los tonos intermedios pueda ser de un tono completo o de un semitono. Es así como un intervalo de 8 grados corresponde exactamente a una octava y, como sabemos, es justo en este intervalo en el que se duplica la frecuencia del tono de referencia. Esta es la razón por la que, al hablar de una octava como intervalo, implícitamente se hace alusión a la duplicación de la frecuencia del tono de referencia y, en automático, al traslado en «altura» de la escala musical.

Ahora, estamos en condiciones de explicar la razón de fondo por la que denotamos con la letra Q a la cuerda que segmentamos mediante la proporción 2:3, al igual que a todos sus puntos de segmentación. Esto es porque esta cuerda se asocia con los intervalos en «quintas» y de allí la ‘Q’. En el cuadro 6, podemos comprobar que en el intervalo que conforman dos puntos Q_i consecutivos, por ejemplo, en el intervalo entre Q_3 y Q_4 , existen exactamente cinco notas o grados entre ellas. Por lo tanto, esta es la razón por la que a la proporción 2:3 se le asocia con el intervalo de las «quintas».

De manera correspondiente, denotamos con la letra C a la cuerda que segmentamos mediante la proporción 3:4, al igual que todos sus puntos de segmentación. Esto es porque esta cuerda se asocia con los intervalos en «cuartas» y de allí la ‘C’. En el cuadro 6, podemos comprobar que en el intervalo que conforman dos puntos C_i consecutivos, por ejemplo, en el intervalo entre C_2 y C_3 , existen exactamente cuatro notas o grados entre ellas. Esta es también la razón por lo que la proporción 3:4 se le asocia con el intervalo de las «cuartas».

Así, la escala diatónica combina los efectos de la cuerda que genera las notas de las cuartas con los efectos de la cuerda que genera las notas de las quintas, materializando con ello un septenario tonal dentro de una cierta octava.

Nota	Punto	Longitud (como cociente)	Longitud (como fracción)	Distancia tonal (como factor)	Distancia tonal [en «tonos»]
La (A)	C_2	$\frac{32}{81}l$	$0.395l$	1.125	1 tono
Si (B)	$\frac{1}{2}C_0 = 4Q_6$	$\frac{256}{729}l$	$0.351l$	1.053	1 semitono
Do (C)	$\frac{1}{2}Q_1 = 2C_5$	$\frac{2}{6}l$	$0.333l$	1.125	1 tono
Re (D)	Q_3 y C_3	$\frac{8}{27}l$	$0.296l$	1.125	1 tono
Mi (E)	$\frac{1}{2}C_1 = 2Q_5$	$\frac{64}{243}l$	$0.263l$	1.053	1 semitono
Fa (F)	$\frac{1}{4}Q_0 = 2C_6$	$\frac{1}{4}l$	$0.250l$	1.125	1 tono
Sol (G)	C_4	$\frac{2}{9}l$	$0.222l$	1.125	1 tono

Cuadro 7. Los tonos de la escala diatónica, su correspondencia con los nombres de las notas musicales y su distancia tonal a la siguiente nota.

Para terminar, en el cuadro 7, se presenta la asignación de nombres para las notas que se ha adoptado en la cultura occidental moderna y su relación con los tonos de la escala diatónica. Esto a fin de poder identificar con claridad a cada una de las notas y, sobre todo, para definir, sin ambigüedad, a los tonos de referencia en la ejecución de una composición melódica. La regla de correspondencia es la siguiente: en el intervalo entre la nota denominada como Fa (o F) y la nota denominada como Si (o B) deben existir exactamente tres tonos completos. Aunque, en principio, esto es completamente arbitrario, los músicos modernos lo han acordado así, por convenir a cierta estética y armonía, de conformidad con los gustos y criterios de nuestra época y cultura.

