

El espacio métrico de las series de potencias formales

Josefina Álvarez

Department of Mathematics
New Mexico State University
jalvarez@nmsu.edu

1. Introducción

Escribiremos tales series en la forma

$$\sum_{j \geq 0} a_j X^j, \quad (1)$$

donde X es una variable indeterminada y los coeficientes a_j son números reales.

Una serie f como en (1) se puede identificar con la sucesión $\{a_j\}_{j \geq 0}$ de sus coeficientes.

Desde un punto de vista algebraico, las operaciones de adición

$$f + g \leftrightarrow \{a_j\}_{j \geq 0} + \{b_j\}_{j \geq 0} = \{a_j + b_j\}_{j \geq 0}$$

y multiplicación

$$f \cdot g \leftrightarrow \{a_j\}_{j \geq 0} \cdot \{b_j\}_{j \geq 0} = \{c_j\}_{j \geq 0}$$

con

$$c_j = \sum_{k=0}^j a_k b_{j-k},$$

dan al conjunto $\mathbb{R}[[X]]$ de las series de potencias formales una estructura de anillo conmutativo. La identidad aditiva es $\{0, 0, 0, \dots\}$, la identidad multiplicativa es $\{1, 0, 0, \dots\}$ y la inversa aditiva de $f \leftrightarrow \{a_j\}_{j \geq 0}$ es $-f \leftrightarrow \{-a_j\}_{j \geq 0}$.

En cuanto a la multiplicación, los elementos invertibles son exactamente las series con a_0 distinto de cero. Esto implica que el producto

Palabras clave: Series de potencias formales, orden, valor absoluto, desigualdad ultramétrica, propiedad de Arquímedes, completitud, análisis que no es arquimediano.

$f \cdot g$ de dos series f y g invertibles, sigue siendo invertible. Además, la inversa $\frac{1}{f \cdot g}$ de $f \cdot g$ es $\frac{1}{f} \cdot \frac{1}{g}$.

Dada la sucesión $\{a_j\}_{j \geq 0}$ asociada a la serie invertible f , la sucesión $\{b_j\}_{j \geq 0}$ asociada a la serie inversa $\frac{1}{f}$ se obtiene resolviendo recursivamente las ecuaciones

$$a_0 b_0 = 1$$

$$a_0 b_j + \sum_{k=1}^j a_k b_{j-k} = 0 \text{ para } j \geq 1.$$

Es posible definir en $\mathbb{R}[[X]]$ una estructura de espacio métrico completo compatible con su estructura algebraica.

El propósito de este artículo es el definir y estudiar tal estructura métrica que, como veremos, tiene propiedades interesantes. Con ella $\mathbb{R}[[X]]$ resulta un espacio métrico muy distinto del campo real $\mathbb{R}$. Más precisamente, $\mathbb{R}[[X]]$ es un espacio ultramétrico que contiene a los números naturales $\mathbb{N}$ como un subconjunto acotado. El que $\mathbb{R}[[X]]$ sea ultramétrico implica que la topología inducida por la métrica es bastante extraña. Sin embargo, a pesar de estas peculiaridades, aún es posible hablar en $\mathbb{R}[[X]]$ de un cierto «análisis real».

Una de las razones de estudiar propiedades analíticas fuera del campo real, es que nos permite reconocer aquellas propiedades que son específicas de $\mathbb{R}$. Más concretamente, podemos pensar que tenemos una lista de propiedades que se cumplen, y por lo tanto son equivalentes, en $\mathbb{R}$. El problema a considerar es, entonces, el decidir cuáles de estas propiedades siguen siendo ciertas en otros campos. El matemático James Propp llama a esta manera de pensar «análisis real en reverso» [5]. En lugar de un campo, trabajaremos aquí con una estructura un poco más general, que es el anillo $\mathbb{R}[[X]]$. Además, veremos que $\mathbb{R}[[X]]$ tiene propiedades muy agradables, que no son ciertas en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, una serie con términos en $\mathbb{R}[[X]]$ converge, exactamente, cuando su término general tiende a cero!

Nuestra exposición está organizada de la siguiente manera. En la sección 2 definimos las funciones orden y valor absoluto y estudiamos su interacción con la estructura algebraica de $\mathbb{R}[[X]]$, lo cual nos lleva a definir una ultramétrica en este anillo. La sección 3 está dedicada a la propiedad de Arquímedes, mientras que en la sección 4 probamos que el espacio métrico $\mathbb{R}[[X]]$ es completo. En las secciones 5 y 6 estudiamos una buena cantidad de propiedades de $\mathbb{R}[[X]]$ comparándolas con lo que ocurre en $\mathbb{R}$. Finalmente, en la sección 7, el epílogo de nuestra presentación, mencionamos brevemente algunas de las direcciones en las que se puede continuar el estudio iniciado aquí.

2. Orden y valor absoluto de una serie

Si $\mathbb{R}[[X]]^\times$ indica a las series en $\mathbb{R}[[X]]$ que son distintas de cero, definimos la función $o : \mathbb{R}[[X]]^\times \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$o\left(\sum_{j \geq 0} a_j X^j\right) = \min\{j : a_j \neq 0\}.$$

Por ejemplo, $o(-X + X^2 - X^3 + X^4 - \dots) = 1$, mientras que $o(2 + X^3 + 2X^5 + X^7 + \dots) = 0$.

La función o se llama orden y el valor $o(f)$ es el orden de la serie f .

Recordemos que $\mathbb{R}[[X]]^\times$ es cerrado con respecto a la multiplicación.

