Miscelánea Matemática **70** (2020) 19-38
DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7002

SMM

Una nota sobre un par de demostraciones de Georg Cantor

José M. González-Barrios M.
Instituto de Investigaciones en Matemáticas
Aplicadas y en Sistemas
Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad de México, México
gonzaba@sigma.iimas.unam.mx
y
Raúl Rueda
Instituto de Investigaciones en Matemáticas
Aplicadas y en Sistemas
Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad de México, México
pinky@sigma.iimas.unam.mx

1. Introducción

Georg Cantor (1845-1918) fue un genio matemático ruso, quien vivió la mayoría de su vida en Alemania. Se le acredita la creación de la Teoría de Conjuntos junto con Richard Dedekind y Gottlob Frege. Definitivamente Georg Cantor fue el primero en formalizar el concepto de conjuntos infinitos usando cardinales y ordinales. Demostró que existen conjuntos infinitos cuyas cardinalidades son distintas, por ejemplo, demostró que el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ tiene menor cardinalidad que el de los reales $\mathbb{R}$, aun cuando ambos conjuntos son infinitos. También probó que el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{N}$, aun cuando el segundo es un subconjunto propio del primero. Su trabajo fue furiosamente criticado por matemáticos menos privilegiados tales como Leopold Kronecker, quien no fue capaz de entender sus demostraciones, y que lo llamó un «*corruptor de la juventud*» y un «*científico charlatán*». Estos horrendos comentarios y la situación laboral le provocaron que se acelerara su enfermedad mental, que le causó profundas depresiones. Afortunadamente, no todo mundo fue tan negativo con él, por ejemplo, David Hilbert lo defendió

Palabras clave: Cantor, cardinales y ordinales, expansión binaria, hipótesis diádica.

de estas críticas al declarar «*No one shall expel us from the paradise that Cantor has created for us.*», es decir, «*Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor ha creado para nosotros.*», véase por ejemplo [8, p. 76] y [10, p. 122].

La belleza y simplicidad de sus demostraciones han sido decisivas para que varios de nosotros hagamos investigación en el área de Matemáticas.

En esta pequeña nota, estudiamos primero su demostración del hecho de que el intervalo unitario $\mathbf{I} = [0,1]$ tiene la misma cardinalidad que la caja unitaria $\mathbf{I}^2$, véase [1], [2] y [3]. También probamos que la bella función usada en la prueba no siempre es continua. **Aquí utilizaremos únicamente expansiones binarias de los números del intervalo unitario, rindiendo honor a Gottfried Leibniz quien formalizó la estructura de los números binarios usando únicamente ceros y unos.**

Recordemos que si t es un número real distinto de uno, y r es otro número real tal que $|r| < 1$, entonces para todas $l, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con $l \leq m$

$$\sum_{k=l}^{m} t^k = \frac{t^l - t^{m+1}}{1-t} \quad \text{y} \quad \sum_{k=m}^{\infty} r^k = \frac{r^m}{1-r}. \tag{1}$$

Nosotros usamos aquí las fórmulas en (1) para $t = r = 1/2$ o potencias de $1/2$.

En general, cualquier número racional q de $\mathbf{I}$ tiene una expansión binaria de la forma

$$q = 0.a_1 a_2 \cdots a_m \overline{b_1 b_2 \cdots b_k} \text{ donde } m \geq 0,\ k \in \mathbb{N},$$
$$a_1, \ldots a_m, b_1, \ldots, b_k \in \{0,1\}, \tag{2}$$

donde los primeros m términos no forman parte del periodo, al menos una de las $b's$ no es cero, y $b_1 b_2 \cdots b_k$ es el periodo más corto posible. Esta afirmación se sigue como en el caso de la base diez, y usando la expresión dada en la ecuación (2), junto con la ecuación (1).

El conjunto de **racionales diádicos** en $\mathbf{I}$, que denotamos por D, es el de los números de la forma $m/2^n$ donde m es un entero no negativo entre 0 y 2^n, es decir,

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{m}{2^n} \;\middle|\; m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ y } 0 \leq m \leq 2^n \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n, \tag{3}$$

donde $D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_n \subset \cdots$ y D es denso en $\mathbf{I}$. En el resto de esta nota utilizamos únicamente expansiones infinitas para todo $q \in D \backslash \{0\}$, donde $D \backslash \{0\}$ denota la diferencia de conjuntos. Así, si $q = 0.a_1 a_2 a_3 \cdots > 0$ su expansión siempre incluirá un número infinito de unos. Llamamos al uso de expansiones infinitas la **hipótesis díadica**.

Por supuesto la única excepción en el intervalo cerrado $\mathbf{I}$ es $q = 0$, cuya única expansión es $q = 0.00000\cdots$. Por lo tanto, de aquí en adelante definimos al intervalo $(0, 1]$ usando solo expansiones binarias con un número infinito de unos, es decir,

$$(0,1] = \{q \in \mathbf{I} \,|\, q \,\text{admite una única expansión binaria} \\ \text{con un número infinito de unos}\}.$$

Por ejemplo, $\overline{b_1} = \overline{1}$ es el periodo de cualquier número en $D\backslash\{0\}$ definido en (3), pero bajo la hipótesis diádica $\overline{b_1} = \overline{0}$ nunca es periodo, excepto para $q = 0$.

En general, cualquier racional díadico $0 < q < 1$ tiene una expansión finita que termina con un 1, si cambiamos este último 1 por $0\overline{1}$ (es decir un 0 seguido de una cantidad infinita de unos, que llamamos **cola de unos**), entonces obtenemos una segunda expansión infinita binaria de q. Estas afirmaciones se siguen inmediatamente de la definición de D en (3) y la fórmula (1). Por ejemplo, si en (3) suponemos que $n \geq 1$ y $m = 1$ entonces $1/2^n = 0.00\cdots0100000$ donde el único uno se localiza en la posición n. Si $n > 1$ y $m = 2$ entonces $2/2^n = 1/2^{n-1} = 0.00\cdots0100000$, donde el único uno está en la posición $n-1$. Si $m = 3$ entonces $3/2^n = 1/2^{n-1} + 1/2^n = 0.00\cdots01100000$, donde los unos están en las posiciones $n-1$ y n, etc. La segunda afirmación se sigue de la fórmula (1), ya que $\frac{1}{2^m} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$.

Notemos que

$$7/8 = (1/2) + (1/2^2) + (1/2^3) + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{0}{2^k} = 0.111000000\cdots = 0.111$$

es una expansión binaria finita, pero observe que $7/8$ tiene una segunda expansión binaria infinita dada por

$$\frac{7}{8} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \sum_{k=4}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0}{8} + \frac{1/16}{1-(1/2)} \\ = 0.11011111\cdots = 0.110\overline{1}$$

El último uno está en la tercera posición de la expansión binaria finita.

