

La geometría y la dinámica del pinball

Antonio García

Departamento de Matemáticas

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

Apdo. Postal 55-534

09340 México D. F.

México

`agar@xanum.uam.mx`

1. El frontón y el pinball

Entre los primeros videojuegos comerciales está una especie de billar cuadrado llamado el frontón: en la pantalla de la televisión se muestran los tres lados de un rectángulo y una pelota que rebota con ellos. En la pared faltante se ubica un pequeño rectángulo que es controlado por el jugador y que se mueve hacia arriba o hacia abajo con el fin de impedir que la pelota salga del rectángulo mayor. La pelota rebota con las paredes del rectángulo formando ángulos iguales, ver la figura 1. Rápidamente se observa que en la trayectoria B , perpendicular a la pared de enfrente y al pequeño rectángulo, la pelota choca un número infinito de veces.

Otro juego similar, aunque sin duda más popular es el pinball, el cual tiene un papel central en la opera rock “Tommy”. Este juego tiene un tablero con dos palancas que tratan de controlar una pelota y evitar que ésta caiga en las salidas. En el tablero también existen varios círculos, la pelota rebota con ellos formando ángulos iguales con su tangente, ver la figura 2, a esta forma de rebotar con círculos o rectas le llamaremos la ley de reflexión. En este ensayo veremos que al estudiar las trayectorias del pinball aparecen de manera natural algunos conceptos fundamentales de la rama de las matemáticas conocida como sistemas dinámicos.