Proposición 2.1. *La función o tiene las siguientes propiedades.*

1. Su imagen es el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.
2. $o(f + g) \geq \min\{o(f), o(g)\}$ para f, g en $\mathbb{R}[[X]]^\times$ con $f + g$ en $\mathbb{R}[[X]]^\times$.
3. $o(f \cdot g) = o(f) + o(g)$ para f, g en $\mathbb{R}[[X]]^\times$.

La prueba de estas afirmaciones resulta inmediatamente de la definición de o y de la definición de las operaciones en $\mathbb{R}[[X]]$.

A partir de o definimos la función $A_a : \mathbb{R}[[X]] \rightarrow \mathbb{R}$, donde el parámetro a es un número real fijo mayor que 1.

$$A_a(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f = 0 \\ a^{-o(f)} & \text{si } f \neq 0 \end{cases}.$$

La función A_a se llama valor absoluto y $A_a(f)$ es el valor absoluto de la serie f , que siempre es ≤ 1 .

Proposición 2.2. *La función A_a tiene las siguientes propiedades.*

1. $A_a(f) \geq 0$ para f en $\mathbb{R}[[X]]$.
2. $A_a(f) = 0$ si y solo si $f = 0$.
3. $A_a(f + g) \leq \max\{A_a(f), A_a(g)\}$ para f, g en $\mathbb{R}[[X]]$.
4. $A_a(f \cdot g) = A_a(f) A_a(g)$ para f, g en $\mathbb{R}[[X]]$.

La verificación de estas propiedades es inmediata usando la definición de A_a y las propiedades de o .

Observemos que $\max\{A(f), A(g)\} \leq A(f) + A(g)$ para f, g en $\mathbb{R}[[X]]$.

Todo esto implica que, a partir del valor absoluto A_a , se puede definir una distancia d_a en $\mathbb{R}[[X]]$ como

$$d_a(f, g) = A_a(f - g) \tag{2}$$

para f, g en $\mathbb{R}[[X]]$. Con ella, $\mathbb{R}[[X]]$ es un espacio métrico. Más aún, la distancia (2) es invariante por traslaciones, es decir

$$d_a(f + h, g + h) = d_a(f, g)$$

para f, g, h en $\mathbb{R}[[X]]$. Además satisface

$$d_a(f \cdot g, f \cdot h) = A_a(f) d_a(g, h)$$

para f, g, h en $\mathbb{R}[[X]]$.

La desigualdad en 3) de la proposición 2.2 se llama desigualdad ultramétrica. En consecuencia decimos que $\mathbb{R}[[X]]$ es un espacio ultramétrico.

El valor absoluto usual en $\mathbb{R}$ no es ultramétrico, como puede verse tomando, por ejemplo, los valores 1 y 1.

El lema que sigue extiende 3) y 4) en la proposición 2.2.

Lema 2.3. *Consideremos $\mathbb{R}[[X]]$ con el valor absoluto A_a . Entonces, dadas $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathbb{R}[[X]]$ para $n \in \mathbb{N}$ fijo,*

$$A_a(f_1 + f_2 + \dots + f_n) \leq \max\{A_a(f_1), A_a(f_2), \dots, A_a(f_n)\} \quad (3)$$

y

$$A_a(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n) = A_a(f_1) A_a(f_2) \dots A_a(f_n). \quad (4)$$

Demostración. Por inducción, usando 3) y 4) en la proposición 2.2. $\square$

En el espacio $\mathbb{R}[[X]]$ están incluidos los polinomios con coeficientes reales y, en particular, los números reales, que son los polinomios constantes. Es decir tiene sentido comparar, en $\mathbb{R}$, el valor absoluto usual con el valor absoluto A_a . De inmediato se ve que son muy diferentes. Por ejemplo, $A_a(x) = 1$ para $x \in \mathbb{R}$ distinto de cero. O sea, la distancia d_a entre dos números reales distintos es siempre igual a uno. En otras palabras, d_a restringida a $\mathbb{R}$ es la distancia trivial, que satisface la desigualdad ultramétrica.

Proposición 2.4. *Dada $f \in \mathbb{R}[[X]]$, los enunciados que siguen son equivalentes.*

1. f es invertible.
2. $A_a(f) = 1$.

La prueba, que omitimos, es inmediata usando la definición de A_a .

Sea $\mathfrak{I}$ el subconjunto de $\mathbb{R}[[X]]$ de las series invertibles. Dada $g \in \mathfrak{I}$,

$$1 = A_a(1) = A_a\left(g \cdot \frac{1}{g}\right) = A_a(g) A_a\left(\frac{1}{g}\right)$$

de donde

$$A_a\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{1}{A_a(g)} = 1.$$

Por lo tanto, si $f \in \mathbb{R}[[X]]$ y $g \in \mathfrak{I}$,

$$A_a\left(\frac{f}{g}\right) = A_a\left(f \cdot \frac{1}{g}\right) = \frac{A_a(f)}{A_a(g)} = A_a(f). \quad (5)$$

En particular,

$$A_a(x \cdot f) = A_a(f) \quad (6)$$

para $f \in \mathbb{R}[[X]]$ y para todo número real $x \neq 0$.

El interés de la proposición 2.4 es que nos da una caracterización analítica de las series invertibles. Esta caracterización no depende de la elección de $a > 1$. En efecto, dados $a > b > 1$ en $\mathbb{R}$, tenemos

$$e^{-o(f) \ln a} = [e^{-o(f) \ln b}]^{\frac{\ln a}{\ln b}}$$

o, lo que es lo mismo,

$$a^{-o(f)} = [b^{-o(f)}]^\alpha \quad (7)$$

con $\alpha = \frac{\ln a}{\ln b} > 1$.