Es claro de la definición de número racional díadico en (3), que no todo número racional es diádico, por ejemplo $q = 1/3$ obviamente no lo es. Sin embargo, todo número racional q tiene una expansión periódica en base-2, por ejemplo,

$$q = \frac{1}{3} = 0.\overline{01} = 0.010101010101 \cdots = \text{ o}$$

$$q = \frac{1}{12} = 0.00\overline{01} = 0.000101010101 \cdots .$$

Resumiendo, todo número en $(0,1]$ tiene una expansión binaria periódica con una cola de unos.

2. Primer teorema de Cantor

En esta sección enunciamos y demostramos un resultado siguiendo las ideas originales de Georg Cantor, quien usó expansiones decimales de números en lugar de expansiones binarias infinitas. Hasta donde sabemos, él no estudió la posible continuidad de la función, cosa que hacemos en el teorema 2.1.

Empezamos la sección con un resultado muy sencillo.

Lema 2.1. *Supongamos que $p_1, p_2 \in \mathbf{I}$ tienen expansiones binarias*

$$p_1 = 0.a_1a_2a_3 \cdots \quad y \quad p_2 = 0.b_1b_2b_3 \cdots . \tag{4}$$

Entonces $p_1 \geq p_2$ si y solo si p_1 y p_2 tienen exactamente la misma expansión, o bien existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 1$ y $b_n = 0$, y cuando $n > 1$ los primeros $n-1$ términos de las expansiones son idénticos.

Demostración. Si p_1, p_2 tienen expansiones idénticas es obvio que $p_1 = p_2$, y si suponemos que $p_1 = 0.a_1a_2 \cdots a_{n-1}1a_{n+1}a_{n+2} \cdots$ y $p_2 = 0.a_1a_2 \cdots a_{n-1}0b_{n+1}b_{n+2} \cdots$, es claro que lo más chica que puede ser p_1 sería $p_1 = 0.a_1a_2 \cdots a_{n-1}1\overline{0}$, y lo más grande que puede ser p_2 sería $p_2 = 0.a_1a_2 \cdots a_{n-1}0\overline{1}$, y en este caso, de la definición de racionales diádicos (3) y sus dos expansiones binarias se obtiene que $p_1 = p_2 \in D$. En cualquier otro caso es claro que $p_1 > p_2$.

Ahora supongamos que $p_1 \geq p_2$, como observamos arriba si p_1 y p_2 son diádicos y $p_1 = p_2$, p_1 tiene dos expansiones distintas satisfaciendo las condiciones del lema que nos dan la igualdad. Por supuesto si las expansiones de la ecuación (4) son idénticas entonces $p_1 = p_2$. Supongamos entonces que $p_1 > p_2$, con alguno de ellos que no sea racional diádico, entonces usando las expansiones de p_1 y p_2 en (4), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 1 > 0 = b_n$, si $n = 1$ entonces p_1 puede ser $1/2$ (racional diádico), pero $p_2 \neq 0.0\overline{1}$, pues p_2 no es racional diádico, es decir p_2 tiene que tener algún cero después de la primera cifra en su expansión binaria. El otro caso caso es análogo. Si $n > 1$ se repite el argumento anterior suponiendo que $a_i = b_i$ para toda i entero tal que $i < n$, y $a_n = 1 > 0 = b_n$, considerando los términos de ambas expansiones para

$i \geq n+1$. Este argumento es válido cuando ni p_1, ni p_2 son racionales diádicos. $\square$

Ahora, probamos un resultado acerca de la métrica d usual en $\mathbb{R}$, y como adaptarla a expansiones binarias.

Lema 2.2. *Sea d la métrica usual en $\mathbf{I}$, es decir, si $p_1, p_2 \in \mathbf{I}$ entonces $d(p_1, p_2) = |p_1 - p_2|$. Supongamos que p_1 y p_2 tienen expansiones binarias como en la ecuación (4), permitimos inclusive colas de ceros, es decir, períodos de la forma $\overline{0}$. Si $p_1 \geq p_2$ entonces*

$$d(p_1, p_2) = |p_1 - p_2| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_k - b_k)}{2^k}. \tag{5}$$

Demostración. Observe que sin ninguna suposición sobre las expansiones de p_1 y p_2 en (4), la serie en (5) está siempre bien definida, ya que es absolutamente convergente, pues $|a_k - b_k| \in \{0, 1\}$ para toda $k \geq 1$, y además es menor o igual a uno.

Por otro lado si $p_1, p_2 \in [0,1]$ tienen las expansiones de (4), y también supongamos que $p_1 \geq p_2$, entonces $d(p_1, p_2) = |p_1 - p_2| = p_1 - p_2$. Notemos que en la serie (5), aun si $p_1 \geq p_2$, podemos tener términos negativos. Por ejemplo, si $p_1 = 2/3 = 0.\overline{10}$ y $p_2 = 1/3 = 0.\overline{01}$, entonces $p_1 > p_2$, pero usando (5) se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_k - b_k)}{2^k} &= \frac{1}{2^1} + \frac{-1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{-1}{2^4} + \cdots \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \frac{4}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

que coincide con $d(2/3, 1/3)$. Ahora supongamos que $p_1 = p_2$ y $p_1 \in D$ es un racional diádico. Entonces p_1 tiene dos expansiones binarias. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $p_1 = 1/2$ por lo que $p_1 = 0.1000\cdots$ y $p_2 = 0.01111\cdots$ son las dos expansiones binarias de $1/2$, y entonces $p_1 = p_2$. Ahora es obvio que $d(p_1, p_1) = 0 = d(p_2, p_2)$, y por lo tanto

$$d(p_1, p_2) = \frac{1}{2} + \frac{-1}{2^2} + \frac{-1}{2^3} + \cdots = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1/2}{1/2} = 0$$

y

$$d(p_2, p_1) = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1/2}{1/2} = 0.$$

De hecho, si por ejemplo, $p_1 = 1/2$ y $p_2 = 1/4$ entonces ambos números son racionales diádicos, pero usando cualquiera de las dos expansiones binarias, en cualquier orden, obtenemos el mismo resultado, es decir, $1/4$.

Por lo tanto, la serie (5) no depende de la expansión binaria del número.

Usando el lema 2.1 y argumentos similares como en el caso $p_1 = 2/3$ y $p_2 = 1/3$, se obtiene el resto de la prueba. $\square$

En lo que sigue necesitamos algunas observaciones. Sean $n \geq 1$ y $p \in \mathbf{I}$, tales que $p = 0.a_1a_2a_3 \cdots a_n \cdots$ es su única expansión binaria bajo la hipótesis diádica. Definamos $p_n = 0.a_1a_2 \cdots a_n$, es decir, el número formado por sus primeras n coordenadas binarias. Usando (1) tenemos que $p_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k}$, por lo que $0 \leq p_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{(1/2)-(1/2)^{n+1}}{1/2} = \frac{2^n-1}{2^n}$. De hecho, es fácil ver que $p_n \in \left\{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}\right\}$, por ejemplo, $1/2^{n-1} = 2/2^n = 0.000\cdots010$ y $1/2 = 2^{n-1}/2^n = 0.100\cdots000$, donde el número de coordenadas es n. Por lo tanto de la definición (3)

$$p_n \in B_n := \left\{ \frac{m}{2^n} \;\middle|\; m \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\} \right\} \subset D_n \subset D. \tag{6}$$