En este punto vale la pena recordar que, a fin de cuentas, la posición relativa de la nota de referencia (por ejemplo, la nota Do), respecto de la progresión de tonos y semitonos de la escala diatónica, es una elección un tanto arbitraria. En realidad, existen, al menos, siete posibles escalas diatónicas, en donde el tono de referencia puede ser cualquiera dentro de la progresión de tonos y semitonos de la escala diatónica. De hecho, la disposición de los semitonos le da a cada escala su carácter, su efecto auditivo y, de allí, sus diferentes denominaciones en los textos antiguos.

Ya solo nos resta comentar brevemente una propiedad, por demás interesante, de la escala diatónica. Sabemos que para su construcción, a partir de las cuerdas C y Q , hemos alineado, transpuesto y combinado los tonos de dos progresiones con características que, en cierto sentido, se desarrollan en sentido opuesto. En apariencia, con esto se logra un equilibrio y una relación armónica, al quedar neutralizados dos principios contrarios, y se alcanza, por así decirlo, a una condición de «estabilidad del sistema».

La estabilidad del sistema musical diatónico tiene que ver con cierto «ajuste automático» de esta escala. Resulta que, siendo esta escala la materialización de un sistema musical y sonoro caracterizado por intervalos de octavas, cada ocho «pasos» (notas o grados) se debe alcanzar exactamente el doble de la frecuencia del punto de partida. Es muy claro el ajuste implícito del sistema diatónico, ya que considera exactamente 5 pasos de con tonos completos y dos pasos con semitonos. De no ser así, el sistema nunca llegaría a la siguiente octava y perdería su característica de periodicidad tonal con módulo 7.

Consideremos por un momento lo que sucedería con una frecuencia que se incrementara con 7 pasos de tonos completos:

$$f_{x2} = \left(\frac{9}{8}\right)^7 f_{x1} = 2.28f_{x1}.$$

Como vemos, al final de los 7 pasos, no se duplica la frecuencia inicial en forma exacta. Pero si, en vez de 7 pasos completos, se aplican 5 incrementos con tonos completos y dos semitonos, resulta que la duplicación se realiza en forma perfecta. Para el caso de la escala diatónica, esto se puede expresar de la siguiente forma:

$$f_{x2} = \left(\frac{9}{8}\right)^5 \left(\frac{256}{243}\right)^2 f_{x1} = 2.0f_{x1}.$$

Esto significa que, de alguna forma, los 2 pasos con semitonos no son más que dos pequeños «ajustes», a fin de garantizar la periodicidad con módulo 7 del sistema musical diatónico. Lo sorprendente es que estos dos «ajustes» surgieron, al menos en apariencia, de forma completamente natural durante el proceso de construcción de la escala diatónica, después del proceso de alineamiento, transposición y combinación de los tonos producidos por las cuerdas generadoras C y Q .

6. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado la descripción y construcción formal de una escala musical diatónica, a partir de una exégesis de los escritos y teorizaciones de Antoine Fabre D'Olivet, en lo relativo a los principios de la música entre los pueblos antiguos. La exposición se desarrolló en forma gradual y progresiva, a fin de mostrar la derivación y la justificación, tanto algebraica como aritmética, de las relaciones y proporciones empleadas, así como el número y la disposición de los elementos constructivos de la escala diatónica. Los autores esperan, con sinceridad, que este modesto trabajo permita acercar al público interesado hacia las posibles razones originales detrás de esta ancestral escala musical o,

por lo menos, para entender un poco mejor las razones formales detrás de cierta terminología y tecnicismos empleados en la música.

Agradecimientos

Los autores manifestamos nuestra mayor gratitud a los amables revisores anónimos, dado que este trabajo fue enriquecido de manera significativa con sus aportaciones, tanto de forma como de fondo, sobre todo en lo relativo a las sugerencias para consultar e incorporar algunas fuentes y referencias bibliográficas específicas, todo lo cual fue muy pertinente y oportuno.

