Miscelánea Matemática **44** (2007) 101–116 SMM

Funciones multivaluadas y sus aplicaciones

Juan Carlos Macías Romero
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Av. San Claudio y Río Verde
Cd. Universitaria
72570 Puebla, Pue.
México
jcmacias@fcfm.buap.mx

Resumen

En este trabajo se presentan las nociones básicas relacionadas con las funciones multivaluadas. Como una aplicación se da una prueba de cómo construir una función de Peano, esto es, una función continua y suprayectiva del intervalo unitario I en I^2. En general, en la literatura se construye tal función como límite uniforme de una sucesión de funciones continuas. Aquí la construimos de forma diferente, ya que se obtiene como la intersección de una sucesión anidada de imágenes de ciertas funciones multivaluadas.

1. Introducción

Este trabajo lo hemos dividido en tres secciones.

En la primera, damos una introducción del propósito principal.

En la segunda, exponemos algunos resultados sobre funciones multivaluadas, en particular sobre las que son semicontinuas superiormente. De hecho, probamos un resultado que se conoce como Teorema General de Funciones. Este teorema es muy importante pues nos brinda un modo de construir funciones continuas y suprayectivas entre espacios métricos y compactos.

En la tercera, utilizamos la teoría antes desarrollada para presentar unas aplicaciones de las funciones multivaluadas. Damos la prueba de cómo construir una función continua del intervalo unitario $[0,1]$ sobre el cuadrado $[0,1]^2$. En general, en la literatura se construye tal función como límite uniforme de una sucesión de funciones continuas. Aquí lo hacemos de forma diferente pues aplicamos el Teorema General de Funciones. Al final incluimos unos ejercicios sobre esta sección.

La temática de este trabajo se enmarca dentro de la parte de la Topología que se denomina Teoría de los continuos. También utilizaremos un poco de la teoría de los hiperespacios de continuos. Esta teoría tuvo sus inicios al principio del siglo XX con el trabajo de Hausdorff y Vietoris y durante los años veinte y treinta, la escuela polaca de topología desarrolló gran parte de la estructura fundamental de los hiperespacios de continuos.

Mencionemos algunas nociones básicas sobre estas teorías.

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto y conexo. En Topología, se llaman *hiperespacios* los espacios constituidos por una clase específica de subconjuntos de un espacio dado. Los hiperespacios más estudiados de un continuo X son:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y } A \neq \varnothing\},$$

y

$$C(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\right\}.$$

A estos espacios se les da una métrica definida de la manera siguiente:

Dados $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$ definimos:

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(a,x) < \varepsilon\}$$

donde d es la métrica de X.

La *métrica de Hausdorff* para 2^X se define entonces por:

$$H(A,B) = \acute{\imath}nf\,\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

Las nociones no definidas en lo que sigue pueden consultarse en [1], [2] y [3].

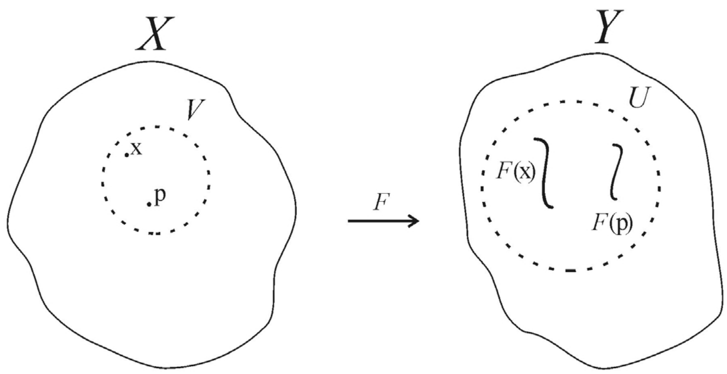
2. Funciones semicontinuas superiormente

Definición 2.1. Sean X y Y espacios métricos y compactos. A una función:

$$F\colon X \longrightarrow 2^Y$$

se le llama una *función multivaluada* de X en Y.