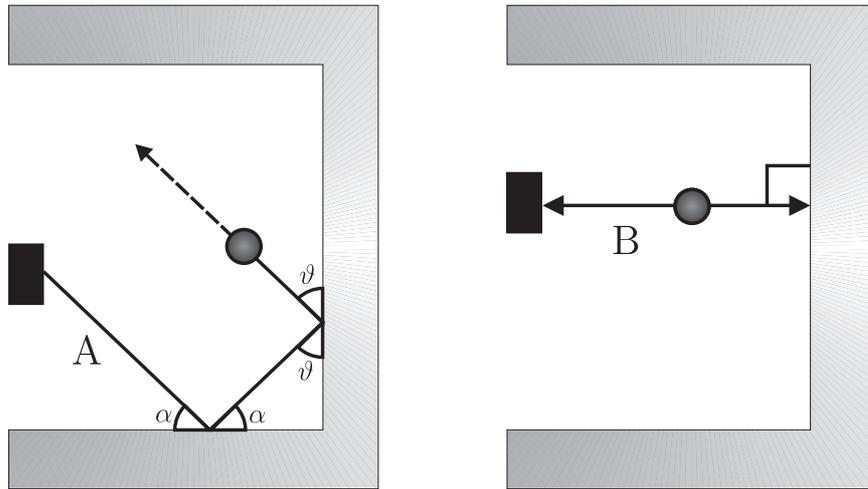


Figura 1: El frontón

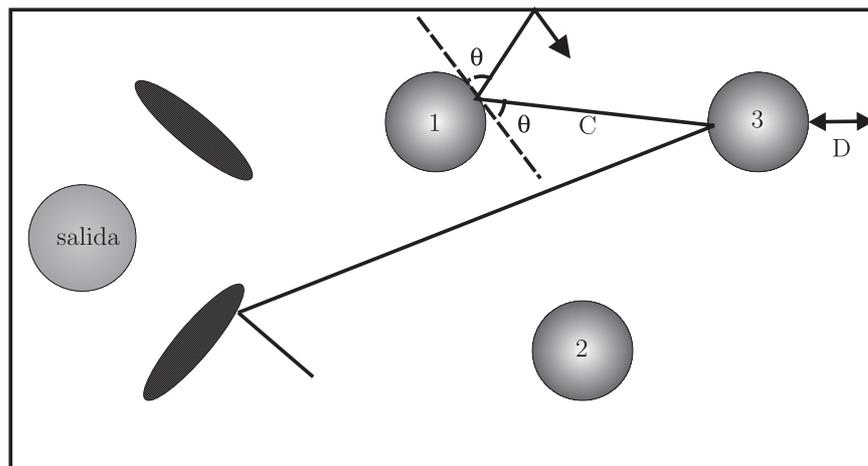


Figura 2: El pinball

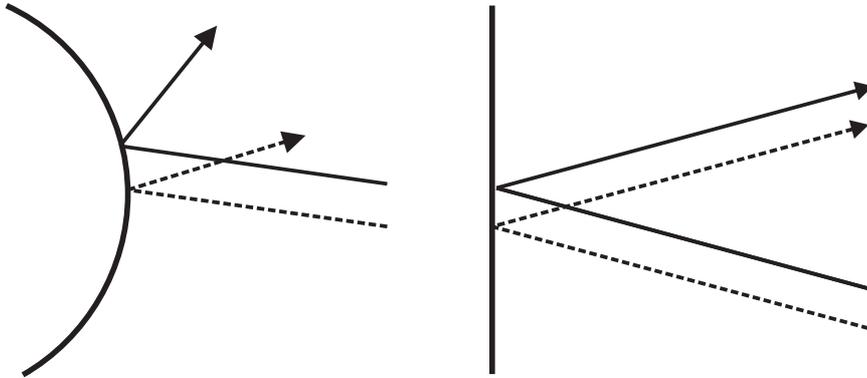


Figura 3: sensibilidad de las órbitas

Un jugador principiante de pinball trata de evitar que la pelota siga órbitas que se mueven por todo el tablero sin un comportamiento claro como la C ; y busca órbitas similares a la D en donde hay un número infinito de rebotes con el círculo 3. El jugador pronto se percata que esto no es posible y que sólo se obtienen trayectorias que parecen errar por todo el tablero. ¿Existirán otras órbitas con infinitos rebotes entre la pared y el círculo 3, o entre los círculos 2 y 3? ¿Por qué las únicas órbitas observables son las que no tienen un comportamiento claro?

Para contestar estas preguntas necesitamos estudiar a las trayectorias en el pinball y el frontón y la manera en que son determinadas por el estado inicial de la pelota.

Existen muchos factores, como son la fricción de la pelota o irregularidades en la mesa, que pueden afectar a una trayectoria. Nosotros haremos una abstracción y supondremos que sólo la posición y la velocidad inicial de la pelota determinan a las trayectorias; y que entre choques con las paredes o los círculos la pelota se mueve como una partícula libre. Llamaremos condición inicial a la posición y velocidad iniciales de la pelota. Los posibles errores de redondeo y de medición pueden impedir que conozcamos exactamente la condición inicial de la pelota, pero uno esperaría que una buena aproximación sería suficiente.

Aquí se encuentra la mayor diferencia entre el pinball y el frontón, que nosotros llamaremos la sensibilidad de las órbitas con respecto a las condiciones iniciales: en la figura 3 se observa que dos trayectorias muy cercanas continúan así al rebotar con una línea recta, mientras que dos trayectorias cercanas se separan cuando chocan con un círculo, es fácil ver que dicha separación es proporcional a la curvatura del círculo. Si estas trayectorias chocan de nuevo con otro círculo entonces la veloci-

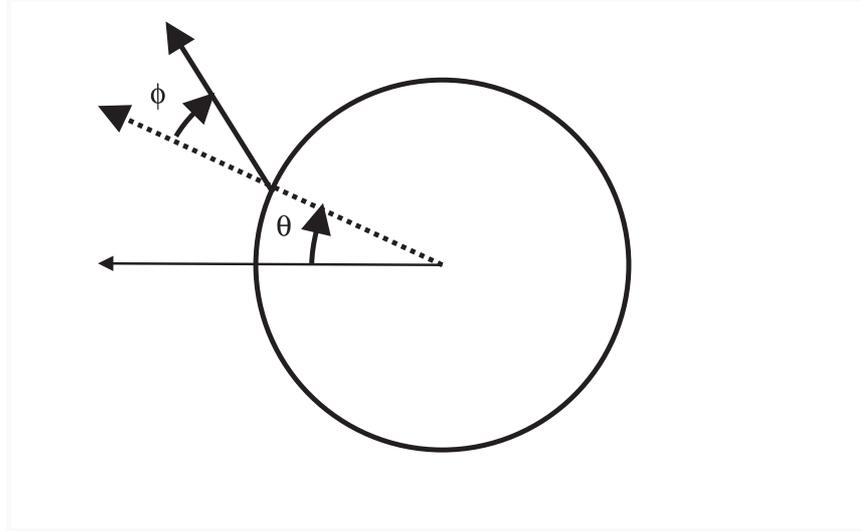


Figura 4: Trayectoria con condición inicial (θ, ϕ) .

dad de la separación aumenta y con cada choque con un círculo esta velocidad aumenta más. Al cabo de unos cuantos rebotes con círculos, las dos trayectorias estarán muy separadas. Por tanto diferentes aproximaciones de una misma trayectoria se comportarán de manera diferente después de unos cuantos choques con círculos. En vez de buscar trayectorias individuales o algún método de aproximación, estudiaremos globalmente las trayectorias concentrandonos en los choques de la pelota con los círculos.

Debido a los posibles choques con círculos las órbitas en el pinball son extremadamente sensibles a pequeños cambios en las condiciones iniciales. Ésta es la razón por la que el frontón es un juego mucho más fácil que el pinball.