La igualdad (7) implica que los valores absolutos A_a y A_b son equivalentes, es decir las distancias d_a y d_b determinan las mismas sucesiones convergentes, con los mismos límites. En efecto, si $f_m \rightarrow f$ para $m \rightarrow \infty$ en la distancia d_b ,

$$a^{-o(f_m - f)} = [b^{-o(f_m - f)}]^\alpha \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

y recíprocamente. En otras palabras, ambas distancias definen la misma topología en $\mathbb{R}[[X]]$. Además, dada $f \in \mathbb{R}[[X]]$,

$$o(f) = -\frac{\ln A_a(f)}{\ln a}$$

independientemente de a .

Por todo esto, a partir de ahora trabajaremos con el valor absoluto correspondiente a $a = 2$. Este valor absoluto será indicado con A .

Proposición 2.5. *Las operaciones de anillo en $\mathbb{R}[[X]]$ son continuas.*

Demostración. La topología de $\mathbb{R}[[X]] \times \mathbb{R}[[X]]$ es la topología producto; siendo $\mathbb{R}[[X]]$ un espacio métrico, puede pensarse que esa topología está asociada a la estructura de espacio métrico en $\mathbb{R}[[X]] \times \mathbb{R}[[X]]$ definida por

$$[(f_1, g_1), (f_2, g_2)] \rightarrow A(f_1 - f_2) + A(g_1 - g_2).$$

Esta observación implica de inmediato que la adición es una operación continua. Tampoco hay dificultad en mostrar que la inversa aditiva es una operación continua de $\mathbb{R}[[X]]$ en $\mathbb{R}[[X]]$. En cuanto a la multiplicación, dado un par (f_0, g_0) en $\mathbb{R}[[X]] \times \mathbb{R}[[X]]$ fijo y dado $(f, g) \in \mathbb{R}[[X]] \times \mathbb{R}[[X]]$,

$$\begin{aligned} A(f \cdot g - f_0 \cdot g_0) &= A[f(g - g_0) + (f - f_0)g_0] \\ &\leq [A(f - f_0) + A(f_0)]A(g - g_0) + A(f - f_0)A(g_0), \end{aligned}$$

lo cual va a cero cuando $A(f - f_0) \rightarrow 0$ y $A(g - g_0) \rightarrow 0$.

Esto concluye la prueba de la proposición. $\square$

La proposición 2.5 dice que $\mathbb{R}[[X]]$ es un anillo topológico con la distancia inducida por el valor absoluto A . En otras palabras, dice que $\mathbb{R}[[X]]$ es un anillo topológico metrizable.

La restricción a $\mathbb{R}$ de la distancia asociada a A , que hemos visto es la distancia trivial, determina en $\mathbb{R}$ la topología discreta, en la cual cada punto es un conjunto abierto

Proposición 2.6. *La función $f \rightarrow \frac{1}{f}$ de $\mathfrak{I}$ en $\mathfrak{I}$ es continua con respecto a la distancia inducida por el valor absoluto A .*

Demostración. Dada $f_0 \in \mathfrak{I}$ fija y dada $f \in \mathfrak{I}$,

$$A\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f_0}\right) = A\left(\frac{f - f_0}{f \cdot f_0}\right) \stackrel{(i)}{=} A(f - f_0),$$

donde, en (i), hemos usado (5).

Es decir, $A\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f_0}\right) \rightarrow 0$ cuando $A(f - f_0) \rightarrow 0$.

Esto concluye la prueba de la proposición. $\square$

3. La propiedad de Arquímedes

Esta propiedad se enuncia en $\mathbb{R}$, en los siguientes términos (véase por ejemplo, [7, p. 9, teo. 1.20]).

$$\text{«Si } x, y \in \mathbb{R} \text{ y } 0 < y, \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x < ny\text{»}. \quad (8)$$

Esta propiedad de $\mathbb{R}$ afirma la posibilidad de medir. En efecto, si $0 < y$ es una unidad de longitud y $0 < x$ es una longitud arbitraria, (8) dice que siempre es posible cubrir x con un cierto número de copias de y .

La propiedad de Arquímedes se enuncia en varias formas equivalentes, que pueden verse, por ejemplo, en el breve artículo expositivo [1]. Una de ellas es, «el conjunto $\mathbb{N}$ no está acotado en $\mathbb{R}$ ». O sea, dado $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$.

El interés de esta formulación es que también tiene sentido en $\mathbb{R}[[X]]$ con el valor absoluto A . En este caso, $\mathbb{N}$ está acotado, pues $A(n) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, $\mathbb{R}[[X]]$ no satisface la propiedad de Arquímedes, o, en otras palabras, no es arquimediano.

Como la propiedad de no ser arquimediano y la propiedad de ser un espacio ultramétrico son ciertas en $\mathbb{R}[[X]]$, resultan equivalentes. O sea, podemos decir que $\mathbb{R}[[X]]$ no es arquimediano si y solo si es un espacio ultramétrico.

4. El espacio métrico $\mathbb{R}[[X]]$ es completo

Es decir, toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}[[X]]$ tiene límite en $\mathbb{R}[[X]]$.

La demostración de este resultado, que damos a continuación, es un ejemplo muy bueno de cómo funciona la estructura métrica definida en $\mathbb{R}[[X]]$.