Definición 2.2. Sean X y Y espacios métricos y F una función de X en 2^Y. Decimos que F es *semicontinua superiormente en un punto* p de X, si para cada conjunto abierto U de Y tal que $F(p) \subset U$, existe un conjunto abierto V de X tal que $p \in V$ y $F(x) \subset U$ para cada $x \in V$. Decimos que F es *semicontinua superiormente* si lo es en cada punto del espacio.



Veamos un ejemplo sencillo de una función semicontinua superiormente.

Ejemplo. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Definamos $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}}$, para cada $x \in \mathbb{R}$, por:

$$F(x) = [0, f(x)]$$

Sea $p \in \mathbb{R}$. Afirmamos que F es semicontinua superiormente en p.

Si $p < 0$ entonces $F(p) = [0, f(p)] = [0,1]$, luego si U es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ tal que $[0,1] \subset U$ existe, por ejemplo, el conjunto abierto $V = (2p, 0)$ en $\mathbb{R}$ tal que $p \in (2p,0)$ y $F(x) = [0,1] \subset U$ para cada $x \in V$.

Si $p > 0$ entonces $F(p) = [0,2]$. Así, si U es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ tal que $[0,2] \subset U$ entonces podemos tomar, por ejemplo, el conjunto abierto $V = (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$. Note que $p \in V$ y $F(x) = [0,2] \subset U$ para cada $x \in V$.

Si $p = 0$ entonces, $F(0) = [0,2]$ y si U es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ tal que $F(0) \subset U$ entonces podemos tomar, por ejemplo, el conjunto abierto $V = (-\varepsilon, +\varepsilon)$. Es claro que $0 \in V$. Además, para puntos $x \in (-\varepsilon, 0) \subset V$, se tiene que $F(x) = [0,1] \subset [0,2] \subset U$, mientras que para $x \in [0, \varepsilon) \subset V$, se tiene que $F(x) = [0,2] \subset U$.

Por lo tanto, F es semicontinua superiormente en $\mathbb{R}$.

Unos resultados básicos acerca de funciones semicontinuas superiormente son los siguientes.

Proposición 2.3. *Sean X y Y espacios métricos. Entonces una función $F\colon X \longrightarrow 2^Y$ es semicontinua superiormente si y sólo si el conjunto:*

$$\{x \in X : F(x) \cap C \neq \varnothing\}$$

es cerrado en X para cada conjunto cerrado C en Y.

Demostración: Sean C un conjunto cerrado en Y y

$$A_C = \{x \in X : F(x) \cap C \neq \varnothing\}.$$

Probemos que $X \setminus A$ es un conjunto abierto en X.

Sea $x \in X \setminus A$, entonces $F(x) \cap C = \varnothing$. Observe que $X \setminus C$ es un abierto en X y supongamos que $F(x) \subset X \setminus C$. Como F es semicontinua superiormente existe un conjunto abierto V en X tal que:

$$x \in V \text{ y } F(z) \subset X \setminus C,$$

para cada $z \in V$. De donde, $V \subset X \setminus A$. Así, $X \setminus A$ es un abierto en X. Por lo tanto, A es un conjunto cerrado en X.

Ahora, supongamos que para cada conjunto cerrado C en Y, A_C es cerrado en X y probemos que F es semicontinua superiormente.

Sean $p \in X$ y U un conjunto abierto en Y tales que $F(p) \subset U$. Como $X \setminus U$ es un conjunto cerrado en Y, entonces $A_{X \setminus U}$ es cerrado en X. Esto es, $X \setminus B$ es un abierto en X.

Dado que $F(p) \subset U$ entonces $F(p) \cap (X \setminus U) = \varnothing$, por lo que $p \in X \setminus B$. Además, si $x \in X \setminus B$ entonces:

$$F(x) \cap (X \setminus U) = \varnothing,$$

luego, $F(x) \subset U$. Por lo tanto, F es semicontinua superiormente en p para cada $p \in X$. $\square$