2. Modelo simplificado de pinball

Para ver el efecto que producen en la trayectoria de la pelota los choques en los círculos, analizaremos varios modelos del pinball: primero veremos el movimiento de una partícula que se mueve en el semiplano $x \geq 0$ y que es libre, salvo cuando choca con el círculo $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ y con el eje Y , en donde rebota de acuerdo a la ley de reflexión.

En contra de la costumbre mediremos los ángulos en el sentido de las manecillas del reloj. Las trayectorias que tocan al círculo están de-

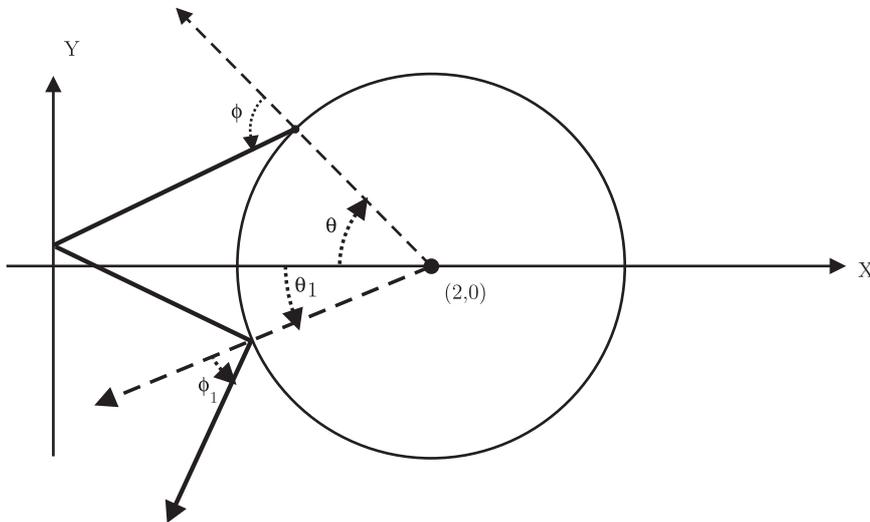


Figura 5: Modelo simplificado del pinball

terminadas por el punto θ del círculo en que lo hacen y por el ángulo ϕ que la trayectoria forma con el vector que sale del centro del círculo. El vector (θ, ϕ) , que nosotros llamaremos la condición inicial, representará al inicio de la trayectoria, ver la figura 4. Claramente una misma trayectoria puede chocar varias veces con el círculo, de donde varias condiciones iniciales pueden representar la misma trayectoria.

Estamos interesados en los sucesivos choques de una trayectoria con el círculo, en esta idea definimos al mapeo $f(\theta, \phi)$ como el mapeo que manda una condición inicial en la condición inicial del siguiente choque. O sea, $f(\theta, \phi) = (\theta_1, \phi_1)$ si la trayectoria que empieza en el punto θ del círculo con dirección ϕ toca al eje Y y choca con el círculo en el punto θ_1 , con dirección ϕ_1 . En la figura 5 se muestra una trayectoria en donde θ es positivo, mientras que ϕ , θ_1 y ϕ_1 son negativos, se puede ver con facilidad que $f(\pi/2, -\pi/2) = (\pi/2, \pi/2)$, $f(0, 0) = (0, 0)$ y $f(\pi/3, -\pi/2) = (-\pi/3, -\pi/2)$, mientras que los puntos $(\pi/2, 0)$ y $(0, \pi/2)$ no están en el dominio de la función $f(\theta, \phi)$.

Denotaremos por A_1 al dominio de f y por B a su imagen. La función $f(\theta, \phi)$ es inyectiva y continua, además se puede probar que preserva el área de los subconjuntos de A_1 . La expresión exacta de $f(\theta, \phi)$ es complicada y no la calcularemos, pero veremos que podemos encontrar mucha información sobre las trayectorias de nuestro modelo conociendo la geometría y la evolución de los conjuntos A_1 y de B . Primero observemos con un rápido dibujo que estos conjuntos están