Sea $\{f_m\}_{m \geq 0}$ una sucesión en $\mathbb{R}[[X]]$. Es decir, para cada $m \geq 0$,

$$f_m = \sum_{n \geq 0} a_{m,n} X^n.$$

Supongamos, además, que la sucesión es de Cauchy. Entonces, en particular, dado $k \geq 0$, existe $N_k \geq 0$ tal que

$$A(f_m - f_{N_k}) < 2^{-k} \quad (9)$$

para $m \geq N_k$. Así, comenzando con N_0 , seleccionamos $0 \leq N_0 < N_1 < \dots < N_k < \dots$.

La estimación (9) equivale a decir que $o(f_m - f_{N_k}) > k$ para $m \geq N_k$. Por lo tanto $a_{m,n} = a_{N_k,n}$ para $0 \leq n \leq k$ y $m \geq N_k$.

Sea

$$f = \sum_{n \geq 0} a_{N_n,n} X^n.$$

Afirmamos que la sucesión $\{f_m\}_{m \geq 0}$ converge a f en $\mathbb{R}[[X]]$ cuando $m \rightarrow \infty$. En efecto, para $k \geq 0$ fijo escribimos

$$f_m - f = \sum_{n=0}^k a_{m,n} X^n - \sum_{n=0}^k a_{N_n,n} X^n + \sum_{n \geq k+1} (a_{m,n} - a_{N_n,n}) X^n.$$

Si $m \geq N_k$, $a_{m,0} = a_{N_0,0}$ porque $m \geq N_k$ implica $m \geq N_0$; $a_{m,1} = a_{N_1,1}$ porque $m \geq N_k$ implica $m \geq N_1$; así siguiendo, hasta $a_{m,k} = a_{N_k,k}$.

Por lo tanto,

$$f_m - f = \sum_{n \geq k+1} (a_{m,n} - a_{N_n,n}) X^n$$

y

$$A(f_m - f) \leq 2^{-k-1}$$

para $m \geq N_k$, para cada $k \geq 0$.

Si ahora fijamos $\varepsilon > 0$, existe $k = k_\varepsilon \geq 0$ tal que $2^{-k-1} < \varepsilon$. Es decir, existe $N_k \geq 0$ tal que

$$A(f_m - f) \leq 2^{-k-1} < \varepsilon$$

para $m \geq N_k = N_{k_\varepsilon}$.

Por lo tanto hemos probado que $f_m \rightarrow f$ en $\mathbb{R}[[X]]$ cuando $m \rightarrow \infty$.

La idea de esta demostración es simple. Cuando la sucesión $\{f_m\}_{m \geq 0}$ es de Cauchy, a medida que m crece, un número cada vez mayor de sus

coeficientes $a_{m,n}$ se estabiliza en un valor común independiente de m , dando lugar a la serie límite f .

Afirmamos ahora que $\mathbb{R}[[X]]$ es la completación del anillo $\mathbb{R}[X]$ de los polinomios con coeficientes reales. Esto quiere decir que se cumplen las siguientes condiciones.

1. El anillo $\mathbb{R}[X]$ está contenido en el anillo $\mathbb{R}[[X]]$ y ambos tienen las mismas operaciones con las mismas unidades.
2. Ambos son espacios métricos con la distancia inducida por el valor absoluto A .
3. El espacio métrico $\mathbb{R}[[X]]$ es completo.
4. El espacio métrico $\mathbb{R}[X]$ es denso en $\mathbb{R}[[X]]$.

Por cierto, eso es lo que ocurre cuando decimos que los números reales $\mathbb{R}$ son la completación de los números racionales $\mathbb{Q}$, con la distancia inducida por el valor absoluto usual.

Es claro que $\mathbb{R}[[X]]$ y $\mathbb{R}[X]$ satisfacen las condiciones 1) y 2). En particular, los polinomios están asociados a sucesiones que son eventualmente cero. Como acabamos de probar que la condición 3) se cumple, solo falta ver que $\mathbb{R}[X]$ es denso en $\mathbb{R}[[X]]$. Para ello, observemos primero que dada una serie f en $\mathbb{R}[[X]]$, sus sumas parciales pertenecen a $\mathbb{R}[X]$. Además, estas sumas parciales convergen a f . En efecto,

$$A\left(f - \sum_{j=0}^k a_j X^j\right) = A\left(\sum_{j \geq k+1} a_j X^j\right) \leq 2^{-k-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Es decir, las series de potencias formales resultan series convergentes con respecto al valor absoluto A .

Para concluir esta sección, digamos, sin entrar en detalles, que $\mathbb{R}[[X]]$ es esencialmente la única completación de $\mathbb{R}[X]$ con respecto a la distancia inducida por el valor absoluto A . Por cierto, este es el caso de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ con la distancia inducida por el valor absoluto usual.

5. Algunas propiedades de $\mathbb{R}[[X]]$

Comenzamos con una proposición.

Proposición 5.1. *Dadas $f, g \in \mathbb{R}[[X]]$, si $A(f) \neq A(g)$,*

$$A(f + g) = \max\{A(f), A(g)\}.$$

Demostración. Supongamos que $A(g) < A(f)$.

Como $\max\{A(f), A(g)\} = A(f)$, la desigualdad ultramétrica implica que $A(f + g) \leq A(f)$.

Para probar que $A(f) \leq A(f+g)$, observamos que

$$\begin{aligned} A(f) &= A(f+g+(-g)) \leq \max\{A(f+g), A(-g)\} \\ &\stackrel{(ii)}{=} \max\{A(f+g), A(g)\}, \end{aligned}$$

donde en (ii) hemos usado que $A(-g) = A(g)$.