Proposición 2.4. *Sean X y Y espacios métricos y f una función suprayectiva de X en Y tales que $f^{-1}(y)$ es un cerrado para cada $y \in Y$. Defínase $F\colon Y \longrightarrow 2^X$ por:*

$$F(y) = f^{-1}(y)$$

para cada $y \in Y$*. Entonces* f *es cerrada si y sólo si* F *es semicontinua superiormente. En particular, una función continua y suprayectiva* f *de* X *en un espacio métrico* Y*, es cerrada si y sólo si* $f^{-1}\colon Y \longrightarrow 2^X$ *es semicontinua superiormente.*

Demostración: Supongamos que f es cerrada y sean $p \in Y$ y U un conjunto abierto en X tales que $F(p) \subset U$. Como $X \setminus U$ es un conjunto cerrado en X entonces $f(X \setminus U)$ es un cerrado en Y. Sea:

$$V = Y \setminus f(X \setminus U),$$

Es claro que V es un abierto en Y.

Afirmamos que $p \in V$. Supongamos lo contrario, es decir, $p \in f(X \setminus U)$. Entonces existe $z \in X \setminus U$ tal que $p = f(z)$, de donde, $z \in f^{-1}(p) = F(p)$. Luego, $z \in U$, lo cual contradice la elección de z.

Afirmamos, también, que $F(x) \subset U$ para cada $x \in V$. Supongamos que no es así, es decir, que existe $x \in V$ tal que $F(x) \not\subseteq U$. Luego, existe $z \in F(x)$ tal que $z \in X \setminus U$. De donde:

$$f(z) \in f(X \setminus U).$$

Por otra parte, como $z \in F(x) = f^{-1}(x)$, entonces $f(z) = x$. Así $x \in f(X \setminus U)$, pero esto es imposible ya que $x \in V$. De esta manera, $F(x) \subset U$. Con todo lo anterior, F es semicontinua superiormente.

Ahora, supongamos que F es semicontinua superiormente y que C es un conjunto cerrado en X. Probemos que $f(C)$ es cerrado en Y.

Por la Proposición 2.3, el conjunto:

$$\hat{C} = \{y \in Y : F(y) \cap C \neq \varnothing\}$$

es cerrado en Y.

Veamos que:

$$\hat{C} = f(C).$$

Si $y \in \hat{C}$ entonces $F(y) \cap C \neq \varnothing$. Ahora si $x \in F(y) \cap C$ entonces $x \in F(y) = f^{-1}(y)$, luego $f(x) = y$ y, como $x \in C$, entonces $f(x) \in f(C)$. Así, $y \in f(C)$.

Ahora, si $y \in f(C)$ entonces existe $z \in C$ tal que $f(z) = y$, luego $z \in f^{-1}(y) = F(y)$. Por lo que $z \in F(y) \cap C$. De aquí, $y \in \hat{C}$. Por lo tanto, $f(C)$ es cerrado en Y.

La segunda parte de la proposición se tiene ya que si Y es un espacio métrico entonces todos los puntos son cerrados en Y y, por la continuidad de f, sus preimágenes son cerrados en X, luego se usa la primera parte. $\square$

Teorema 2.5. *Sean X y Y espacios métricos compactos y $f\colon X \longrightarrow Y$ una función suprayectiva. Entonces f es continua si y sólo si $f^{-1}\colon Y \longrightarrow 2^X$ es semicontinua superiormente.*

Demostración: Por la Proposición 2.4, se tiene que si f es una función continua entonces $f^{-1}\colon Y \longrightarrow 2^X$ es semicontinua superiormente, ya que f es cerrada por la compacidad de X y Y.

Ahora supongamos que $f^{-1}\colon Y \longrightarrow 2^X$ es semicontinua superiormente y veamos que f es continua. Para esto, supongamos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos en X que converge a un punto $x \in X$ y que $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto $p \in X$ con $p \neq f(x)$.

Como X es métrico, existen conjuntos abiertos ajenos U y W de X tales que:

$$x \in W \text{ y } f^{-1}(p) \subset U.$$

Dado que f^{-1} es semicontinua superiormente, existe un abierto V en Y tal que:

$$p \in V \text{ y } f^{-1}(x) \subset U,$$

para cada $x \in V$.