Sean $p_1, p_2 \in (0, 1]$ tales que $p_1 \geq p_2$, con expansiones binarias dadas en la ecuación (4). Si $p_{1_n} = 0.a_1a_2 \cdots a_n$ y $p_{2_n} = 0.b_1b_2 \cdots b_n$, es fácil ver que $p_{1_n} \geq p_{2_n}$, por lo que utilizando un argumento análogo al de la definición (5), se tiene que $|p_{1_n} - p_{2_n}| = \sum_{k=1}^n \frac{(a_k-b_k)}{2^k}$. Por lo tanto

$$|p_{1_n} - p_{2_n}| \in \left\{0, \frac{1}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}\right\}. \tag{7}$$

De (7) se obtiene que $|p_{1_n} - p_{2_n}| = 0$ si y solo si $a_i = b_i$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, y que $|p_{1_n} - p_{2_n}| = \frac{1}{2^n}$ si y solo si $p_{1_n} = \frac{j}{2^n}$ y $p_{2_n} = \frac{j-1}{2^n}$ para alguna $j \in \{1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$.

Como de (1) sabemos que $\sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{2^k} = \frac{1/2^n+1}{1/2} = \frac{1}{2^n}$, observemos también que

$$\sum_{k=n+1}^\infty \frac{(a_k - b_k)}{2^k} = \frac{1}{2^n} \quad \text{si y solo si,}$$

$$\text{para toda } k \geq n+1, \quad a_k = 1 \text{ y } b_k = 0. \tag{8}$$

Pero en el caso (8), la expansión de b viola la hipótesis diádica, pues tiene una cola infinita de ceros. De (8) también se puede ver que bajo la hipótesis diádica

$$-\frac{1}{2^n} < \sum_{k=n+1}^\infty \frac{(a_k - b_k)}{2^k} < \frac{1}{2^n}. \tag{9}$$

Ahora probamos otro resultado acerca de la métrica d.

Lema 2.3. *Suponiendo la hipótesis diádica, sean $p_1, p_2 \in (0,1]$ tales que $p_1 \geq p_2$, por el lema 2.1, sus únicas expansiones binarias con un número infinito de unos están dadas por la ecuacion (4). Entonces para toda $n \geq 1$*

$$\begin{gathered} d(p_1,p_2) < \frac{1}{2^n} \qquad \textit{si y solo si} \\ \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k - b_k)}{2^k} = 0 \quad y \quad 0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(a_k - b_k)}{2^k} < \frac{1}{2^n} \right) \\ \textit{ó} \\ \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k - b_k)}{2^k} = \frac{1}{2^n} \quad y \quad -\frac{1}{2^n} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(a_k - b_k)}{2^k} < 0 \right). \end{gathered} \tag{10}$$

Demostración. Primero supongamos que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k - b_k)}{2^k} = 0 \quad \text{y} \quad 0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(a_k - b_k)}{2^k} < \frac{1}{2^n}.$$

Entonces usando el lema 2.2 y la desigualdad (9), tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq d(p_1,p_2) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_k - b_k)}{2^k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k - b_k)}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(a_k - b_k)}{2^k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(a_k - b_k)}{2^k} \\ &< \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Ahora supongamos que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k - b_k)}{2^k} = \frac{1}{2^n} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2^n} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(a_k - b_k)}{2^k} < 0.$$

Por el lema 2.2 y la desigualdad (9)

$$\begin{aligned}0=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2^n}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(a_k-b_k)}{2^k}\\&=d(p_1,p_2)\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k-b_k)}{2^k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(a_k-b_k)}{2^k}\\&<\frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

La última desigualdad se obtiene sumando $\frac{1}{2^n}$ en la segunda ecuación de (10). Ahora, si $\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k-b_k)}{2^k}\geq\frac{2}{2^n}$, entonces por (9)

$$d(p_1,p_2)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k-b_k)}{2^k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(a_k-b_k)}{2^k}>\frac{2}{2^n}-\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}.$$

Equivalentemente usando (7), tenemos

$$d(p_1,p_2)\leq\frac{1}{2^n}\text{ implica }0\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k-b_k)}{2^k}\leq\frac{1}{2^n},$$

es decir, si queremos que $d(p_1,p_2)<\frac{1}{2^n}$ entonces $\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k-b_k)}{2^k}=0$ o bien $\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k-b_k)}{2^k}=\frac{1}{2^n}$.

Primero, si suponemos que $\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k-b_k)}{2^k}=0$ como $p_1\geq p_2$, por la hipótesis diádica y la desigualdad (9), se tiene que $0\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(a_k-b_k)}{2^k}<\frac{1}{2^n}$, entonces

$$0\leq d(p_1,p_2)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k-b_k)}{2^k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(a_k-b_k)}{2^k}<\frac{1}{2^n}.$$

Segundo, si suponemos que $\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k-b_k)}{2^k}=\frac{1}{2^n}$, utilizando (9), se cumple que $-\frac{1}{2^n}<\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(a_k-b_k)}{2^k}<0$, entonces

$$\begin{aligned}0=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^n}<d(p_1,p_2)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k-b_k)}{2^k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(a_k-b_k)}{2^k}\\<0+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}.\end{aligned}\tag{11}$$

Pero si se cumple que $0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(a_k - b_k)}{2^k} < \frac{1}{2^n}$ entonces

$$\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} + 0 \leq d(p_1, p_2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k - b_k)}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(a_k - b_k)}{2^k} < \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}. \quad (12)$$

En particular, $d(p_1, p_2) \geq \frac{1}{2^n}$. □

En el siguiente resultado consideramos a $\mathbf{I}$ con la métrica definida d, y definimos la distancia máxima en $\mathbf{I}^2$ como

$$\eta((p_1, p_2), (q_1, q_2)) = \text{máx}\{|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|\}. \quad (13)$$

Es bien sabido que η en (13) es una métrica en $\mathbf{I}^2$ que es equivalente a la métrica euclidiana, véase por ejemplo [6, p. 26]. Por lo tanto ambas métricas inducen la misma topología en $\mathbf{I}^2$.

Teorema 2.1. *Bajo la hipótesis diádica de los números en $\mathbf{I} = [0, 1]$, sea $c : \mathbf{I} \to \mathbf{I}^2$ una función definida por*

$$c(p) = c(0.a_1a_2a_3a_4 \cdots) = (0.a_1a_3a_5 \cdots, 0.a_2a_4a_6 \cdots), \quad (14)$$

para toda $p \in \mathbf{I}$ con única expansión binaria $p = 0.a_1a_2a_3a_4 \cdots$. Entonces c es una función suprayectiva en $\mathbf{I}^2$, pero c no es inyectiva. Además, c no es continua en todos los puntos.