Es decir, $A(f) \leq A(f+g)$, lo cual completa la prueba de la proposición. $\square$

Probamos ahora dos corolarios de esta proposición.

Corolario 5.2. *En $\mathbb{R}[[X]]$, todos los triángulos son isósceles o equiláteros.*

Demostración. Supongamos que tres puntos distintos, f, g, h , son los vértices de un triángulo en $\mathbb{R}[[X]]$ con el valor absoluto A . Sean $f-h$, $f-g$ y $g-h$ los lados del triángulo. Si $A(f-g) \neq A(g-h)$, de acuerdo con la proposición 5.1,

$$A(f-h) = A(f-g+g-h) = \max\{A(f-g), A(g-h)\}.$$

Por lo tanto, todo triángulo tiene, al menos, dos lados iguales.

Esto completa la prueba del corolario. $\square$

La prueba del corolario 5.2, muestra que si el triángulo no es equilátero, el lado desigual es siempre el más corto.

Definición 5.3. Dados tres puntos distintos f, g, h en $\mathbb{R}[[X]]$, el triángulo con estos vértices es rectángulo si sus lados $f-g$, $g-h$ y $f-h$ satisfacen la igualdad en el teorema de Pitágoras.

Corolario 5.4. *En $\mathbb{R}[[X]]$ con el valor absoluto A , no hay triángulos rectángulos.*

Demostración. Supongamos que en $\mathbb{R}[[X]]$ hay tres puntos distintos, f, g, h , que son los vértices de un triángulo rectángulo. Podemos suponer que

$$A^2(f-h) = A^2(f-g) + A^2(g-h).$$

Por lo tanto, $A(f-g) < A(f-h)$ y $A(g-h) < A(f-h)$. Entonces, la proposición 5.1 implica que $A(f-g) = A(g-h)$. Esto contradice la observación hecha después de la prueba del corolario 5.2.

Así, la prueba del corolario está completa. $\square$

Recordemos que en cualquier espacio métrico (M, d) , dado $r \in \mathbb{R}$ positivo y dado $a \in M$, podemos definir la bola

$$B_{<r}(a) = \{x \in M : d(x, a) < r\}$$

y la bola

$$B_{\leq r}(a) = \{x \in M : d(x, a) \leq r\}.$$

Dado un subconjunto O de M , O es abierto si para cada $a \in O$ existe $r > 0$ tal que $B_{<r}(a)$ está contenida en O . Un subconjunto C de M es cerrado si $M \setminus C$ es abierto. No hay dificultad en comprobar que $B_{<r}(a)$ es un conjunto abierto y que $B_{\leq r}(a)$ es un conjunto cerrado. Además, el subconjunto

$$S(a, r) = \{x \in M : d(x, a) = r\}$$

es cerrado, pues la función $f(x) = d(x, a)$ es continua de M en $\mathbb{R}$ y $S(a, r) = f^{-1}(\{r\})$.

En $\mathbb{R}[[X]]$ todo esto es cierto pero, por ser ultramétrico, también tenemos otras propiedades que son inusuales.

Proposición 5.5. *Consideremos $\mathbb{R}[[X]]$ con el valor absoluto A .*

1. Si $g \in B_{<r}(f)$, $B_{<r}(g) = B_{<r}(f)$. Es decir, todo punto de $B_{<r}(f)$ es el centro.
2. Si $g \in B_{\leq r}(f)$, $B_{\leq r}(g) = B_{\leq r}(f)$. Es decir, todo punto de $B_{\leq r}(f)$ es el centro.
3. Si la intersección $B_{<r}(f) \cap B_{<s}(g)$ no es vacía, una de las bolas está contenida en la otra. En particular, si $r = s$, $B_{<r}(f) = B_{<s}(g)$.
4. Si la intersección $B_{\leq r}(f) \cap B_{\leq s}(g)$ no es vacía, una de las bolas está contenida en la otra. En particular, si $r = s$, $B_{\leq r}(f) = B_{\leq s}(g)$.
5. El conjunto $S(f, r)$ es abierto.
6. La bola $B_{<r}(f)$ es un conjunto cerrado.
7. La bola $B_{\leq r}(f)$ es un conjunto abierto.

Demostración. Probemos 1). Si $h \in B_{<r}(g)$,

$$A(h - f) \leq \max\{A(h - g), A(g - f)\} < r$$

resultando que $B_{<r}(g) \subseteq B_{<r}(f)$.

Si $h \in B_{<r}(f)$,

$$A(h - g) \leq \max\{A(h - f), A(g - f)\} < r$$

lo cual da la otra inclusión.

La prueba de 2) es igual, usando $\leq$ en lugar de $<$ en la definición de las bolas.

En cuanto a 3), supongamos $r \leq s$. Si $h_1 \in B_{<r}(f) \cap B_{<s}(g)$ y $h_2 \in B_{<r}(f)$,

$$A(h_2 - g) \leq \max\{A(h_2 - h_1), A(h_1 - g)\}$$

mientras que

$$A(h_2 - h_1) \leq \max\{A(h_2 - f), A(h_1 - f)\} < r.$$

Por lo tanto,

$$A(h_2 - g) < \max\{r, s\} \leq s,$$

de donde resulta que $B_{<r}(f) \subseteq B_{<s}(g)$.

Si $r = s$, es claro que $B_{<r}(a) = B_{<s}(b)$.

De la misma manera se prueba 4), usando $\leq$ en lugar de $<$ en la definición de las bolas.