Por otra parte, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n) \in V$ para $n \geq N$, luego:

$$f^{-1}(f(x_n)) \subset U,$$

para $n \geq N$. Así, $x_n \in U$ para $n \geq N$, pero esto contradice que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x. $\square$

Lema 2.6. *Sean X y Y espacios métricos compactos y $F\colon X \longrightarrow 2^Y$ una función semicontinua superiormente tales que, para cada $x \in X$,*

$$F(x) = \{y_x\}.$$

Definamos $f\colon X \longrightarrow Y$ por $f(x) = y_x$, para cada $x \in X$. Entonces f es continua.

Demostración: Sea U un conjunto abierto en Y. Veamos que $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Para esto, sea $p \in f^{-1}(U)$. Entonces $f(p) = y_p \in U$, así $F(p) \subset U$. Como F es semicontinua superiormente existe un conjunto abierto V en X tal que:

$$p \in V \text{ y } F(z) \subset U,$$

para cada $z \in V$.

Veamos que:

$$V \subset f^{-1}(U).$$

Si $z \in V$ entonces $F(z) = \{y_z\} \subset U$, es decir, $y_z \in U$ y así $f(z) \in U$. Luego $z \in f^{-1}(U)$, por lo tanto, f es continua. □

Definición 2.7. Sean X y Y espacios métricos y $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de X en 2^Y. Decimos que $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una *sucesión decreciente de funciones* si para cada $x \in X$, $\{F_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente (como conjuntos, es decir, $F_i(x) \supset F_{i+1}(x)$ para cada i).

Definición 2.8. Si $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de funciones de X en 2^Y entonces F_∞ denota la función multivaluada definida, para cada $x \in X$, por:

$$F_\infty(x) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i(x)$$

El resultado siguiente nos será útil para probar algunas propiedades que cumple F_∞.

Proposición 2.9. *Sean $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de espacios métricos compactos y U un conjunto abierto en X_1 tales que*

$$U \supset \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i.$$

Entonces existe un entero N tal que $U \supset X_i$, para cada $i \geq N$. En particular, si cada $X_i \neq \varnothing$ entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \neq \varnothing$.

Demostración: Supongamos lo contrario. Entonces para cada i, se tiene que:

$$C_i = X_i \setminus U \neq \varnothing.$$

Por otra parte; si $n < m$ entonces $X_m \subset X_n$, luego $X_m \setminus U \subset X_n \setminus U$. Por tanto, $C_m \subset C_n$. Por lo que la intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de $\{C_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ es no vacía. De esta manera:

$$\{C_i \colon i \in \mathbb{N}\}$$

es una colección de conjuntos cerrados en X_1 con la propiedad de la intersección finita. Entonces por la compacidad de X_1 se tiene que:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \neq \varnothing.$$

Por otra parte, se tiene que:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (X_i \diagdown U) = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \right) \diagdown U = \varnothing \,,$$

pues $U \supset \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$. Lo cual contradice que $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \neq \varnothing$. Por lo tanto, se cumple la primera parte de la proposición. El hecho de que $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \neq \varnothing$ si cada $X_i \neq \varnothing$, se tiene pues $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una familia no vacía de cerrados con la propiedad de la intersección finita. $\square$

Una primer propiedad que tiene F_∞ está dada por el lema que sigue:

Lema 2.10. *Sean X y Y espacios métricos y $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de funciones semicontinuas superiormente de X en 2^Y. Entonces F_∞ va de X en 2^Y y es semicontinua superiormente.*

Demostración: Por la Proposición 2.9, $F_\infty(x) \neq \varnothing$ para cada $x \in X$, de donde, F está bien definida.