Demostración. Sin la hipótesis diádica c no está bien definida. Para ver esto, tomemos $1/4 = 0.01\overline{0} = 0.00\overline{1}$. Si aplicamos la función c, obtenemos

$$(0, 1/2) = (0.\overline{0}, 0.1\overline{0}) = c(0.01\overline{0}) \neq c(0.00\overline{1}) = (0.0\overline{1}, 0.0\overline{1}) = (1/2, 1/2).$$

Por lo que, sin la hipótesis diádica c ni siquiera es función.

Por lo tanto necesitamos la hipótesis diádica para $\mathbf{I}$. Primero veamos que c es suprayectiva Sea $(q_1, q_2) \in [0, 1]^2$, si $q_1 = q_2 = 0$ sea $p = 0 = 0.000000 \cdots$, entonces de (14) tenemos que $c(p) = c(0.000000 \cdots) = (0.000 \cdots, 0.000 \cdots) = (q_1, q_2)$. Notemos que

$$c(0) = (0, 0), \qquad c(1/3) = c(0.\overline{01}) = (0.000 \cdots, 0.111 \cdots) = (0, 1)$$

y

$$c(2/3) = c(0.\overline{10}) = (0.111 \cdots, 0.000 \cdots) = (1, 0) \quad \text{y } c(1) = (0.111 \cdots, 0.111 \cdots) = (1, 1).$$

Supongamos que $q_1 = 0$ pero $q_2 > 0$. Usando la hipótesis diádica, q_2 tiene una expansión binaria con un número infinito de unos, digamos $q_2 = 0.a_1a_2a_3 \cdots$, donde $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \{0, 1\}$. Defina $p = 0.0a_10a_20a_30 \cdots$, entonces es claro que $p \in (0, 1]$ y su expansión binaria tiene un número infinito de unos. Además, $c(p) = (0.000\cdots, 0.a_1a_2a_3\cdots) = (q_1, q_2)$. El caso $q_1 > 0$ y $q_2 = 0$ es completamente análogo.

Finalmente, supongamos que $0 < q_1 \leq 1$ y $0 < q_2 \leq 1$, entonces por la hipótesis diádica $q_1 = 0.a_1a_2a_3a_4\cdots$ y $q_2 = 0.b_1b_2b_3b_4\cdots$, donde $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}, \{b_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \{0, 1\}$, y ambas expansiones tienen un número infinito de unos. Definamos

$$p = 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots,$$

entonces $0 < p \leq 1$ y p tiene un número infinito de unos en su expansión, además, usando (14), $c(p) = c(0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots) = (0.a_1a_2a_3\cdots, 0.b_1b_2b_3\cdots) = (q_1, q_2)$, lo que prueba que la función c es suprayectiva.

Ahora veamos que c no es inyectiva. Para aclarar esta afirmación subrayaremos las entradas que ocupan lugares pares en algunas expansiones. Sea

$$p_1 = 0.0\underline{0}1\underline{1}0\underline{0}0\underline{0}0\underline{1}0\underline{0}0\underline{0}0\underline{0}0\underline{1}0\underline{0}\cdots, \tag{15}$$

donde el número de ceros entre unos se incrementa en números impares $5, 7, 9, \ldots$ Observamos que la expansión binaria de p_1 tiene un número infinito de unos. Entonces usando (14)

$$c(p_1) = (0.0100000\cdots, 0.01001000100001\cdots) = (q_1, q_2),$$

donde $q_1 = 1/4$ es un racional diádico y para q_2 el número de ceros entre unos se incrementa en uno cada vez. Por lo tanto q_2 no es un número racional ya que su expansión binaria no tiene parte periódica. Ahora definamos

$$p_2 = 0.0\underline{0}0\underline{1}1\underline{0}1\underline{0}1\underline{1}1\underline{0}1\underline{0}1\underline{0}1\underline{1}1\underline{0}1\underline{0}1\underline{0}1\underline{0}\cdots. \tag{16}$$

Considerando únicamente los números subrayados, tenemos que el número de ceros se incrementa cada vez en uno entre unos consecutivos. La expansión binaria de p_2 tiene un número infinito de unos. Usando (14) otra vez obtenemos

$$c(p_2) = (0.001111111\cdots, 0.01001000100001\cdots) = (q_3, q_4).$$

Notemos que $q_2 = q_4$, pero también q_1 y q_3 son las dos posibles expansiones de $1/4$, por lo que, $q_1 = q_3$. Por lo tanto se tiene que dadas las expansiones (15) y (16)

$$c(p_1) = c(p_2), \text{ pero claramente } p_1 \neq p_2,$$

lo que prueba que c no es inyectiva.

Veamos que c es continua en $q = 0 = 0.00000\cdots$. Es claro que $c(q) = c(0) = (0, 0)$. Sea $p = 0.a_1a_2a_3\cdots \in (0, 1]$ tal que p satisface la hipótesis diádica, y $d(p, 0) \leq \frac{1}{2^n}$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $n = 2m$. Usando el lema 2.3, si $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k} = 0$ y $0 < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} \leq \frac{1}{2^n}$, es claro que $0 < d(p, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} \leq \frac{1}{2^n}$. De hecho, si $d(p, 0) = \frac{1}{2^n}$

entonces $p = 0.00\cdots 01111111$ donde el primer uno esta en la posición $n+1 = 2m+1$. Usando (14) tenemos que

$$c(p) = (0.00\cdots 0111\cdots, 0.00\cdots 0111),$$

donde el primer uno en cada una de las coordenadas de $c(p)$ están en la posición m. Aplicando ahora la distancia η definida en (13) obtenemos que

$$\begin{aligned}\eta(c(0), c(p)) &= \eta((0,0), (0.00\cdots 0111\cdots, 0.00\cdots 0111)) \\ &= \text{máx}\left\{\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^m}\right\} = \frac{1}{2^m}.\end{aligned}$$

Como $n \to \infty$ si y solo si $m \to \infty$ obtenemos que $c(p)$ converge a $c(0)$. Observemos que si $0 < p_1 < p$ entonces se obtiene que $d(p_1, 0) < d(p, 0) = \frac{1}{2^n}$, y también es fácil ver que en este caso $\eta(c(0), c(p_1)) < \frac{1}{2^m}$. Del lema 2.2, si $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k} = \frac{1}{2^n}$ esto ocurre si y solo si $p = 0.00\cdots 01000\cdots$ donde el único uno está en la coordenada n, pero bajo la hipótesis diádica entonces $p = 0.00\cdots 01111111$ donde el primer uno esta en la posición $n+1 = 2m+1$, que es el caso que ya analizamos. Por lo tanto la función c es continua en cero.

