COMO TRATAR UN PROBLEMA ABIERTO DE PROBABILIDAD COMPACTANDO UN PARALEPIPEDO.

Por Wojciech Szatzschneider*

Quisiera plantear aquí un problema abierto de probabilidad teniendo la esperanza de que alguien, algún día pueda resolverlo. Creo que yo agoté mis posibilidades. Este problema nació en Varsovia en 1980 cuando estuve intentando "resolver" un modelo de partículas repelentes. Finalmente logré terminar el análisis de dicho modelo, después de mi llegada a México y nació un artículo en 1982 que mandé al Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. Pero el problema en cuestión quedó abierto.

El problema es el siguiente:

Sean $r_1, r_2, \dots, r_n$ variables aleatorias independientes. Supongamos que la probabilidad del evento $\{r_i = -1\}$ es igual a la del evento $\{r_i = 1\}$ y ésta es igual a 1/2. Lo que expresamos simplemente por:

$$P\{r_i = -1\} = P\{r_i = 1\} = 1/2$$

por lo que resulta que tienen la misma distribución. Sean $\alpha_i(t) \geq 0$ $i = 1,2,\dots,n$ funciones no decrecientes con $t \varepsilon [0,1]$ tales que $\alpha_i(t) \geq \alpha_{i+1}(t)$ para toda $t \varepsilon [0,1]$ con $i = 1,2,\dots,n-1$. Además supongamos la condición

$$\text{(R)} \qquad -\alpha_1(1) + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i(1) \geq 1$$

Entonces creo que es válida la desigualdad siguiente

$$P\Big[\sup_{t \varepsilon [0,1]} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) \cdot r_i \geq 1\Big] \leq 2 \cdot P\Big[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(1) \cdot r_i \geq 1\Big].$$

Si funciones $\alpha_i(t)$ toman nada más valores 0 y 1 ésto sería simplemente el principio de reflexión para caminatas aleatorias. (Feller [2] Volúmen 1).

En lo sucesivo llamaremos a este problema "teorema".

Nota 1.

Sin la condición R -que nos da cierta regularidad de "condiciones iniciales" creo que en vez de 2 debe aparecer $2\frac{1}{4}$

* U.A.M. Iztapalapa.

He aquí un ejemplo de ello.

$\alpha_1(1) = 1.6$, $\alpha_2(1) = .9$, $\alpha_3(1) = .8$, $\alpha_4(1) = .8$, $\alpha_1(1) = .8$, $\alpha_1(t_1) = 1$,

$\alpha_2(t_1) = \alpha_3(t_1) = \alpha_4(t_1) = 0$, $\alpha_1(t_2) = 1.5$, $\alpha_2(t_2) = .9$, $\alpha_3(t_2) = .8$,

$\alpha_4(t_2) = .8$.

$t_1 < t_2$.

Es muy fácil ver que aquí la desigualdad es válida tomando $2\frac{1}{4}$ en lugar de 2, independientemente de los valores de las funciones $\alpha_i(t)$ en los puntos restantes, siempre y cuando cumplan con las hipótesis del teorema. Aunque la constante verdadera no sea 2 ni $2\frac{1}{4}$, sino un número mayor que no dependa de n, el teorema sigue siendo importante.

Nota 2.

Formulemos geométricamente el problema. A la probabilidad la podemos interpretar como el número de vértices de un paralepípedo cuyas diagonales se intersectan en el origen, es decir, los vértices de éste se encuentran determinados por $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ con $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n$ (si está en R^n). Entonces sus vértices son $(r_1\alpha_1, r_2\alpha_2, \ldots, r_n\alpha_n)$ donde $r_i = \pm 1$. Diremos que un vértice sale fuera del hiperplano $L = L(x_1, \ldots, x_n)$: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ si está en el lado contrario al orígen o bien toca el hiperplano, es decir $r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \ldots + r_n\alpha_n \geq 1$.

Definamos $\alpha_i(t)$ de la siguiente manera:

$$\alpha_i(1) = \alpha_i \text{ con } i = 1,2,\ldots,n.$$

Sea k el número de vértices del paralepípedo inicial que salen fuera del hiperplano L.

Compactemos el paralepípedo de tal manera que preserve su forma y conserve el orden de sus lados y llamemos $(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t))$ al nuevo generador de los vértices del nuevo paralepípedo teniendo en cuenta que $\alpha_1(t) \geq \alpha_2(t) \geq \ldots \geq \alpha_n(t)$.

Si alguna vez un vértice "sale" del hiperplano durante el proceso de compactación del paralepípedo lo contamos una sola vez en todo el proceso. Sea s el número total de vértices que salieron con este procedimiento. El "teorema" dice $2k \geq s$ (bajo la condición (R)) que aquí se interpreta como que el vértice $(-\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ del paralepípedo inicial "sale".