Para ver que F_∞ es semicontinua superiormente, tomemos $p \in X$ y U un conjunto abierto en Y tales que $F_\infty(p) \subset U$. Por la Proposición 2.9, existe un entero N tal que $U \supset F_i(x)$ para cada $i \geq N$. En particular, $F_N(p) \subset U$. Como F_N es semicontinua superiormente en p, existe un subconjunto abierto V de X tal que $p \in V$ y $F_N(x) \subset U$ para cada $x \in V$. Dado que:

$$F_\infty(x) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i(x) \subset F_N(x)$$

para cada $x \in V$, entonces $F_\infty(x) \subset U$ para cada $x \in V$. Por lo tanto, F_∞ es semicontinua superiormente. $\square$

Definición 2.11. Sean X y Y espacios métricos y $F \colon X \longrightarrow 2^Y$. Decimos que la función F *cubre* a Y si:

$$\bigcup_{x \in X} F(x) = Y$$

Lema 2.12. *Sean X y Y espacios métricos compactos y $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de funciones semicontinuas superiormente de X en 2^Y. Si F_i cubre a Y para cada i, entonces F_∞ cubre a Y.*

Demostración: Sea $q \in Y$. Por hipótesis tenemos que, para cada i, existe $x_i \in X$ tal que $q \in F_i(x_i)$. Por la compacidad de X existe una subsucesión $\{x_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$tal que $\{x_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a algún punto $p \in X$.

Ahora, mostremos que:

$$q \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i(p) = F_{\infty}(p).$$

Para esto, supongamos que $q \notin F_{\infty}(p)$. Entonces tomando el conjunto abierto $U = Y - \{q\}$ en Y se tiene que:

$$F_{\infty}(p) \subset U.$$

Luego, por la Proposición 2.9, existe un entero N tal que $F_N(p) \subset U$. Como F_N es semicontinua superiormente en p existe un subconjunto abierto V de X tal que $p \in V$ y para cada $x \in V$:

$$F_N(x) \subset U \tag{*}$$

Por otra parte, ya que $\{x_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a p y $p \in V$ entonces existe i_k, para algún k, tal que $i_k \geq N$ y $x_{i_k} \in V$, luego, por (*), se tiene que:

$$F_N(x_{i_k}) \subset U \tag{**}$$

Como $i_k \geq N$, se tiene que $F_N(x_{i_k}) \supset F_{i_k}(x_{i_k})$ y ya que $q \in F_{i_k}(x_{i_k})$ entonces $q \in F_N(x_{i_k})$. Luego, por (**), se tiene que $q \in U$. Lo cual es imposible puesto que $U = Y - \{q\}$, entonces $q \in F_{\infty}(p)$ y, así, $q \in \bigcup_{x \in X} F_{\infty}(x)$. Por lo tanto F_{∞} cubre a Y. □

El resultado que sigue se conoce como *Teorema General de Funciones* y es muy importante pues nos brinda un modo de construir funciones continuas y suprayectivas.

Teorema 2.13. *Sean X y Y espacios métricos compactos y $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de funciones semicontinuas superiormente de X en 2^Y tales que cada F_i cubre a Y y, para cada $x \in X$:*

$$\lim_{i \to \infty} \operatorname{diam}[F_i(x)] = 0.$$

Entonces existe una función continua y suprayectiva de X en Y.

Demostración: Sea $f\colon X \longrightarrow Y$ definida, para cada $x \in X$, por:

$$f(x) = \text{ único punto en } \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i(x) = F_\infty(x)$$

Veamos que f está bien definida.

Por la Proposición 2.9, $F_\infty(x) \neq \varnothing$, luego supongamos que existen p y q en F_∞ tales que $p \neq q$. Entonces p y q están en $F_i(x)$ para cada i, así $d(p, q) > 0$. Pero *diám* $F_i(x) > d(p, q)$ para cada i entonces:

$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{diam}[F_i(x)] > 0\,.$$

Esto contradice la hipótesis. Por lo tanto, f está bien definida.

Ahora veamos que f es continua.

Por el Lema 2.10, F_∞ es semicontinua superiormente y por el Lema 2.6 y el hecho de que si $x \in X$ entonces:

$$F_\infty(x) = \{y_x\} \text{ y } f(x) = y_x.$$

Se sigue que f es continua.

Finalmente probemos que f es suprayectiva.