Sea $m \in \mathbb{N}$ y definamos $r_m, s_m \in (0,1]$ racionales cuyas expansiones binarias son de la forma

$$\begin{aligned} r_m &= 0.c_1c_2\cdots c_{2m}\overline{c_{2m+1}c_{2m+2}} \quad \text{y} \\ &\qquad s_m = 0.d_1d_2\cdots d_{2m}\overline{d_{2m+1}d_{2m+2}}, \end{aligned} \tag{17}$$

donde $c_1 = 1, c_2 = c_3 = \cdots = c_{2m} = 0$, $\overline{c_{2m+1}c_{2m+2}} = \overline{10}$, $d_1 = 0, d_2 = d_3 = \cdots = d_{2m} = 1$ y $\overline{d_{2m+1}d_{2m+2}} = \overline{10}$. Es fácil ver de (1) y el lema 2.1 que $r_m \geq s_m$,

$$r_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^{2m-1}} \text{ y } s_m = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^{2m-1}}.$$

Por lo tanto, usando el lema 2.2, $d(r_m, s_m) = |r_m - s_m| = r_m - s_m = \frac{1}{2^{2m}}$ que tiende a cero cuando $m \to \infty$.

Tomemos $m = 5$ entonces de la ecuación (17) tenemos

$$r_5 = 0.1\underline{0}0\underline{0}0\underline{0}0\underline{0}0\underline{0}1\underline{0}1\underline{0}\cdots \text{ y } s_5 = 0.0\underline{1}1\underline{1}1\underline{1}1\underline{1}1\underline{1}1\underline{0}1\underline{0}\cdots,$$

donde la entradas subrayadas corresponden a las coordenadas pares. Entonces

$$c(r_5) = (0.1000011111\cdots, 0.0000000000\cdots) = (17/32, 0)$$

y

$$c(s_5) = (0.0111111111\cdots, 0.1111100000\cdots) = (16/32, 31/32).$$

En general, para $m \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$c(r_m) = \left(\frac{2^{m-1}+1}{2^m}, 0\right) \quad \text{y} \quad c(s_m) = \left(\frac{2^{m-1}}{2^m}, \frac{2^m-1}{2^m}\right), \tag{18}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\eta(c(r_m), c(s_m)) &= \eta\left(\left(\frac{2^{m-1}+1}{2^m}, 0\right), \left(\frac{2^{m-1}}{2^m}, \frac{2^m-1}{2^m}\right)\right)\\ &= \text{máx}\left\{\frac{1}{2^m}, \frac{2^m-1}{2^m}\right\} = \frac{2^m-1}{2^m}. \end{aligned}\tag{19}$$

En resumen, usando (17) y (19) obtenemos que

$$\lim_{m\to\infty} d(r_m, s_m) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2^{2m}} = 0,$$

y por otro lado $\text{lím}_{m\to\infty} \eta(c(r_m), c(s_m)) = \text{lím}_{m\to\infty} \frac{2^m-1}{2^m} = 1$. Esto implica que c no es una función continua en todos los puntos. $\square$

Como la función c es suprayectiva, para cada $(q_1, q_2) \in \mathbf{I}^2$ existe $p \in \mathbf{I}$ tal que $c(p) = (q_1, q_2)$. Definamos para cada $(q_1, q_2) \in \mathbf{I}^2$, $A_{(q_1,q_2)} = \{(q_1, q_2)\}$. Entonces la imagen inversa bajo c de $A_{(q_1,q_2)}$ denotada por $c^{[-1]}(A_{(q_1,q_2)})$ es igual a

$$c^{[-1]}(A_{(q_1,q_2)}) = \{p \in \mathbf{I} \mid c(p) = (q_1, q_2)\} \neq \emptyset.$$

Como se observó en la prueba del teorema 2.1, $c^{[-1]}(A_{(q_1,q_2)})$ puede tener más de un punto. Supongamos la hipótesis diádica y definamos $G : \mathbf{I}^2 \to \mathbf{I}$ tal que para cada $(q_1, q_2) \in \mathbf{I}^2$, $G(q_1, q_2)$ sea un punto p de $c^{[-1]}(A_{(q_1,q_2)})$ (por el axioma de elección). Es claro que G es una función inyectiva, ya que si $(q_1, q_2) \neq (q_3, q_4)$, donde $(q_1, q_2), (q_3, q_4) \in \mathbf{I}^2$ entonces $c^{[-1]}(A_{(q_1,q_2)}) \cap c^{[-1]}(A_{(q_3,q_4)}) = \emptyset$.

Ahora damos un ejemplo trivial de una función que es inyectiva de $\mathbf{I}$ a $\mathbf{I}^2$. Aceptemos la hipótesis diádica, y definamos $F : \mathbf{I} \to \mathbf{I}^2$ tal que $F(p) = (p, 0)$. Como el conjunto $\{(p, 0) | p \in \mathbf{I}\} \subset \mathbf{I}^2$, entonces F es claramente inyectiva.

Acabamos de encontrar dos funciones inyectivas $F : \mathbf{I} \to \mathbf{I}^2$ y $G : \mathbf{I}^2 \to \mathbf{I}$. Recordemos ahora el siguiente resultado, cuya prueba puede verse en [4, p. 16] o [7].

Teorema 2.2 (Cantor-Bernstein-Schröeder)**.** *Sean A y B dos conjuntos. Si existen dos funciones inyectivas $f : A \to B$ y $g : B \to A$, entonces existe una biyección $h : A \to B$. Por lo tanto, A y B tienen la misma cardinalidad.*

De aquí, $\mathbf{I}$ e $\mathbf{I}^2$ tienen la misma cardinalidad como lo probó Georg Cantor.

Para finalizar la sección, veamos algunas propiedades adicionales de c.

Lema 2.4. *La función c satisface:*
i) $p \in D$ si y solo si $c(p) \in D \times D$.
ii) $p \in ([0,1] \cap (\mathbb{Q} \setminus D))$ entonces $c(p) \in ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0,1] \cap \mathbb{Q})$.

Demostración. i) Si $p \in D$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p = 0.a_1a_2\cdots a_n0000\cdots$ donde $a_n = 1$. Usando la hipótesis diádica se tiene que $p = 0.a_1a_2\cdots a_{n-1}0111\cdots$. Ahora supongamos que n es par, y aplicando c y (14) se obtiene

$$\begin{aligned} c(p) &= c(0.a_1a_2\cdots a_{n-1}0111\cdots) \\ &= (0.a_1a_3\cdots a_{n-1}111\cdots\,,\, 0.a_2a_4\cdots a_{n-2}0111\cdots) = (q_1,q_2), \end{aligned}$$

donde claramente $(q_1,q_2) \in D \times D$. El resultado para n impar es muy similar.

Si $(q_1,q_2) \in D \times D$, existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que

$$q_1 = 0.a_1a_2a_3\cdots a_{m-1}0111\cdots$$

y

$$q_2 = 0.b_1b_2b_3\cdots b_{n-1}0111\cdots$$

Primero, supongamos que $m = n$ y definamos

$$p = 0.a_1b_1a_2b_2\cdots a_{m-1}b_{m-1}001111\cdots\,,$$

entonces $p \in D$ y $c(p) = (q_1,q_2)$.

Segundo, supongamos que $m < n$ definamos

$$p = 0.a_1b_1a_2b_2\cdots a_{m-1}b_{m-1}0b_m1b_{m+1}\cdots 1b_{n-1}101111\cdots\,,$$

entonces $p \in D$ y $c(p) = (q_1,q_2)$.

