Miscelánea Matemática **42** (2006) 19–25 SMM

Una demostración geométrica de que la esfera unitaria de ℓ_2 es contraíble

Olivia Gutú
Centro de Investigación en Matemáticas
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
42184 Pachuca, Hidalgo
México
olivia@uaeh.edu.mx

Resumen

En este breve artículo se dará una demostración geométrica y elemental de que la esfera de ℓ_2 es contraíble. En la primera parte se proporcionarán rápidamente las definiciones pertinentes: *esfera unitaria*, *contraíble* y *espacio* ℓ_2. El lector familiarizado con todos los términos arriba mencionados puede pasar sin remordimiento a la segunda parte, en donde se verá un poquito de historia relacionada con el tema y qué tiene que ver todo esto con el Teorema del Punto Fijo. En la tercera y última sección se encuentra la demostración prometida.

1. Definiciones

Se dice que un espacio topológico X es *contraíble*, si existen una función continua $H : X \times [0,1] \to X$ (llamada *homotopía*) y un punto $\tilde{x} \in X$ tales que, para todo $x \in X$:

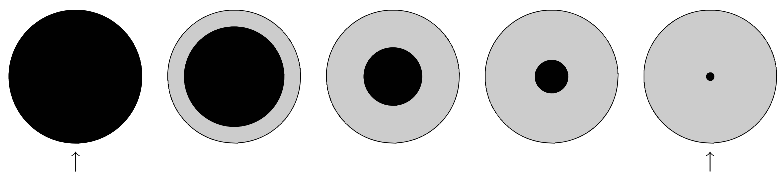
1. $H(x,0) = x$, y
2. $H(x,1) = \tilde{x}$.

En este caso decimos que X es homotópico a un punto. Lo que nos dice la definición anterior es que podemos deformar de manera continua el espacio X al punto $\tilde{x} \in X$, sin salirnos del espacio X.

Por ejemplo, el conjunto $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ es contraíble mediante la homotopía $H : B \times [0,1] \to B$ definida por:

$$(x_1, x_2, t) \xrightarrow{H} (1-t)(x_1, x_2).$$

Notemos que $H(x_1, x_2, 0) = (x_1, x_2)$ y además $H(x_1, x_2, 1) = (0, 0)$, para todo $(x_1, x_2) \in B$.

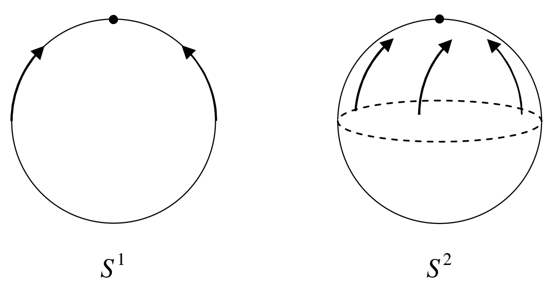


Un ejemplo típico de espacios *no* contraíbles son las esferas de dimensión finita:

$$S^{n-1} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

La intuición nos dice que las tendríamos que romper para poderlas deformar a un punto, no importa que tan grande sea n; nos falta espacio pues durante la deformación no debemos salirnos de la esfera. El lector interesado puede consultar por ejemplo [6, pág. 166].

¿Qué pasa si la esfera tiene dimensión infinita? El espacio adecuado para responder esta pregunta es precisamente ℓ_2, ya que, como veremos a continuación, es el espacio vectorial de dimensión infinita análogo a $\mathbb{R}^n$.



El espacio ℓ_2 es el conjunto de sucesiones de números reales $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ tales que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ converge con la norma $|\cdot| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{\frac{1}{2}}$ proveniente del producto interno

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

En analogía al caso de dimensión finita, la esfera unitaria de ℓ_2 es el siguiente conjunto:

$$S_{\ell_2} = \{x \in \ell_2 : |x| = 1\}.$$

En general, si E es un espacio vectorial normado, con norma $|\cdot|$, se dice que $S_E = \{x \in E : |x| = 1\}$ es la *esfera unitaria* de E y $B_E = \{x \in E : |x| \leq 1\}$ es la *bola unitaria* de E.

2. Relación con el Teorema del Punto Fijo

Se dice que $x \in X$ es un *punto fijo* de una función $F : X \to X$, si

$$F(x) = x.$$

Antes de hacer anotaciones históricas, es conveniente convencerse de que el siguiente hecho es cierto:

Si E es un espacio vectorial normado, entonces S_E es contraíble si y sólo si existe alguna función continua $F : B_E \to B_E$ sin puntos fijos.

Supongamos que $H : S_E \times [0,1] \to S_E$ es una homotopía tal que, para todo $x \in S_E$, $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = \tilde{x}$, para algún $\tilde{x} \in S_E$. Sea $F : B_E \to B_E$ la función que a cada xt, con $x \in S_E$ y $t \in [0,1]$, lo envía a $-H(x, 1-t)$. La aplicación F está bien definida, ya que $F(0) = -\tilde{x}$, además F no tiene puntos fijos; si $x \in S_E$, entonces $F(x) = -x$, y si $x \in B_E \backslash S_E$, entonces $F(x) \in S_E$.