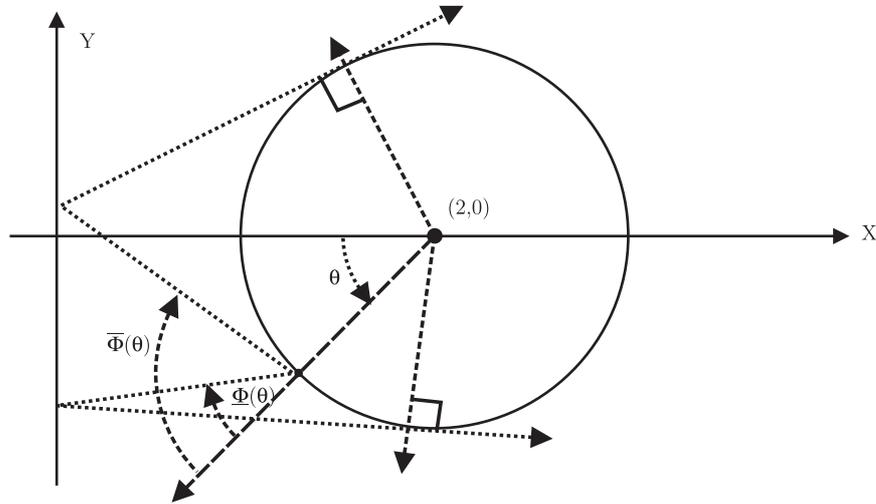


Figura 6: Los ángulos $\underline{\Phi}(\theta)$ y $\overline{\Phi}(\theta)$.

contenidos en el cuadrado $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Pero que no todo punto $(\theta, \phi) \in D$ está en el dominio o en la imagen de f , por ejemplo si el punto $(\pi/2, \phi)$ está en el dominio de f entonces $\phi = -\pi/2$ y si está en la imagen entonces $\phi = \pi/2$. Para cada θ en $[-\pi/2, \pi/2]$ definimos $\underline{\Phi}(\theta) = \min\{\phi / (\theta, \phi) \text{ está en el dominio de } f\}$ y $\overline{\Phi}(\theta) = \max\{\phi / (\theta, \phi) \text{ está en el dominio de } f\}$, ver la figura 6.

En el cálculo de $\underline{\Phi}(\theta)$ y de $\overline{\Phi}(\theta)$ es útil observar las trayectorias que tienen estos puntos como condiciones iniciales chocan con el eje Y y son tangentes al círculo en el siguiente choque. Además si ϕ está en el intervalo $[\underline{\Phi}(\theta), \overline{\Phi}(\theta)]$ entonces el punto (θ, ϕ) está en el dominio de f .

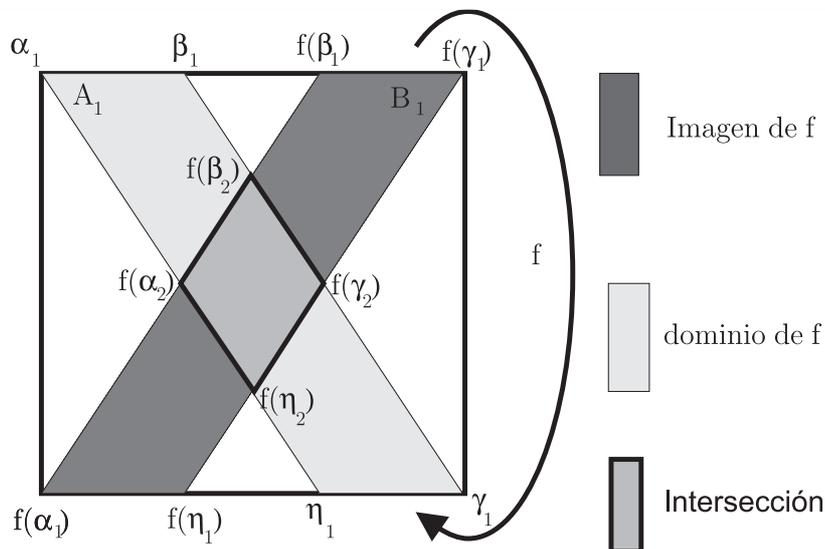
De la discusión anterior se sigue que el dominio de f es el conjunto

$$A_1 = \left\{ (\theta, \phi) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \underline{\Phi}(\theta) \leq \phi \leq \overline{\Phi}(\theta) \right\}. \quad (1)$$

Una sencilla pero muy importante observación es que A_1 es el conjunto de condiciones iniciales de trayectorias que chocarán por lo menos una vez más con el círculo.

Vamos a obtener una familia de conjuntos A_n de condiciones iniciales que contendrá la información sobre la evolución de las trayectorias que chocarán en el futuro con el círculo. El conjunto A_n estará formado por los puntos que continuarán en el dominio de f al evaluar esta función por lo menos n veces.