El tercer caso $m > n$ es análogo al segundo caso. La unicidad de p es obvia en todos los casos.

ii) Si $p \in ([0,1] \cap (\mathbb{Q} \setminus D))$ entonces de la definición (2) p tiene una expansión periódica después de unos términos iniciales, es decir, existen enteros $m \geq 0$ y $k > 1$, tales que $p = 0.c_1c_2\cdots c_m\overline{e_1e_2\cdots e_k}$, donde al menos un $e_j \neq 1$ para alguna $j \in \{1,\ldots,k\}$, y $\overline{00\cdots 0} \neq \overline{e_1e_2\cdots e_k} \neq \overline{11\cdots 1}$, porque tomamos el periodo más chico posible. Aquí consideramos cuatro casos:

1.- Si m y k son pares. Entonces

$$c(p) = (0.c_1c_3\cdots c_{m-1}\overline{e_1e_3\cdots e_{k-1}}\,,\, 0.c_2c_4\cdots c_m\overline{e_2e_4\cdots e_k}) = (q_1,q_2),$$

con $q_1, q_2 \in ([0,1] \cap \mathbb{Q})$. Notemos que para $k > 2$, q_1 o q_2 pueden ser racionales diádicos D, pero no ambos. En el caso $k = 2$, ambos q_1 y q_2 son racionales diádicos. Recordar que la hipótesis diádica es únicamente válida en el dominio de c.

2.- Si m es par y k es impar con $k > 1$, entonces

$$c(p) = (0.c_1c_3\cdots c_{m-1}\overline{e_1e_3\cdots e_ke_2e_4\cdots e_{k-1}}\\ , 0.c_2c_4\cdots c_m\overline{e_2e_4\cdots e_{k-1}e_1e_3\cdots e_k}) = (q_1, q_2).$$

En este caso $q_1, q_2 \in ([0,1] \cap (\mathbb{Q} \setminus D)) \subset ([0,1] \cap \mathbb{Q})$.
3.- Si m es impar y k es par, entonces

$$c(p) = (0.c_1c_3\cdots c_m\overline{e_2e_4\cdots e_k}\, , 0.c_2c_4\cdots c_{m-1}\overline{e_1e_3\cdots e_{k-1}}) = (q_1, q_2).$$

Aquí otra vez, $q_1, q_2 \in ([0,1] \cap \mathbb{Q})$. Notemos que para $k > 2$, q_1 o q_2 pueden ser racionales diádicos D, pero no ambos. En el caso $k = 2$, ambos q_1 y q_2 son racionales diádicos.
4.- Si m y k son impares con $k > 1$. Entonces

$$c(p) = (0.c_1c_3\cdots c_m\overline{e_2e_4\cdots e_{k-1}e_1e_3\cdots e_k}\\ , 0.c_2c_4\cdots c_{m-1}\overline{e_1e_3\cdots e_ke_2e_4\cdots e_{k-1}}) = (q_1, q_2).$$

Otra vez, $q_1, q_2 \in ([0,1] \cap (\mathbb{Q} \setminus D)) \subset ([0,1] \cap \mathbb{Q})$.

Pudiera ser que las partes periódicas que ponemos en los valores de $c(p)$ en 1 a 4 no sean las más cortas posibles, se podrían reducir. $\square$

3. Un segundo teorema de Cantor

Empezamos esta sección recordando que cualquier entero no negativo tiene una única representación «binaria» finita como una serie de potencias no negativas de dos, es decir, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, de la expansión binaria de n, existe un único conjunto finito $A_n \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que

$$n = \sum_{m \in A_n} 2^m, \tag{20}$$

donde si $A_n = \emptyset$ entonces $\sum_{m\in\emptyset} 2^m := 0$. Por supuesto, para cada subconjunto finito A de $\mathbb{N} \cup \{0\}$ usando la ecuación (20), obtenemos un único entero no negativo n. Notemos que $b = 2$ es la única base que permite la única representación dada en la ecuación (20). Cambiando 2 por $b \in \mathbb{N}$ con $b > 2$ (20) es falsa. Gottfried Leibniz dijo que la notación binaria era la más simple [9, p. 123] y [5].

Consideremos $\mathbb{Z}$ el conjunto de todos los números enteros, y sea x un número real no negativo que no es entero. Entonces existe $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $n < x < n + 1$. Por lo tanto, existe una única $r \in (0, 1)$, tal que $x = n + r$. Observemos que usando la hipótesis diádica, existe un único $B_r \subset \mathbb{Z}^- = \mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\})$, tal que r puede escribirse como

$$r = \sum_{l \in B_r} 2^l, \tag{21}$$

donde B_r es un subconjunto infinito de $\mathbb{Z}^-$ por la hipótesis diádica. Poniendo juntas las ecuaciones (20) y (21), tenemos que si $x = n + r$, donde $n \geq 0$ es un entero no negativo y $r \in (0, 1)$, entonces

$$x = \sum_{n \in A_n} 2^n + \sum_{l \in B_r} 2^l, \tag{22}$$

donde $A_n \subset \mathbb{N} \cup \{0\} \subset \mathbb{Z}$ es un conjunto finito y $B_r \subset \mathbb{Z}^-$ es un conjunto infinito. Como un sencillo ejemplo, si $x = 5.75$ entonces por la hipótesis diádica y la ecuación (22)

$$\begin{aligned} x = 4 + 1 + 1/2 + 1/4 = 2^2 + 2^0 + 2^{-1} + \sum_{j=-3}^{-\infty} 2^j \\ = \sum_{n \in \{0,2\}} 2^n + \sum_{l \in \{-1,-3,-4,-5\ldots\}} 2^l. \end{aligned}$$

Es bien conocido que la cardinalidades de $\mathbb{R}$, el intervalo abierto $(0, 1)$ y el intervalo cerrado $\mathbf{I}$, son iguales, véase [4, pp. 18]. Es claro que la cardinalidad de $\mathbb{N}$ es menor o igual que la de I, tomando $h : \mathbb{N} \to I$, tal que $h(n) = 1/n$. Georg Cantor fue el primero en probar el siguiente resultado:

Teorema 3.1. *El intervalo* $\mathbf{I}$ *tiene mayor cardinalidad que el conjunto de los número naturales* $\mathbb{N}$*.*

Su hermosa demostración es por contradicción, y usó expansiones decimales de números en $\mathbf{I} = [0, 1]$. Los pasos son los siguientes.

Primero, supongamos que $[0, 1]$ tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{N}$. Entonces existe un biyección φ entre $\mathbb{N}$ y $[0, 1]$. Sea $\varphi(i) = a^i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, donde $a^i = 0.a_1^i a_2^i \cdots a_i^i a_{i+1}^i \cdots \in [0, 1]$, y para cada $j \in \mathbb{N}$ tenemos que $a_j^i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Ya que φ es una biyección estamos suponiendo que φ es suprayectiva.