Supongamos ahora que $F : B_E \to B_E$ es una aplicación continua sin puntos fijos. Estamos interesados en encontrar una homotopía para contraer a S_E. Una aplicación natural podría ser $(x,t) \mapsto \alpha((1-t)x + tF(0))$, donde $\alpha(x) = \dfrac{x}{|x|}$. Esta aplicación no funciona porque no podemos asegurar que $(1-t)x + tF(0) \neq 0$ para todo t en el intervalo $[0,1]$. La idea entonces es llevar cada $x \in S_E$ a $\dfrac{x - F(x)}{|x - F(x)|}$ y luego este punto a $-\dfrac{F(0)}{|F(0)|}$. Podemos definir por ejemplo:

$$H(x,t) = \begin{cases} \alpha(x - 2tF(x)) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha[(2-2t)x - F((2-2t)x)] & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

Notemos que $x - 2tF(x) \neq 0$ para $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$. Puesto que F no tiene puntos fijos, entonces $(2-2t)x - F((2-2t)x) \neq 0$, para $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Por tanto, H es continua y además $H(x,0) = \dfrac{x}{|x|}$ y $H(x,1) = \dfrac{F(0)}{|F(0)|}$.

Dicho lo anterior, podemos comenzar a dar brevemente datos históricos sobre la contractibilidad de esferas de dimensión infinita. El Teorema del Punto Fijo de Brouwer nos dice que toda aplicación continua

$$F : B_{\mathbb{R}^n} \to B_{\mathbb{R}^n}$$

tiene un punto fijo. Con el fin de estudiar el análogo a este teorema para aplicaciones continuas sobre bolas de espacios vectoriales normados de dimensión infinita, varios autores entraron al terreno de la contractibilidad de las esferas infinito dimesionales.

En 1935 Jean Leray [8] probó que la esfera unitaria del espacio $C[0,1]$ (colección de funciones continuas real-valuadas definidas sobre $[0,1]$, con la norma del máximo) es contraíble. Pocos años más tarde, Shizuo Kakutani [7] demuestra que si E es un espacio de Hilbert (espacio vectorial completo cuya norma proviene de un producto interno) entonces existe un homeomorfismo de B_E a B_E sin puntos fijos; en particular, para el caso de la bola unitaria de ℓ_2 considera la siguiente aplicación:

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \xrightarrow{F} \big(\sqrt{1 - |x|^2}, x_1, x_2, \dots\big).$$

En 1951, James Dugundji [4] prueba lo siguiente:

Sea L un espacio lineal normado y $B_L = \{x \in L : |x| \le 1\}$. Una condición necesaria y suficiente para que toda función continua $F : B_L \to B_L$ tenga un punto fijo es que B_L sea compacta.

Observamos que B_{ℓ_2} no es compacta, puesto que la sucesión $\{e_n\} \subset B_{\ell_2}$ formada por la base ortonormal

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots), \qquad n \in \mathbb{N}$$

no tiene ninguna subsucesión convergente. Es bien sabido que las esferas infinito–dimensionales no son compactas con la topología de la norma, por tanto *todas las esferas infinito–dimensionales son contraíbles.* De hecho, se sabe que si E un espacio de Banach (espacio vectorial normado y completo) infinito-dimensional entonces la esfera unitaria S_E y la bola unitaria B_E son homeomorfas.

En trabajos más recientes, se apunta a extender resultados conocidos reemplazando "función continua" por "aplicación Lipschitz". Por ejemplo, se sabe que las esferas unitarias de los espacios de Banach infinito-dimensionales son Lipschitz contraíbles [1, pág. 64]; pero, hasta donde tenemos conocimiento, no se sabe si las bola unitaria B_E de un espacio de Banach infinito-dimensional E es Lipschitz-homeomorfa a la esfera S_E, ni siquiera para el caso en que E sea un espacio de Hilbert.

Cabe mencionar que sí existe una versión del Teorema del Punto Fijo de Brouwer para espacios infinito dimensionales; éste se conoce como Teorema del Punto Fijo de Schauder y nos dice que si K es un subconjunto compacto y convexo de un espacio vectorial normado, entonces toda aplicación continua $F : K \to K$ tiene un punto fijo.

Para mayor información sobre el tema y estudios recientes relacionados, consultar [1],[2],[3] y [5].