Sea $y \in Y$. Como:

$$\bigcup_{x\in X} F_\infty(x) = Y$$

entonces $y \in F_\infty(x)$, para algún $x \in X$. Para este x, $f(x)$ es el único punto en $F_\infty(x)$, luego $y = f(x)$. Así, f es suprayectiva. Por lo tanto, hemos probado la existencia de una función, f, continua y suprayectiva de X en Y. □

3. Aplicaciones

En esta sección, utilizaremos la teoría antes desarrollada para presentar unas aplicaciones de las funciones multivaluadas. En general, en los libros de topología, estos resultados se demuestran sin utilizar esta teoría o se dejan como ejercicios, sin embargo, el uso de estas funciones nos brinda la oportunidad de probarlos de una forma más elegante.

Lema 3.1. *Sea* $Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ *con* $n < \infty$, *donde cada* A_i *es un espacio métrico compacto no vacío y* $A_i \cap A_{i+1} \neq \varnothing$ *para cada* $i = 1, 2, \ldots, n-1$. *Entonces existe una función semicontinua superiormente*

$F\colon [0,1] \longrightarrow 2^Y$ tal que F cubre a Y y para cada $t \in [0,1]$, se tiene que:

$$F(t) = A_i \text{ o } F(t) = A_i \cup A_{i+1} \quad \text{para algún } i\,.$$

Demostración: Definamos $F\colon [0,1] \longrightarrow 2^Y$ de la manera siguiente.

Primero tomemos $t_1, ..., t_n \in [0,1]$ tales que:

$$0 < t_1 < t_2, \cdots < t_{n-1} < t_n = 1,$$

entonces:

$$F(t) = \begin{cases} A_1 & \text{si } t \in [0, t_1) \\ A_1 \cup A_2 & \text{si } t = t_1 \\ A_2 & \text{si } t \in (t_1, t_2) \\ A_2 \cup A_3 & \text{si } t = t_2 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ A_k & \text{si } t \in (t_{k-1}, t_k) \\ A_k \cup A_{k+1} & \text{si } t = t_k \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ A_{n-1} \cup A_n & \text{si } t = t_{n-1} \\ A_n & \text{si } t \in (t_{n-1}, t_n] \end{cases}$$

Veamos que F es semicontinua superiormente.

Si $t = 0$, sea U un abierto en Y tal que $A_1 = F(0) \subset U$. Notemos que:

$$V = [0, t_1)$$

es un abierto en $[0,1]$ tal que $0 \in [0, t_1)$ y $F(t) = A_1 \subset U$ para cada $t \in [0, t_1)$.

Si $t = t_1$ y U es un abierto en Y tal que $A_1 \cup A_2 = F(t_1) \subset U$ entonces:

$$V = \left(\frac{t_1}{2}, \frac{t_1 + t_2}{2} \right)$$

es un abierto en $[0,1]$ tal que $t_1 \in V$. Luego, si $x \in \left(\frac{t_1}{2}, t_1\right)$ entonces:

$$F(x) = A_1 \subset U.$$

y si $x \in \left(t_1, \frac{t_1+t_2}{2}\right)$ entonces:

$$F(x) = A_2 \subset A_1 \cup A_2 \subset U.$$

En general, si $t \in (t_{k-1}, t_k)$, con $1 < k < n$, se tiene que $F(t) = A_k$, y si U es un abierto en Y tal que $A_k = F(t) \subset U$ entonces:

$$V = (t_{k-1}, t_k)$$

es un abierto en $[0,1]$ tal que:

$$t \in V \text{ y } F(x) = A_k \subset U$$

para cada $x \in V$. Si $t = t_k$, con $1 < k < n$, entonces $F(t) = A_k \cup A_{k+1}$ y si U es un abierto en Y tal que $A_k \cup A_{k+1} = F(t_k) \subset U$ entonces:

$$V = \left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}, \frac{t_k + t_{k+1}}{2}\right)$$

es un abierto en $[0,1]$ tal que $t_k \in V$. Luego, si $x \in \left(\frac{t_{k-1}+t_k}{2}, t_k\right)$ entonces:

$$F(x) = A_k \subset U$$

y si $x \in \left(t_k, \frac{t_k+t_{k+1}}{2}\right)$ entonces:

$$F(x) = A_{k+1} \subset A_k \cup A_{k+1} \subset U.$$

Finalmente para $t = t_n = 1$, sea U un conjunto abierto en Y tal que $A_n = F(t_n) \subset U$ entonces el conjunto abierto:

$$V = (t_{n-1}, 1]$$

en $[0,1]$ es tal que:

$$F(x) = A_n \subset U$$

para cada $x \in (t_{n-1}, 1]$.