Segundo, el argumento diagonal permite construir un punto $b \in [0, 1]$ tal que $b \neq a^i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Ya que $a_i^i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, definimos para cada $i \in \mathbb{N}$, b_i como sigue:

$$b_i = \begin{cases} a_i^i + 2 & \text{si} \quad a_i^i \in \{0, 1, 2, \ldots, 6\}, \\ (a_i^i + 3)_{(mod 10)} & \text{si} \quad a_i^i \in \{7, 8, 9\}. \end{cases} \tag{23}$$

Ahora, sea $b = 0.b_1 b_2 \cdots b_i b_{i+1} \cdots$. Es claro que $b \in \mathbf{I}$ y que $b \neq a^i$ para toda $i \in \mathbb{N}$, pero $b \in [0, 1]$. Esto contradice la suprayectividad de φ, y la prueba está completa. La construcción de b dada en la definición (23) es simple, ya que el sistema decimal permite diez posibles opciones para cada una de las coordenadas en la expansión decimal. Para evitar repeticiones, supongamos que cuando un número tenga dos expansiones, escogemos aquella con un número infinito de nueves (hipótesis decimal).

Finalmente, observamos que la demostración dada arriba no depende en lo absoluto del orden de los números a^i. Si tratamos de aplicar el mismo argumento diagonal, en el caso de expansiones binarias, podemos tener algunos problemas ya que los únicos números que aparecen en las expansiones binarias son ceros y unos. Supongamos otra vez que $\varphi : \mathbb{N} \to [0,1]$ es una biyección, tal que $\varphi(i) = a^i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, donde $a_i = 0.a_1^i a_2^i \cdots a_i^i a_{i+1}^i \cdots \in [0,1]$, y donde para cada $j \in \mathbb{N}$ tenemos que $a_j^i \in \{0,1\}$. Si queremos proceder como en la definición (23), la única opción que tenemos es definir para cada $i \in \mathbb{N}$

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_i^i = 0 \\ 0 & \text{si} \quad a_i^i = 1. \end{cases} \tag{24}$$

Supongamos que $\varphi(3) = a_3 = 0.875$, que bajo la hipótesis diádica tiene la expansión binaria $a_3 = 0.110\overline{1} = 0.110111111\ldots$. Observemos que para cualquier $j \in \mathbb{N}$, el $j-$ésimo término a_j^i en la expansión binaria de a^i, puede ser cero o uno, y que ambos casos ocurren un número infinito de veces cuando tomamos todos los posibles puntos $a^i \in [0,1]$. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad podemos suponer el siguiente orden:

$$\begin{aligned} a^1 &= 0.0a_2^1 a_3^1 a_4^1 \cdots, \text{ es decir, } a_1^1 = 0 \\ a^2 &= 0.a_1^2 0 a_3^2 a_4^2 \cdots, \text{ es decir, } a_2^2 = 0 \\ a^3 &= 0.1\,1\,0\,1\,1 \cdots \\ a^i &= 0.a_1^i a_2^i \cdots a_{i-1}^i 1 a_{i+1}^i a_{i+2}^i \cdots, \text{ es decir, para toda } i > 3, \ a_i^i = 1. \end{aligned} \tag{25}$$

Aplicando la definición (24) a (25) obtenemos $b = 0.11100000000 = 0.111 = 0.875 = a_3$. Entonces b es simplemente la segunda expansión binaria de a^3, por lo que b no es diferente de a^i para cada $i \in \mathbb{N}$, y no obtenemos la contradicción como arriba. Sin embargo, podemos obtener la contradicción deseada si modificamos la prueba original como sigue. Supongamos que

$$\begin{aligned} a^1 &= 0.\underline{a_1^1 a_2^1} a_3^1 a_4^1 a_5^1 a_6^1 \cdots \\ a^2 &= 0.a_1^2 a_2^2 \underline{a_3^2 a_4^2} a_5^2 a_6^2 \cdots \\ a^3 &= 0.a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^3 \underline{a_5^3 a_6^3} \cdots \\ &= \cdots \\ a^i &= 0.a_1^i a_2^i a_3^i a_4^i a_5^i a_6^i \cdots \underline{a_{2i-1}^i a_{2i}^i} \cdots \text{ para cada } i > 3. \end{aligned} \tag{26}$$

El nuevo argumento diagonal incluye las entradas subrayadas en (26), y definimos al punto $b \in [0,1]$ usando las siguiente condiciones: para

$i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\text{si} \quad a^i_{2i-1}a^i_{2i} = \underline{0\,0} \quad \text{entonces} \quad b_{2i-1}b_{2i} = \underline{1\,0} \\
&\text{si} \quad a^i_{2i-1}a^i_{2i} = \underline{0\,1} \quad \text{entonces} \quad b_{2i-1}b_{2i} = \underline{1\,1} \\
&\text{si} \quad a^i_{2i-1}a^i_{2i} = \underline{1\,0} \quad \text{entonces} \quad b_{2i-1}b_{2i} = \underline{0\,0} \\
&\text{si} \quad a^i_{2i-1}a^i_{2i} = \underline{1\,1} \quad \text{entonces} \quad b_{2i-1}b_{2i} = \underline{0\,1}
\end{aligned} \tag{27}$$

Si construimos al punto $b \in [0,1]$ usando la ecuación (27), entonces es fácil ver que $b \neq a^i$ para toda $i \in \mathbb{N}$, ya que cualquiera de los cuatro casos arriba nos lleva a punto distintos, aunque el resto de las coordenadas de la expansión coincidan. Primero, si

$$\begin{aligned}
a^i &= 0.a^i_1a^i_2\cdots a^i_{2i-2}\underline{0\,0}a^i_{2i+1}a^i_{2i+2}\cdots \\
b &= 0.a^i_1a^i_2\cdots a^i_{2i-2}\underline{1\,0}a^i_{2i+1}a^i_{2i+2}\cdots ,
\end{aligned} \tag{28}$$

usando la definición (27). En este caso se tiene que $b > a^i$ en (28), y por la serie (5) obtenemos que

$$|b - a^i| = b - a^i = 0.00\cdots 0\underline{1\,0}00\cdots = 1/(2^{2i-1}) > 0.$$

Así, $b \neq a^i$. Segundo, si

$$\begin{aligned}
a^i &= 0.a^i_1a^i_2\cdots a^i_{2i-2}\underline{0\,1}a^i_{2i+1}a^i_{2i+2}\cdots \\
b &= 0.a^i_1a^i_2\cdots a^i_{2i-2}\underline{1\,1}a^i_{2i+1}a^i_{2i+2}\cdots ,
\end{aligned} \tag{29}$$

usando la definición (27). En este caso se tiene que $b > a^i$ en (29), y por la serie (5) obtenemos que

$$|b - a^i| = b - a^i = 0.00\cdots 0\underline{1\,0}00\cdots = 1/(2^{2i-1}) > 0.$$

Así, $b \neq a^i$.

Los otros dos casos son similares con la única diferencia de que $a^i > b$. Por lo tanto, si suponemos que todo número en $[0,1]$ está en la lista $\{a^i\}_{i=1}^{\infty}$, obtenemos la contradicción deseada.