Necesitaremos conocer la forma del conjunto A_1 . Con un poco de trigonometría, de la figura 6 obtenemos que $\underline{\Phi}(\theta) = -\overline{\Phi}(-\theta)$ y además:


 Figura 7: Dominio e imagen de f

$$\bar{\Phi}(\theta) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{3} \\ \arcsen\left(\frac{4 \cos \theta - 1 - 8 \operatorname{sen} \theta \sqrt{4 - 2 \cos(\theta)}}{17 - 8 \cos(\theta)}\right), & -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\underline{\Phi}(\theta) = \begin{cases} \arcsen\left(\frac{1 - 4 \cos \theta - 8 \operatorname{sen} \theta \sqrt{4 - 2 \cos(\theta)}}{17 - 8 \cos(\theta)}\right), & -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Graficando estas funciones se ve que el conjunto A_1 es una franja transversal que se extiende desde $\phi = -\pi/2$ hasta $\phi = \pi/2$ con vértices en los cuatro puntos $\alpha_1 = (-\pi/2, \pi/2)$, $\beta_1 = (-\pi/3, \pi/2)$, $\gamma_1 = (\pi/2, -\pi/2)$ y $\eta_1 = (\pi/3, -\pi/2)$, ver la figura 7. Notemos que ni la distancia del círculo al eje Y ni el diámetro del círculo son importantes, su variación únicamente modificaría la anchura de la franja A_1 .

Similarmente la imagen de f es el conjunto

$$B = \left\{ (\theta, \phi) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, -\bar{\Phi}(\theta) \leq \phi \leq -\underline{\Phi}(\theta) \right\}, \quad (2)$$

y por tanto es una franja con vértices $f(\alpha_1) = (-\pi/2, -\pi/2)$, $f(\beta_1) = (\pi/3, \pi/2)$, $f(\gamma_1) = (\pi/2, \pi/2)$ y $f(\eta_1) = (\pi/3, -\pi/2)$. Ver la figura 7. En esta figura se ve que A_1 y B se cortan transversalmente. Más aún, la

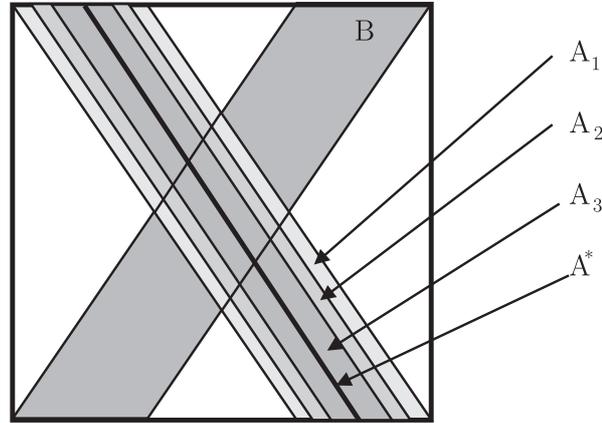


Figura 8: La familia de conjuntos A_n

imagen de los pequeños segmentos horizontales $[\alpha_1, \beta_1]$ y $[\eta_1, \gamma_1]$ son los grandes segmentos transversales $[f(\alpha_1), f(\beta_1)]$ y $[f(\eta_1), f(\gamma_1)]$, mientras que los grandes segmentos transversales $[\beta_1, \gamma_1]$ y $[\alpha_1, \eta_1]$ tienen como imagen a los pequeños segmentos horizontales $[f(\beta_1), f(\gamma_1)]$ y $[f(\alpha_1), f(\eta_1)]$. Al evaluar f , el conjunto A_1 se contrae en una dirección y se expande en otra, ver figura 7.

La intersección de A_1 y B , que es el conjunto de condiciones iniciales de la partícula que vienen de un choque y vuelven a chocar, es un pequeño rombo; sus vertices tienen la forma $f(\alpha_2)$, $f(\beta_2)$, $f(\gamma_2)$ y $f(\eta_2)$, en donde $f(\alpha_2)$ y $f(\beta_2)$ están en el segmento $[f(\alpha_1), f(\beta_1)]$ y $f(\gamma_2)$ y $f(\eta_2)$ están en el segmento $[f(\gamma_1), f(\eta_1)]$, por tanto $[\alpha_2, \beta_2] \subset [\alpha_1, \beta_1]$ y $[\eta_2, \gamma_2] \subset [\eta_1, \gamma_1]$. Sea A_2 la preimagen de $A_1 \cap B$, entonces A_2 es el subconjunto de A_1 de condiciones iniciales que chocarán por lo menos dos veces con el círculo; el subconjunto A_2 es nuevamente una franja que se extiende desde $\phi = -\pi/2$ hasta $\phi = \pi/2$. Procediendo por inducción, si A_k es el subconjunto de A_{k-1} de las condiciones iniciales que rebotan por lo menos k veces y tiene la forma de una franja que se extiende desde $\phi = -\pi/2$ hasta $\phi = \pi/2$, entonces los elementos de $A_k \cap B$ vienen de un choque previo y posteriormente chocan con el círculo k veces; sea A_{k+1} la preimagen de $A_k \cap B$, este conjunto está formado por las condiciones iniciales que van a chocar por lo menos $k+1$ veces con el círculo y es nuevamente una franja que se extiende desde $\phi = -\pi/2$ hasta $\phi = \pi/2$, ver la figura 8. Como la intersección