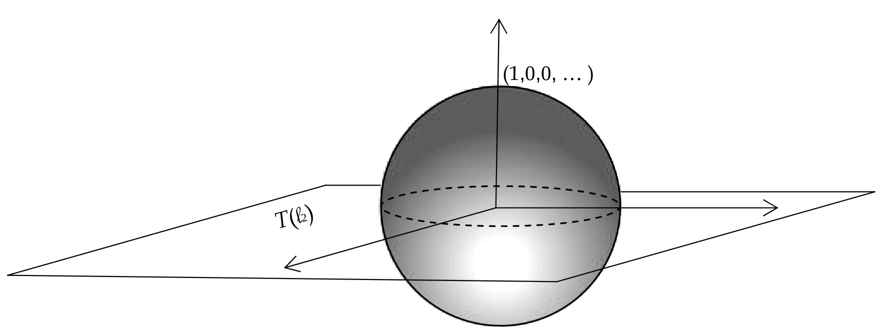
Está claro que con el ejemplo sencillo de Kakutani de una aplicación continua sin puntos fijos $F : B_{\ell_2} \to B_{\ell_2}$ y los argumentos dados al principio de esta sección se puede construir una homotopía para contraer la esfera ℓ_2 al punto $(1, 0, 0, \dots)$. En la siguiente sección damos una construcción totalmente diferente basada en la geometría de S_{ℓ_2}.

3. Ahora sí: la demostración

Probaremos que existe $H : S_{\ell_2} \times [0, 1] \to S_{\ell_2}$ continua, tal que para todo $x \in S_{\ell_2}$, $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = (1, 0, 0, \dots)$. Primero deformaremos la esfera a su ecuador y luego llevaremos al ecuador al punto $(1, 0, 0, \dots)$, por supuesto, sin salirnos de la esfera. Con este fin, consideremos al operador desplazamiento:

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Esta función lleva la esfera S_{ℓ_2} a su ecuador, ¡que de hecho es una copia de la esfera!, es decir, S_{ℓ_2} es homeomorfa a $T(S_{\ell_2})$, lo cual por supuesto no ocurre en el caso finito dimensional.



Formalmente, la primera parte consiste en encontrar una función continua $H_1 : S_{\ell_2} \times [0,1] \to S_{\ell_2}$ tal que, para todo $x \in S_{\ell_2}$,

$$H_1(x,0) = x \tag{1}$$
$$H_1(x,1) = T(x) \tag{2}$$

Para construir nuestra función H_1 vamos a movernos por arcos maximales. Estamos en busca de una función H_1 del estilo

$$(x,t) \mapsto u_x \operatorname{sen}(s_x t) + x\cos(s_x t),$$

con $u_x \in S_{\ell_2}$, $\langle u_x, x\rangle = 0$ y $s_x \in [0,\pi]$; note que si u_x fuera $T(x)$, entonces para $s_x = \frac{\pi}{2}$ se tendrían las igualdades (1) y (2), sin embargo no podemos esperar que x sea ortogonal con $T(x)$. Hacemos cuentas un ratito para encontrar una componente de $T(x)$ ortogonal a x que haga de H_1 la homotopía que buscamos, obteniéndose:

$$u_x = \frac{T(x) - \langle x, T(x)\rangle\, x}{\sqrt{1-\langle x, T(x)\rangle^2}}, \quad \text{y}$$

$$s_x = \arccos\langle x, T(x)\rangle.$$

El denominador de u_x no es cero, ya que si $|\langle x, T(x)\rangle| = 1$, entonces x sería múltiplo de $T(x)$ y por tanto

$$0 = x_1 = x_2 = x_3 = \cdots$$

lo cual es imposible, ya que $x \in S_{\ell_2}$. Con esto concluimos la primera parte.

Para la segunta parte, basta considerar la aplicación $H_2 : S_{\ell_2} \times [0,1] \to S_{\ell_2}$ definida por

$$(x,t) \mapsto \tilde{x}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right) + T(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right),$$

donde $\tilde{x} = (1,0,0,\dots)$.

Es fácil ver que $\langle \tilde{x}, T(x)\rangle = 0$ y puesto que $|T(x)| = 1$, se sigue que $H_2(x,t) \in S_{\ell_2}$. Claramente H_2 es continua.

Ahora simplemente se define:

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x,2t) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ H_2(x,2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$$

y listo.

Agradezco a Rubén A. Martínez Avendaño y a Federico Menéndez–Conde Lara por los valiosos comentarios referentes a la escritura de este artículo.

Referencias

[1] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss, *Geometric Nonlinear Functional Analysis*, American Math. Soc. Colloquium Publications **48**, (2000).

[2] C. Bessaga, *Every infinite-dimensional Hilbert space is diffeomorphic with its unit sphere*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math. **14** (1966), 27–31.

[3] C. Bessaga and A. Pełczyńki, *Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology*. PWN, Warszawa (1970).

[4] J. Dugundji, *An extension of Tietze's Theorem*, Pacific J. Math. **1**, 353–367 (1951).

[5] J. Dugundji and A. Granas, *Fixed Point Theory*, Springer (1952).

[6] T.W. Gamelin and R.E. Green, Topology, Dover (1999).

[7] S. Kakutani, *Topological properties of the unit sphere of a Hilbert space,* Proc. Imp. Acad. Tokyo **19** (1943), 269–271.

[8] J. Leray, *Topologie des espaces abstraits de M. Banach,* CRAS Paris **200**, 1083–1093 (1935).