En las figuras 1 a 6 usando líneas rectas unimos valores consecutivos de $c(j/(2^{2n}))$, para $j \in \{0, 1, \ldots, 2^{2n}\}$, tomando $n \in \{2, 3, \ldots, 7\}$, y obtenemos funciones continuas que tienen una bonita estructura fractal, similar a la función de Peano, véase por ejemplo, [11, p. 422], [12] o [13].

Agradecimiento. Deseamos reconocer la labor de dos revisores de este trabajo, que mejoraron la presentación de este artículo.

Bibliografía

[1] G. Cantor, *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*, Ed. Dover Publications, INC., New York, 1915, Traducido por Jourdain, P.E.B. (1955), Publicado originalmente en (1915) por Open Court Publishing Company.

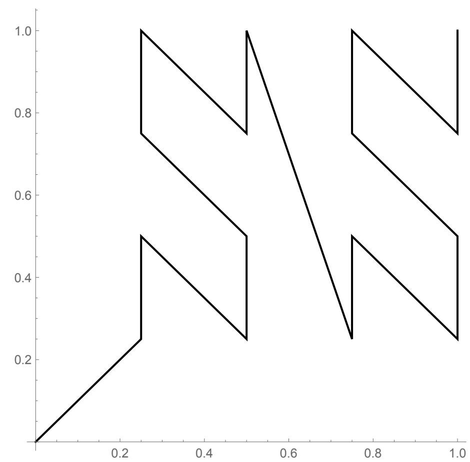

Figura 1. Función c de Cantor para 2^4

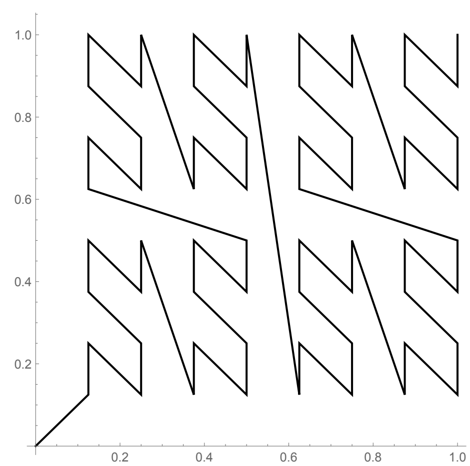

Figura 2. Función c de Cantor para 2^6

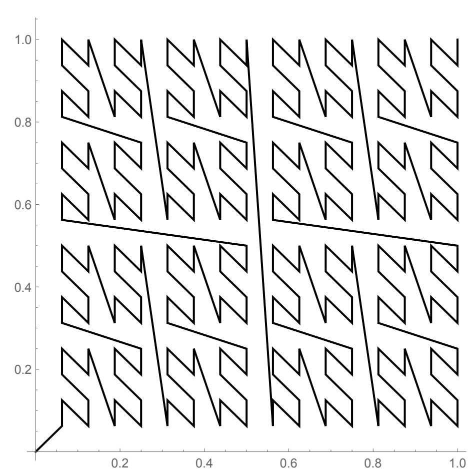

Figura 3. Función c de Cantor para 2^8

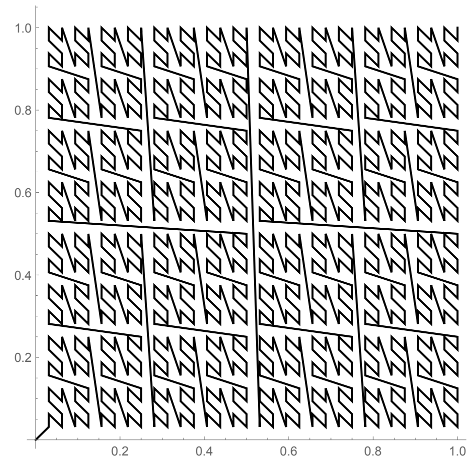

Figura 4. Función c de Cantor para 2^{10}

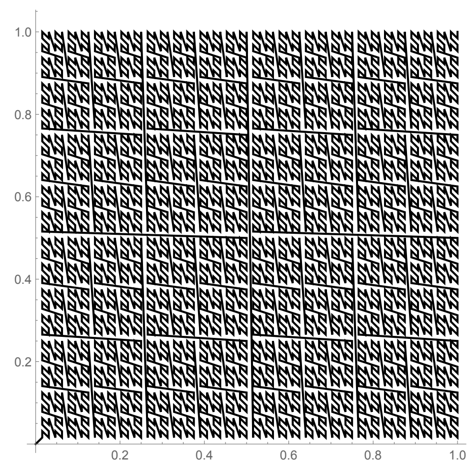

Figura 5. Función c de Cantor para 2^{12}

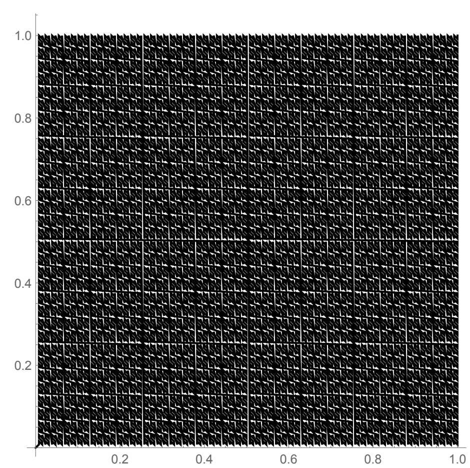

Figura 6. Función c de Cantor para 2^{14}

[2] J. W. Dauben, «Georg Cantor and the origins of transfinite set theory», *Scientific American*, vol. 248, núm. 6, 1983, 122–131.
[3] ______, *Georg Cantor and the battle for transfinite set theory*, City University of New York, 1991, Preimpreso del Ph.D. Program in History, The Graduate Center.
[4] R. M. Dudley, *Real Analysys an Probability*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, núm. 74, Cambridge University Press, 2002.
[5] C. I. Gerhardt, *Die mathematischen schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz*, vol. VII.
[6] J. M. González-Barrios, 2.ª ed., vol. 14, Lecture Notes on Real Analysis, núm. 30, Monografías IIMAS, 2018.
[7] R. H. Hammack, *Book of Proof*, 3.ª ed., Open Textbook Initiative. Barnes & Noble, Virginia, 2018.
[8] D. Hilbert, «Hilbert's quotes», 1927, see page `www.goodreads.com`.
[9] J. Muñoz, *La invención del cálculo infinitesimal*, vol. 2, RBA, Coleccionables, S.A.U., 2017.
[10] G. E. Piñeiro, *La Formalización del concepto de infinito Cantor*, vol. 15, RBA, Coleccionables, S.A.U., 2017.
[11] H. Sagan, «Some reflections on the emergence of space filling curves: The way it could have happened and should have happened, but did not happen», *Journal of the Franklin Institute*, vol. 328, núm. 4, 1991, 419–430.
[12] ______, *Space-Filling Curves*, Springer-Verlag, New York, 1994.
[13] I. J. Schoenberg, «On the Peano curve of Lebesgue», *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 4, 1938, 519.