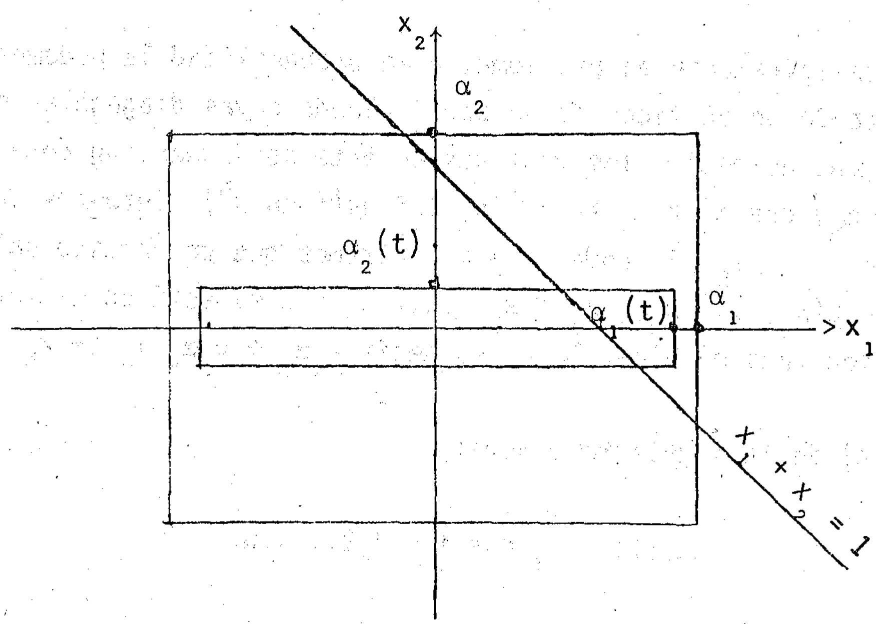
Quisiera analizar geométricamente el problema en R^2 aunque en este caso no aparecen las "sutilezas" del "teorema".

Notemos que s y k no pueden ser mas grandes que 2.

(En R^n $k \leq \frac{1}{2} \cdot 2^n$)

Si $k = 0$ entonces claramente (¿Por qué?) $s = 0$ (lo que también es válido en R^n).

He aquí un ejemplo donde $k = 1$ y $s = 2$



Cierro el análisis del "teorema", pues hablar más de la formulación de éste sería a lo mejor dirigir al lector hacia el camino en el que yo no pude lograr mucho.

Ahora quisiera mencionar algunas ventajas que tendría uno al demostrar la validez del "teorema".

El teorema daría la posibilidad de estimar la $P\left[\sup_{0\leq t\leq T} X(t,\omega) \leq C\right]$ ($\geq C$), donde $X(\cdot,\cdot)$ es un cierto proceso estocástico a tiempo continuo.

Todos los métodos conocidos están basados en suponer al menos algo de "markovianidad" del proceso $X(\cdot,\cdot)$. Intuitivamente un proceso se llama de Markov si sabiendo el "presente", que lo fijamos nosotros, las predicciones acerca del futuro no dependen del pasado. El nuevo método que resultaría no utiliza nada de markovianidad.

Primero encontramos un proceso $X_n(\cdot,\cdot)$ el cual tiene la forma que aparece en el teorema y está cercano en cierto sentido al proceso $X(\cdot,\cdot)$. Aplicamos el teorema para $X_n(\cdot,\cdot)$ luego aprovechando otra vez el "teorema" se puede demostrar lo que se llama convergencia débil de X_n hacia X. (Billingsley [1]). De dicha convergencia ya resultaría que

$$P\left[\sup_{t\in[0,T]} X(t,\omega) \leq C\right] = \lim_{n\to\infty} P\left[\sup_{t\in[0,t]} X_n(t,\omega) \leq C\right]$$

El método de buscar algunas propiedades del proceso $X(\cdot,\cdot)$ por medio de las $X_n(\cdot,\cdot)$ es bien conocido pero en el caso de estimar el sup se utiliza la markovianidad del proceso $X_n(\cdot,\cdot)$.

Por ejemplo en el movimiento browniano $B(\cdot,\cdot)$ las $X_n(\cdot,\cdot)$ son clasicamente las caminatas aleatorias adecuadamente interpoladas (hay otras posibilidades).

Utilizando el "teorema" se puede obtener el resultado clásico que dice que

$$P\left[\sup_{t\in[0,T]} B(t,\omega) \geq C\right] = 2\cdot P\left[B(t,\omega) \geq C\right]$$

Otro uso del "teorema" tal vez más importante sería en la demostración de la ya mencionada convergencia débil.

Por ejemplo podríamos demostrar de una manera completamente original, la existencia del movimiento browniano. Más general poniendo $\alpha_i(t) = P\left[|\xi|t > k\right]$, donde ξ es una variable aleatoria tal que $E\xi$ existe se obtendría la existencia de un proceso gaussiano con media cero y función de covarianza $E(X(t)\cdot X(s)) = E \min (t|\xi|, s|\eta|)$, donde ξ y η son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas. La "discusión" de este proceso vease Szatzschneider [3]. Pero lo más importante es que podríamos utilizar el teorema para analizar una nueva clase de procesos con los cuales los métodos clásicos han podido lograr poco.

He aquí un ejemplo de tal proceso.

Sea $X(\cdot,\cdot)$ un proceso gaussiano con media cero y covarianza:

$$E\, X(t)\cdot X(s) = \text{const}\cdot(\sqrt{t} + \sqrt{s} - \sqrt{t+s}).$$

Vease Szatzschneider [4] cual es el origen de este proceso. El hecho que el proceso $X(t)$ no es de Markov se puede ver consultando Feller [2] volúmen 2.

REFERENCIAS

1) P. BILLINGSLEY. "Convergence of probability measures". Wiley, New York. 1968.

2) W. FELLER. "Introducción a la Teoría de probabilidades y sus aplicaciones". Vol. I y II. Limusa. México.

3) W. SZATZSCHNEIDER. A version of Harris-Spitzer "random constant velocity" model for infinite systems of particles. Studia Mathematica LXIII. 171-187. (1978).

4) W. SZATZSCHNEIDER. "Some notes about the random motion of a particle". Boletin de la S.M.M. por aparecer.