Probemos ahora 5).

Dada $g \in S(f, r)$ y dado $0 < s < r$, si $h \in B_{<s}(g)$, escribimos $A(h - f) = A(h - g + g - f)$. Como $A(h - g) < s$ y $A(g - f) = r$, resulta $A(h - g) < A(g - f)$. Por lo tanto, usando la proposición 5.1,

$$A(h - f) = \max\{A(h - g), A(g - f)\} = r.$$

Es decir, $B_{<s}(g) \subseteq S(f, r)$, lo cual nos dice que $S(f, r)$ es abierto.

Para probar 6), necesitamos demostrar que $B_{<r}(f)$ contiene a su frontera. Fijemos entonces $g \in \mathbb{R}[[X]]$ en la frontera de $B_{<r}(f)$ y también fijemos $0 < s \leq r$.

Como $B_{<s}(g) \cap B_{<r}(f) \neq \emptyset$, la demostración de 3) muestra, en particular, que $g \in B_{<r}(f)$. Es decir, $B_{<r}(f)$ es un conjunto cerrado.

La prueba de 7) se reduce a observar que $B_{\leq r}(f)$ es la unión de los conjuntos abiertos $B_{<r}(a)$ y $S_r(a)$.

Esto completa la prueba de la proposición. $\square$

Siendo $A(f) \leq 1$ para $f \in \mathbb{R}[[X]]$, los enunciados en la proposición 5.5 se tornan triviales para ciertos valores de r y s . Por ejemplo, en 1), si $r > 1$, $B_{<r}(f) = \mathbb{R}[[X]]$.

Las partes 3) y 4) de la proposición 5.5 son aún ciertas si se considera una bola $B_{\leq r}(f)$ y una bola $B_{<s}(g)$.

Como consecuencia de 6) y 7) en la proposición 5.5, la frontera de $B_{<r}(f)$ es vacía y la frontera de $B_{\leq r}(g)$ también es vacía.

Estas peculiaridades justifican la notación $B_{<r}(f)$ y $B_{\leq r}(f)$ que hemos usado y que se debe a Alain M. Robert [6, p. 69]. Aunque no es la notación usual, va bien con las propiedades demostradas en la proposición 5.5 porque no sugiere, *a priori*, una dicotomía entre bolas que son conjuntos abiertos y bolas que son conjuntos cerrados.

Los conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados se llaman, en inglés, *clopen*. Aquí los llamaremos *cerrabiertos*.

De acuerdo con la proposición 5.5, la topología de $\mathbb{R}[[X]]$ tiene una base que consiste de conjuntos cerrabiertos. Además, la distancia en $\mathbb{R}$ asociada al valor absoluto A , que hemos visto es la trivial, determina en $\mathbb{R}$ la topología discreta, en la cual cada punto es un conjunto cerrabierto.

Si miramos con cuidado los resultados que hemos probado hasta ahora, veremos que las demostraciones aún funcionan en cualquier espacio métrico (M, d) con una distancia d que satisface la desigualdad ultramétrica

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\},$$

para $x, y, z \in M$.

Además, la conclusión del corolario 5.2 sirve como una caracterización de estos espacios. En efecto,

Proposición 5.6. *Sea (M, d) un espacio métrico. Todo triángulo en M es isósceles o equilátero si y solo si la distancia d satisface la desigualdad ultramétrica.*

Demostración. Nos falta probar que el que d satisfaga la desigualdad ultramétrica, es una condición necesaria para que solo haya en M triángulos isósceles o equiláteros.

Supongamos que para ciertos x, y, z en M , el triángulo con vértices x, y, z es escaleno. Por ejemplo, digamos que

$$d(x, z) < d(x, y) < d(y, z).$$

Entonces

$$d(y, z) > \max \{d(y, x), d(x, z)\},$$

lo cual muestra que d no satisface la desigualdad ultramétrica.

Esto concluye la prueba de la proposición. $\square$

6. Sucesiones y series en $\mathbb{R}[[X]]$

Comenzamos con un lema.

Lema 6.1. *Dadas $f, g \in \mathbb{R}[[X]]$,*

$$|A(f) - A(g)| \leq A(f - g). \quad (10)$$

Demostración. Podemos escribir (10) como

$$-A(f - g) \underset{(iii)}{\leq} A(f) - A(g) \underset{(iv)}{\leq} A(f - g).$$

La desigualdad (iii) es equivalente a $A(g) \leq A(f) + A(f - g)$, que es cierta. La desigualdad (iv) es equivalente a $A(f) \leq A(f - g) + A(g)$, que también es cierta.

Así, el lema está probado. $\square$

Proposición 6.2. *Sea $\{f_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión convergente en $\mathbb{R}[[X]]$. Entonces, la sucesión real $\{A(f_n)\}_{n \geq 0}$ converge a cero, o es eventualmente constante.*

Demostración. Supongamos que la sucesión $\{A(f_n)\}_{n \geq 0}$ no converge a cero. De acuerdo con el lema 6.1,

$$|A(f_m) - A(f_n)| \leq A(f_m - f_n).$$

Por lo tanto, la sucesión $\{A(f_n)\}_{n \geq 0}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Sea $l \in \mathbb{R}$ su límite, el cual debe ser mayor que 0. Entonces existe $M_1 \geq 1$ tal que

$$A(f_n) > \frac{l}{2}$$

para $n \geq M_1$. Además existe $M_2 \geq 1$ tal que

$$A(f_m - f_n) < \frac{l}{2}$$

para $m, n \geq M_2$.