Bibliografía

- [1] D. Ayala-Velázquez y P. A. Lonngi, «Contribuciones de Leonhard Euler a la acústica», *Miscelánea Matemática*, vol. 1, núm. 46, 2008, 1–25, https://miscelaneamatematica.org/download/tbl_articulos.pdf2.990f7cb4b04bd97c.4c6f6e6e67692e706466.pdf.
- [2] D. Benson, *Music: A mathematical offering*, Cambridge University Press, USA, 2007.
- [3] L. Blaine, «Music and Mr. Euler», en *Proceedings of the 14th International Conference Challenges in Mathematics Education for the Next Decade*, Sep. 10-15 2015, 1–5.
- [4] F. D'Olivet, *Notions sur le sens de l'ouïe en général, et en particulier sur la guérison de Rodolphe Grivel, sourd-muet de naissance*, C. Bretin Libraire, París, 1811, <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k63131g>.
- [5] F. D'Olivet y L. Cellier (Editor), *La vraie maçonnerie et la céleste culture*, Arbre d'Or, París, 2006, <https://www.arbredor.com/ebooks/VraieMaconnerie.pdf>.
- [6] F. D'Olivet y D. Gattegno (Editor), *La musique expliquée comme science et comme art et considérée dans ses rapports analogiques avec les mystères religieux, la mythologie ancienne et l'histoire de la Terre*, Pardès, París, 2012.
- [7] F. D'Olivet y J. Godwin (Traducción y comentarios), *The Secret Lore of Music: The hidden power of Orpheus*, Inner Traditions International, USA, 1997.
- [8] F. D'Olivet y R. Philipon (Editor), *La musique expliquée comme science et comme art et considérée dans ses rapports analogiques avec les mystères religieux, la mythologie ancienne et l'histoire de la terre*, Édition de L'initiation, París, 1896, <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k65505h>.
- [9] J. Godwin, *Music and the occult: French musical philosophies, 1750-1950*, Eastman Studies in Music, University of Rochester, USA, 1995.
- [10] Jámblico, *Vida pitagórica / Protréptico*, Biblioteca Clásica, Gredos, España, 2003.
- [11] D. Lewin, *Generalized musical intervals and transformations*, Yale University Press, USA, 1987.
- [12] ———, *Musical form and transformation: 4 analytic essays*, Yale University Press, USA, 1993.
- [13] V. Liern-Carrión, «La música y el número siete: Historia de una relación controvertida», *Suma*, vol. 1, núm. 58, 2008, 137–143, <https://redined.mecd.gob.es/xmlui/handle/11162/14493>.
- [14] T. Noll, «Ionian theorem», *Journal of Mathematics and Music*, vol. 3, núm. 3, 2009, 137–151, <https://doi.org/10.1080/17459730903309815>.

- [15] ———, «Two notions of well-formedness in the organization of musical pitch», *Musicae Scientiae*, vol. 14, núm. 1, 2010, 95–113, <https://doi.org/10.1177%2F10298649100140S106>.
- [16] A. Papadopoulos, «Mathematics and Music Theory: From Pythagoras to Rameau», *The Mathematical Intelligencer*, vol. 24, núm. 1, 2002, 65–73, <https://link.springer.com/article/10.1007/BF03025314>.
- [17] Plotino, *Enéadas (V-VI)*, Biblioteca Clásica, Gredos, España, 2014.
- [18] M. Schroeder, *Number theory in science and communication: With applications in cryptography, physics, digital information, computing, and self-similarity*, Springer, Germany, 2009.
- [19] M. Tomasini, «El fundamento matemático de la escala musical y sus raíces pitagóricas», *Revista Ciencia y Tecnología de la Universidad de Palermo*, vol. 1, núm. 92, 2007, 15–27, <https://www.palermo.edu/ingenieria/downloads/CyT6/6CyT%2003.pdf>.
- [20] D. Wright, *Mathematics and music*, American Mathematical Society, USA, 2009.