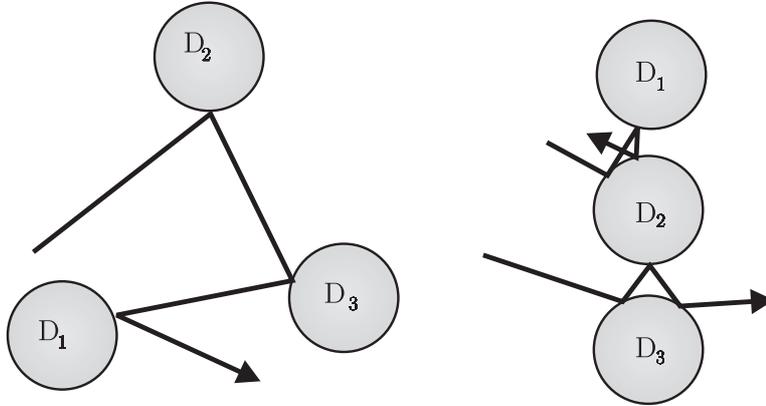


Figura 9: Modelos equilátero y colineal de pinball.

decreciente de compactos no vacíos es compacta y no vacía, entonces la intersección $A^* = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ es no vacía y además se extiende desde $\phi = -\pi/2$ hasta $\phi = \pi/2$, ver la figura 8.

Estamos interesados en obtener aquellas trayectorias que presenten el mayor número de rebotes, los elementos de A^* son las condiciones iniciales que presentan un número infinito de rebotes. Observemos que las evaluaciones sucesivas de los elementos de este conjunto permanecerán siempre en el dominio de f y que se van acercando al punto $(0, 0)$. El conjunto A^* es llamado la variedad estable del punto $(0, 0)$. En la práctica, la sensibilidad de las trayectorias con respecto a las condiciones iniciales impide que estas trayectorias sean observables, pero trayectorias con condiciones iniciales cercanas a A^* harán un gran número de rebotes antes de abandonar el dominio de f .

3. Modelo de pinball con varios círculos

Revisemos ahora el caso cuando la partícula pueda chocar con varios círculos. Para dos círculos los resultados son idénticos al modelo simplificado de la sección anterior. Si el número de círculos aumenta la situación se complica, veremos dos casos representativos: el pinball lineal, cuando los círculos son colineales; y el pinball equilátero, cuando los centros de los círculos forman un triángulo equilátero, ver figura 9.

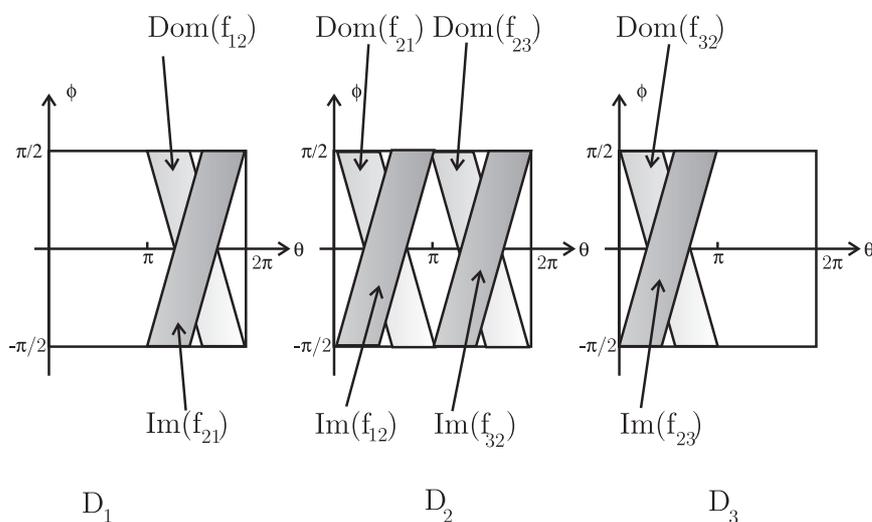


Figura 10: Dominios e imagenes de f en el caso colineal.