Si $M = \max\{M_1, M_2\}$,

$$\begin{aligned} A(f_m) &= A(f_m - f_n + f_n) \underset{(v)}{=} \max\{A(f_m - f_n), A(f_n)\} \\ &= A(f_n) \end{aligned}$$

para $m, n \geq M$, donde hemos usado en (v) la proposición 5.1.

Esto concluye la prueba de la proposición. $\square$

Por ejemplo la sucesión $\{\frac{n}{n+1}\}_{n \geq 0}$ muestra que la proposición 6.2 no es cierta en $\mathbb{R}$ con el valor absoluto usual.

Proposición 6.3. *Una sucesión $\{f_n\}_{n \geq 0}$ en $\mathbb{R}[[X]]$ es convergente, si y solo si*

$$A(f_{n+1} - f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (11)$$

Demostración. El que la condición (11) es necesaria, es inmediato. Probemos que es suficiente. Para ello probaremos que la sucesión es de Cauchy.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $M \geq 1$ tal que $A(f_{n+1} - f_n) < \varepsilon$ para $n \geq M$. Si $m > n \geq M$,

$$\begin{aligned} A(f_m - f_n) &= A(f_m - f_{m-1} + f_{m-1} - f_{m-2} + \cdots + f_{n+1} - f_n) \\ &\underset{(vi)}{\leq} \max\{A(f_m - f_{m-1}), A(f_{m-1} - f_{m-2}), \dots, A(f_{n+1} - f_n)\} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

donde, en (vi), hemos usado (3).

Esto completa la prueba de la proposición. $\square$

La condición (11), aunque necesaria, no es suficiente en $\mathbb{R}$ con el valor absoluto usual. Por ejemplo, si $x_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$,

$$|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

aunque la serie armónica $\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j}$ no converge en $\mathbb{R}$.

Proposición 6.4. *Una serie $\sum_{j \geq 0} f_j$ con $f_j \in \mathbb{R}[[X]]$ converge en $\mathbb{R}[[X]]$ si y solo si su término general tiende a cero.*

Demostración. Resulta de usar la proposición 6.3 en la igualdad

$$\sum_{j=0}^n f_j - \sum_{j=0}^{n-1} f_j = f_n. \quad \square$$

Desde luego, esto no es cierto en $\mathbb{R}$ con el valor absoluto usual, como lo muestra la serie armónica.

Definición 6.5. Decimos que una serie $\sum_{j \geq 0} f_j$ con $f_j \in \mathbb{R}[[X]]$ converge absolutamente si la serie real $\sum_{j \geq 0} A(f_j)$ converge.

Por ejemplo, dada $f_j = X^j$, la serie $\sum_{j \geq 0} f_j$ converge absolutamente porque $\sum_{j \geq 0} A(f_j) = \sum_{j \geq 0} 2^{-j}$.

Proposición 6.6. Dada una serie $\sum_{j \geq 0} f_j$ con $f_j \in \mathbb{R}[[X]]$ los siguientes enunciados son ciertos.

1. Si la serie converge absolutamente, es convergente.
2. La recíproca de 1) no es cierta.

Demostración. Para probar 1), escribimos

$$A(f_n) = \sum_{j=0}^n A(f_j) - \sum_{j=0}^{n-1} A(f_j)$$

y usamos la proposición 6.4.

En cuanto a 2), la idea es construir una sucesión $\{f_l\}_{l \geq 0}$ que converge a cero en $\mathbb{R}[[X]]$, pero tan lentamente que la serie con término general $A(f_l)$ no converge en $\mathbb{R}$.

Comenzamos definiendo la siguiente partición $\{I_j\}_{j \geq 0}$ de $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} I_0 &= [0, 3], \\ I_j &= [3^j + 1, 3^{j+1}] \text{ para } j \geq 1. \end{aligned}$$

Es decir, los conjuntos I_j son $[0, 1, 2, 3]$, $[4, 5, 6, 7, 8, 9]$, $[10, 11, 12, \dots, 26, 27]$, $[28, 29, 30, \dots, 80, 81]$, etc.

Definimos $f_l = X^j$ para $l \in I_j$. O sea, la sucesión $\{f_l\}_{l \geq 0}$ es

$$1, 1, 1, 1, X, X, X, X, X, X, X^2, X^2, X^2, \dots, X^2, \dots$$

Veamos que esta sucesión converge a cero en $\mathbb{R}[[X]]$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $J = J_\varepsilon \geq 0$ tal que $2^{-J} < \varepsilon$ y existe $N = N_J \geq 0$ tal que $N \in I_J$. Es decir, $A(f_N) = 2^{-J}$ y, por lo tanto, $A(f_l) \leq A(f_N) \leq 2^{-J} < \varepsilon$, para $l \geq N$.

Probemos ahora que la serie de términos positivos $\sum_{l \geq 0} A(f_l)$ no converge en $\mathbb{R}$. Para ello agrupamos sus términos en la siguiente forma,

que no altera su comportamiento (véase por ejemplo, [3, p. 179, teo. 5.1]).

$$\sum_{l \geq 0} A(f_l) = \sum_{j \geq 0} \left[\sum_{l \in I_j} A(f_l) \right].$$

Para $j \geq 0$ fijo,

$$\begin{aligned} \sum_{l \in I_j} A(f_l) &= \sum_{l \in I_j} A(X^j) = \sum_{l \in I_j} 2^{-j} = (3^{j+1} - 3^j) 2^{-j} \\ &= 2 \left(\frac{3}{2} \right)^j \end{aligned}$$

que no converge a cero cuando $j \rightarrow \infty$.