Por lo tanto, F es semicontinua superiormente en cada punto del $[0,1]$. Para terminar, probaremos que F cubre a Y.

Para esto note que:

$$[0,1] = [0, t_1) \cup \{t_1\} \cup (t_1, t_2) \cup \{t_2\} \cup ... \cup (t_{n-1}, 1],$$

luego, si:

$$y \in \bigcup_{x \in X} F(x)$$

entonces:

$$y \in A_i \text{ o } y \in A_i \cup A_{i+1}$$

para algún i, de aquí se tiene que, en cualquier caso:

$$y \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i = Y.$$

Ahora, si $y \in Y$ entonces $y \in A_i$ para algún i. Así, $y \in f(t)$ para $t \in (t_{i-1}, t_i)$ o para $t = t_i$, en cualquier caso:

$$y \in \bigcup_{x \in X} F(x).$$

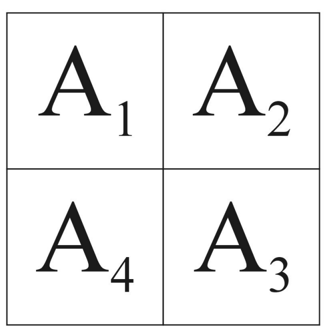
De esta manera, F cubre a Y. $\square$

Como una aplicación muy interesante de las funciones multivaluadas tenemos el resultado que sigue, el cual nos asegura la existencia de una curva de Peano, esto es una curva que llena el cuadrado.

Teorema 3.2. *Existe una función continua suprayectiva:*

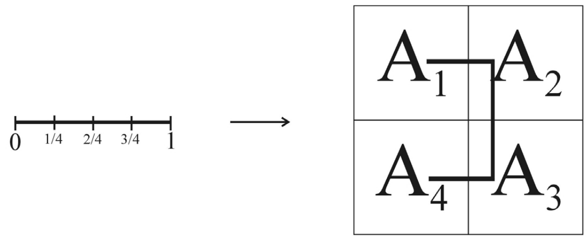
$$f\colon\ [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]\ .$$

Demostración: Dividamos $[0,1] \times [0,1]$ en cuatro cuadrados cerrados congruentes, digamos A_1, A_2, A_3, A_4 tales que A_i y A_{i+1}, $i = 1, 2, 3$, tengan una arista en común.



Definamos $F_1\colon\ [0,1] \longrightarrow 2^{[0,1]\times[0,1]}$ como sigue:

$$\begin{array}{rcll} F_1(0) & = & A_1 & \\ F_1(1) & = & A_4 & \\ F_1\left(\frac{i}{4}\right) & = & A_i \cup A_{i+1}, & \text{para } i = 1,2,3. \\ F_1(t) & = & A_i, & \text{si } t \in \left(\frac{i-1}{4}, \frac{i}{4}\right),\ i = 1,..,4. \end{array}$$



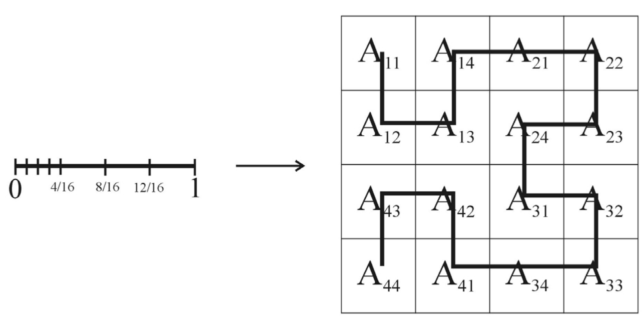
No es difícil ver que F_1 es semicontinua superiormente en $[0,1]$.

Ahora, dividamos cada A_i en cuatro cuadrados cerrados congruentes, digamos $A_{i,1}, A_{i,2}, A_{i,3}, A_{i,4}$, tales que cada $A_{i,j}$ y $A_{i,j+1}$ con $1 \leq i \leq 4$ y $1 \leq j \leq 3$ tengan una arista en común.