Usaremos las mismas coordenadas que en el modelo simplificado de la sección anterior, ver la figura 4, pero ahora trabajaremos con varios rectángulos que corresponden a las trayectorias que se inician en cada uno de los círculos. Con este fin, D_1 , D_2 y D_3 denotarán los conjuntos de las condiciones iniciales que empiezan en el círculo uno, dos o tres respectivamente, cada uno de ellos es el rectángulo $[0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$. Y para generalizar la función f escribiremos $f_{ij}(\theta, \phi) = (\theta_1, \phi_1)$ si la trayectoria que inicia en el punto θ del círculo i con dirección ϕ llega al punto θ_1 del círculo j con dirección ϕ_1 sin haber tocado ningún otro círculo. Los dominios y las imagenes de estas funciones para el caso colineal se encuentran en la figura 10, y para el caso equilátero en la figura 11.

En la figura 10 se observa que en el caso colineal la imagen de f_{12} interseca sólo al dominio de f_{21} y viceversa la imagen de f_{21} interseca solamente al dominio de f_{12} , por lo que la única opción para que la partícula que sale del círculo uno choque varias veces es que tenga choques consecutivos entre los círculos uno y dos, se puede hacer un análisis similar al realizado en la sección 2 para probar la existencia de un conjunto A_{12}^* de condiciones iniciales que parten del círculo uno y que harían un número infinito de choques entre los círculo uno y dos. Similarmente se encontrarían los conjuntos A_{21}^* , A_{23}^* y A_{32}^* .

En el caso equilátero se ve que la imagen de f_{12} interseca a los dominios de f_{21} y f_{23} , por tanto existen trayectorias que inician en el

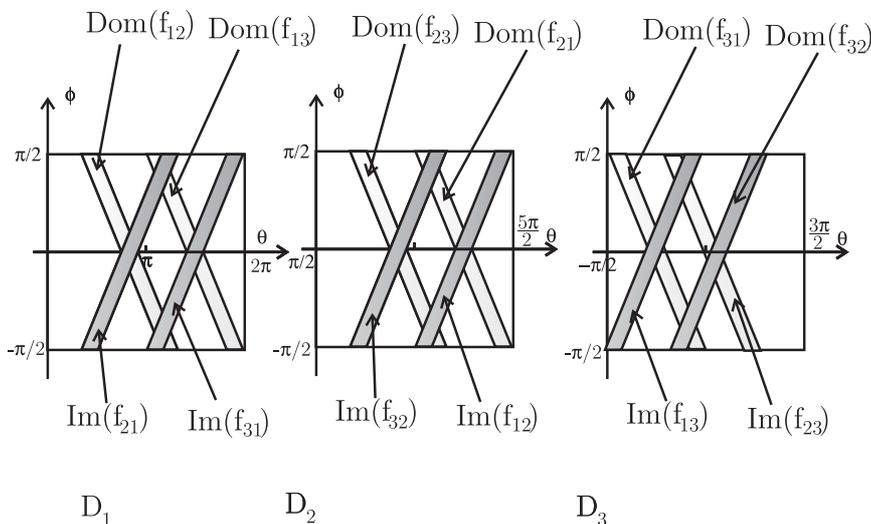


Figura 11: Dominios e imágenes de f en el caso equilátero.

círculo uno, chocan con el círculo dos y parten al círculo uno o al círculo tres, etcetera. De hecho, dada una sucesión $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$, donde cada a_i es uno, dos o tres, existirá una trayectoria que pase en ese orden por los círculos. El número de trayectorias con infinitos choques es ahora infinito y nuevamente existe sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales. A la descripción de las órbitas del pinball por la sucesión de choques con los círculos se llama dinámica simbólica.

4. billares y mecánica celeste

Una generalización inmediata del pinball es estudiar el movimiento de una partícula en el plano que se mueve libremente salvo cuando choca con una o varias curvas suaves, en donde la partícula es reflejada de acuerdo a la ley de la reflexión, este problema es llamado el problema de billar. Si M es el conjunto de curvas, podemos definir una función similar a la definida en el pinball

$$f : D \subset M \times [-\pi/2, \pi/2] \mapsto M \times [-\pi/2, \pi/2]. \tag{3}$$

Por ejemplo, si la partícula está en el interior de un círculo entonces $f(x, y) = (x + y, y)$, en donde x está en el círculo, y $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, dejamos al lector interesado su verificación.

Los billares pueden ser extremadamente complejos, por ejemplo en [5] se prueba que en billares que tienen como frontera el eje X y la función de distribución normal (la campana de Gauss) existen trayectorias que intersectan un número infinito de veces el eje Y y además son no acotadas; tales órbitas se llaman oscilantes, se invita al lector a tratar de dibujar o mejor aún, a encontrar una de estas órbitas. Los billares comparten muchas propiedades con una rama de la física matemática: la mecánica celeste.