Esto completa la prueba de la proposición. $\square$

Proposición 6.7. *Toda serie $\sum_{j \geq 0} f_j$, con f_j en $\mathbb{R}[[X]]$, que converge, es incondicionalmente convergente. Es decir, para cada biyección $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, la serie $\sum_{j \geq 0} f_{\varphi(j)}$ también converge y al mismo límite.*

Demostración. Bastará probar que $\sum_{0 \leq j \leq n} f_j - \sum_{0 \leq j \leq n} f_{\varphi(j)}$ converge a cero cuando n tiende a infinito.

Como la serie $\sum_{j \geq 0} f_j$ converge, su término general tiende a cero. Es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \geq 0$ tal que $A(f_j) < \varepsilon$ para todo $j \geq N$.

Además, podemos elegir $N_1 \geq N \geq 0$, tal que el conjunto $\{\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(N_1)\}$ contiene todos los números j con $0 \leq j \leq N$.

Por lo tanto, para cada $n > N_1$, la diferencia $\sum_{0 \leq j \leq n} f_j - \sum_{0 \leq j \leq n} f_{\varphi(j)}$ solamente contiene términos f_j con $j > N$ y términos $f_{\varphi(j)}$ con $\varphi(j) > N$. Entonces, como A satisface la desigualdad ultramétrica, el valor de A en todos esos términos tiene que ser menor que ε .

Esto completa la prueba de la proposición. $\square$

En $\mathbb{R}$ con el valor absoluto usual, hay convergencia incondicional si se supone que la serie converge absolutamente (véase por ejemplo, [7, p. 78, teo. 3.55]). Si la serie solo converge, el resultado no es cierto en general. Ese es el caso de la serie $\sum_{j \geq 1} \frac{(-1)^j}{j}$ (véase por ejemplo, [7, p. 76, ej. 3.53]).

Concluimos esta sección con un resultado sobre series de potencias en $\mathbb{R}[[X]]$.

Proposición 6.8. *Dada $f \in \mathbb{R}[[X]]$, la serie*

$$\sum_{j \geq 0} \frac{f^j}{j!}$$

converge exactamente cuando $A(f) < 1$.

Demostración. La proposición 6.4 nos dice que solo hay que comprobar que el término general tiende a cero para $j \rightarrow \infty$, exactamente cuando $A(f) < 1$. Usando (6) y (4),

$$A\left(\frac{f^j}{j!}\right) = [A(f)]^j,$$

lo cual tiende a cero para $j \rightarrow \infty$ exactamente cuando $A(f) < 1$.

Esto concluye la prueba de la proposición. $\square$

Es claro que este resultado es muy diferente del caso de la serie

$$\sum_{j \geq 0} \frac{x^j}{j!}$$

con $x \in \mathbb{R}$, que converge, en el valor absoluto usual, al valor e^x de la función exponencial, para todo x .

Aunque la propiedad de Arquímedes juega un papel fundamental en el desarrollo del Análisis Real, es interesante el haber confirmado lo que mencionamos en la introducción, que aún es posible hablar de un cierto «análisis real» en estructuras algebraicas que, como $\mathbb{R}[[X]]$, no son arquimedianas.

7. Epílogo

Nuestro estudio de $\mathbb{R}[[X]]$ puede continuarse en dos direcciones. En una dirección, consideramos otros anillos, como el anillo $\mathbb{Z}$ de los números enteros, o campos, como el campo $\mathbb{Q}$ de los números racionales, definiendo en ellos valores absolutos apropiados y estudiando sus completaciones. Este es el enfoque que toma, por ejemplo, Fernando Q. Gouvêa, en su libro [4], lo cual nos lleva a hablar de números p -ádicos. También podríamos considerar anillos y campos abstractos, definiendo valores absolutos en forma axiomática. El artículo expositivo [2] presenta este enfoque. De la larga lista de referencias que este artículo incluye, destacamos el libro [6] de Alain M. Robert, que, entre muchas otras cosas, tiene resultados del tipo discutido en la proposición 6.8.

Reconocimiento: Agradezco a los revisores sus comentarios, que me han permitido corregir dos errores, varias erratas y algunos detalles estilísticos.

Bibliografía

- [1] J. Álvarez, «La propiedad de Arquímedes en un campo ordenado», *Miscelánea Matemática*, núm. 68, 2019, 1–9, <https://miscelaneamatematica.org/ContenidoNumero/68>.
- [2] A. Barriá Comicheo y K. Shamseddine, *Summary on non-Archimedean valued fields*, vol. 704, American Mathematical Society, Contemporary Mathematics, 2018, www2.physics.umanitoba.ca/u/khodr/Publications/2018-Barria-Shamseddine.pdf, <http://doi.org/10.1090/conm/704/14158>.
- [3] D. Bressoud, *A Radical Approach to Real Analysis*, The Mathematical Association of America, 1994.
- [4] F. Q. Gouvêa, *P-adic Numbers: An Introduction*, 3.^a ed., Springer-Verlag, 2020.
- [5] J. Propp, «Real Analysis in Reverse», *The American Mathematical Monthly*, núm. 5, 2013, 392–408, <https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.120.05.392>.
- [6] A. M. Robert, *A Course in P-adic Analysis*, Springer-Verlag, 2000, <https://people.math.rochester.edu/faculty/doug/otherpapers/robert.pdf>.
- [7] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3.^a ed., Mc-Graw-Hill, 1976.