A_{11}	A_{14}	A_{21}	A_{22}
A_{12}	A_{13}	A_{24}	A_{23}
A_{43}	A_{42}	A_{31}	A_{32}
A_{44}	A_{41}	A_{34}	A_{33}

Definamos F_2 sobre $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ como sigue:

$$\begin{array}{rcll} F_2\left(0\right) & = & A_{i,1} & \\ F_2\left(\frac{1}{4}\right) & = & A_{1,4} \cup A_{2,1} & \\ F_2\left(\frac{j}{16}\right) & = & A_{1,j} \cup A_{1,j+1}, & \text{para } j = 1,2,3. \\ F_2\left(t\right) & = & A_{1,j}, & \text{si } t \in \left(\frac{j-1}{16}, \frac{j}{16}\right), \ j = 1,..,4. \end{array}$$



Análogamente, se define F_2 sobre $\left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right]$, $\left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right]$ y $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

Otra vez, F_2 es semicontinua superiormente en $[0,1]$. Además:

$$[0,1] \times [0,1] = \bigcup_{x \in [0,1]} F_2(x)$$

y, para cada $x \in [0,1]$, se tiene que:

$$F_1(x) \supset F_2(x)$$

y

$$\operatorname{diam} F_1(x) \leq 1 \text{ y } \operatorname{diam} F_2(x) \leq \frac{1}{2}.$$

Si continuamos definiendo F_n de manera semejante para cada $n \in \mathbb{N}$, habremos construído una sucesión de funciones $F_n\colon [0,1] \longrightarrow 2^{[0,1]\times[0,1]}$ tales que:

i) F_n es semicontinua superiormente para cada $n \in \mathbb{N}$,

ii) $F_n(x) \supset F_{n+1}(x)$ para cada $x \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$,

iii) $[0,1] \times [0,1] = \cup_{x \in [0,1]} F_n(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y

iv) $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \operatorname{diam}[F_n(x)] = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Entonces por el Teorema General de Funciones tenemos que existe una función continua y suprayectiva de $[0,1]$ en $[0,1] \times [0,1]$. $\square$

En el ejercicio 1 se tiene otra aplicación de las funciones multivaluadas.

4. Ejercicios

1. Demostrar que *Todo espacio métrico y compacto Y, es una imágen continua y suprayectiva del conjunto de Cantor*.

   Sugerencia: La construcción de tal función se lleva a cabo definiendo ciertas funciones multivaluadas del conjunto de Cantor en el hiperespacio de Y, de manera similar a las construídas en el teorema 3.2, con lo que se logra tener las condiciones para aplicar el Teorema General de Funciones.

2. Describa el tercer paso de la construcción de la curva en la prueba del teorema 3.2. Es decir, defina la función $F_3\colon [0,1] \longrightarrow 2^{[0,1]\times[0,1]}$, de manera semejante a F_2 de la prueba del teorema 3.2, tal que:

   i) F_3 es semicontinua superiormente,
   ii) $F_2(x) \supset F_3(x)$ para cada $x \in [0,1]$,
   iii) $[0,1]\times[0,1] = \cup_{x\in[0,1]} F_3(x)$ y
   iv) *diám* $F_3(x) \leq \frac{1}{4}$.

   e ilustre con un dibujo, el tercer paso de la construcción de la curva de Peano.

5. Agradecimientos

A mi maestro el Dr. Sergio Macías Álvarez, por su apoyo permanente e incondicional que siempre me ha brindado. Muchas gracias, Sergio.

Referencias

[1] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., "Hyperspaces: Fundamentals and Recents Advances", Monographs and Textbooks Pure Appl. Math. Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.

[2] S. B. Nadler , Jr., "Hyperspaces of sets", Monographs Textbooks Pure Appl. Math., Vol. 49, Marcel Dekker, New York, Basel, 1978.

[3] S. B. Nadler , Jr., "Continuum Theory: An Introduction", Monographs Textbooks Pure Appl. Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.