La educación formal en física de la mayoría de los matemáticos acaba con el estudio del movimiento de dos partículas sujetas a fuerzas gravitacionales mutuas, similar en nivel al capítulo 13 en [1] o al capítulo 9 en [4]. Este problema es transformado en el de estudiar el movimiento de una partícula sujeta a una fuerza central: el movimiento de un cometa sujeto a la atracción gravitacional de una estrella. El movimiento de tres o más partículas sujetas a dichas fuerzas no es estudiado en cursos de licenciatura pero debe ser muy similar ¿correcto?

Sorpresas da la vida. Aunque las ecuaciones diferenciales del movimiento de tres partículas sujetas a fuerzas gravitacionales mutuas son fáciles de obtener y vienen en los libros de física mencionados anteriormente, las soluciones tienen dos defectos:

a) No se puede dar la solución general a este problema. Este problema es no integrable y sólo se pueden obtener explícitamente unas cuantas soluciones.

b) Estas soluciones pueden ser inútiles, pues pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden originar grandes cambios en el comportamiento de las trayectorias. Las soluciones pueden ser altamente sensibles al cambio de las condiciones iniciales, dependiendo de la posición inicial de las partículas.

En la figura 12 se muestran tres diferentes trayectorias de cometas que pasan cerca de una estrella. Se observa que el cambio en la dirección de los cometas depende de la distancia a las estrellas y es más fuerte al acercarse a la estrella, el comportamiento de los cometas cerca de la estrella es parecido al que observamos en el pinball cuando la partícula choca con algún círculo.

Esto no es importante cuando hay una estrella, pues en este caso sólo existen dos alternativas, el cometa sólo se acerca una vez a la estrella o bien el cometa describe órbitas elípticas muy bien determinadas. Cuando existen dos o más estrellas el cometa puede aproximarse varias veces a las estrellas, en cada uno de estos acercamientos se produce un cambio de dirección que depende de la distancia a la estrella. Dos

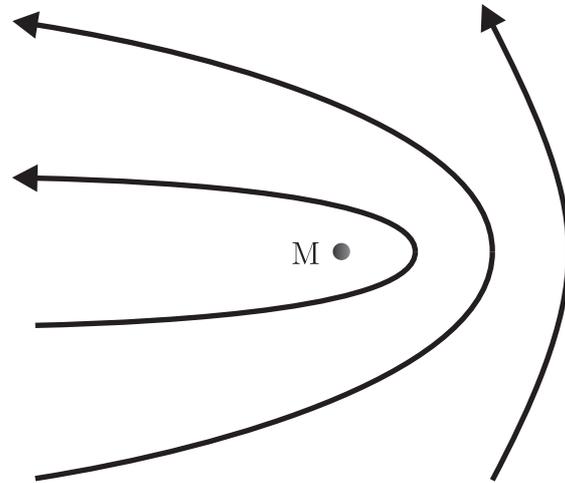


Figura 12: Órbitas de cometas al aproximarse a una estrella

trayectorias de cometa casi iguales después de varias aproximaciones a las estrellas serán completamente diferentes. La analogía del movimiento del cometa con el pinball de varios círculos es evidente. En los libros [6, 7] se dan otros ejemplos similares.

En 1922, el matemático y astrónomo francés Jean Chazy clasificó todos los tipos de evolución final en el movimiento de tres partículas, entre los cuales se encontraban las órbitas oscilatorias. Éstas fueron introducidas por J. Chazy mediante consideraciones puramente lógicas y su existencia fue puesta en duda hasta que, con las mismas técnicas que usamos en el pinball equilátero, el matemático soviético K. A. Sitnikov demostró su existencia a fines de los 50's del siglo pasado, ver [6].

Este ensayo fue escrito tratando de usar como motivación para el estudio de los sistemas dinámicos al pinball, el lector interesado en estos temas puede profundizar su estudio en las referencias [2, 3, 6].

Referencias

- [1] M. Alonso y E. J. Fin: *Física, Vol 1 : Mecánica* . Fondo Educativo Interamericano, S. A., Mexico, 1970, 1976.
- [2] R. Devaney: *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.

- [3] A. Katok y B. Hasselblatt: *Introduction to Modern Dynamical Systems*. Cambridge, 1995.
- [4] C. Kittel, W. D. Knight y M. A. Ruderman: *Mecánica, Berkeley Physics Course, Vol 1*. Editorial Reverte, 1973.
- [5] A. M. Leontovic: *The existence of unbounded oscillating trajectories in a problem of billiards*. Soviet Math. Dokl. **3** (1962).
- [6] J. K. Moser, *Stable And Random Motion In Dynamical Systems*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1973.
- [7] S. Wiggins: *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, 1990.