

DOI: <https://doi.org/10.47234/mm.7202>

Acerca de la teoría de los números transfinitos de Cantor, de 1874 a 1940

David Meza Alcántara
Facultad de Ciencias, UNAM
dmeza@ciencias.unam.mx

y
Carlos Torres Alcaraz
Facultad de Ciencias, UNAM
carlos.torres.0505@gmail.com

Introducción

En términos históricos, la teoría de conjuntos es de reciente creación: su invención data del último tercio del siglo XIX, impulsada por Richard Dedekind y Georg Cantor. Esto sucedió justo después de que matemáticos como Gauss, Weierstrass y Kronecker habían logrado imponer una concepción taxativa del infinito en la que este solo se admitía como algo potencial, como una forma de hablar. No obstante, su exclusión no duró mucho tiempo: entre 1872 y 1874 Dedekind y Cantor lo resucitaron en la más abominada de sus formas: la del infinito actual. El primero lo hizo en su definición de los números reales; el segundo, creando una hermosa teoría, la de los números transfinitos, calificada por Hilbert como un paraíso.¹

La de Cantor es una teoría abstracta, sin ningún sentido práctico y desarrollada por sí misma, libre de la obligación de pensar en «este mundo». Se trata, sin lugar a dudas, de la mejor exponente de esa nueva actitud ante el quehacer matemático en la que la realidad física, el mundo empírico y multitud de cosas más se dejan de lado.

Obviamente, no es nuestro propósito examinar en detalle esta teoría, cuyo conocimiento se adquiere solo con muchas horas de estudio. En vez de ello habremos de dirigir nuestra atención a ciertos problemas que perturbaron a Cantor y que no pudo resolver. Se trata de la buena

Los autores queremos agradecer el apoyo recibido por parte de Tania Azucena Chicalote Jiménez, quien realizó la transcripción del presente texto a L^AT_EX.

¹Más allá de la valoración estética de la teoría de Cantor —«la flor más admirable que el espíritu matemático ha producido»—, Hilbert vio en ella uno de los mayores logros de la actividad intelectual humana en general, una invención situada en el más alto rango del pensamiento humano.

ordenación de todo conjunto y de la hipótesis del continuo. Junto a lo anterior habremos de observar diversos avances que con el tiempo se dieron en torno al problema de la cardinalidad del continuo, hasta llegar a lo hecho por Gödel entre 1938 y 1940. Como veremos, lo ocurrido pone de manifiesto un aspecto del quehacer matemático que de alguna manera ha sido desdeñado por la historia que nos es familiar: que la vida de las matemáticas radica en sus problemas, y que la solución de estos es más bien una cuestión colectiva.

Desde esta perspectiva habremos de examinar dos problemas planteados por Cantor, uno de los cuales (el de la cardinalidad del continuo) recorrió gran parte del siglo XX. Como veremos, esta cuestión dio lugar a la invención de métodos y conceptos que terminaron por cambiar la faz de la lógica y la teoría de conjuntos.² Y si bien aquí no narraremos todo lo acontecido (este ensayo se limita a lo ocurrido hasta 1940), lo que sí podemos hacer es ofrecer una panorámica que busca motivar al lector a que ahonde en estas cuestiones, procurando a la vez una explicación simple y accesible de algunos conceptos, ideas y procedimientos que se introdujeron en el camino.

En breve: en este trabajo nos ocupamos del comienzo de la teoría de los números transfinitos en manos de Cantor, de las preocupaciones centrales de su autor y de lo sucedido hasta la prueba que ofreciera Gödel de la consistencia de la hipótesis del continuo con la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel y sistemas afines.³

La presentación es por necesidad poco rigurosa, exageradamente simplificada y sin ninguna pretensión de completitud. La selección de temas la hemos hecho tomando en cuenta los objetivos ya señalados, intentando realzar al mismo tiempo la fineza de la teoría de los números transfinitos de Cantor y los admirables avances que hubo en ella.

²En el fondo, uno de nuestros propósitos es ejemplificar lo que Yehuda Rav [24] describe como la esencia de las matemáticas: la invención de métodos, herramientas, estrategias y conceptos para resolver problemas. Eso es lo que él ve en toda agenda interna de investigación. Esto significa que toda innovación conceptual o metodológica en la matemática está ligada al propósito de solucionar algún problema o tipo de problemas y a la búsqueda y descubrimiento de pruebas, lo cual estimula nuevos desarrollos y establece vínculos entre distintas teorías. En este sentido, la hipótesis del continuo de Cantor actuó como un catalizador, como un factor que dio lugar a notables desarrollos en la búsqueda de una prueba o, como sucedió a la larga, de un argumento que pusiera de manifiesto la imposibilidad de una prueba con los medios seleccionados.

³En este sentido dejamos para el futuro una segunda parte en la que abordaremos la prueba de independencia que ofrece Cohen de la hipótesis del continuo (respecto a las mismas teorías), y mucho de lo sucedido hasta nuestros días en torno a la cuestión de la cardinalidad de los conjuntos, mostrando cómo la técnica de construcción de modelos introducida por Cohen, conocida como *método del forcing*, evolucionó hasta convertirse en una importante herramienta, quizá la más importante, de la actual teoría de conjuntos.

Acerca de la teoría de Cantor

Para entender debidamente el tema que nos ocupa creemos oportuno iniciar con un amplio comentario en torno a la teoría de los números transfinitos de Cantor, señalando su carácter, las preocupaciones de su autor y algunas líneas de investigación que dejó abiertas, para después mostrar algunos resultados en esa dirección.

En lo primordial, la teoría de Cantor trata con todo lo relacionado con la cardinalidad de los conjuntos infinitos, esencialmente de números, la posibilidad de imponer un buen orden entre sus elementos y los distintos modos en que estos (los buenos órdenes) se hacen presentes (si el lector tiene dudas acerca de esta noción, vea la nota al pie ⁴). En gran medida, esas fueron las preocupaciones que guiaron sus investigaciones, teniendo como eje el llamado «problema del continuo» que cautivó su atención y a cuya solución nunca pudo llegar.⁵

En los hechos, el afán por resolver estos problemas llevó a la teoría axiomática de Zermelo, en la que se pudo abordar el problema del buen orden a cambio de introducir un principio sumamente controvertido. A su vez esta teoría hubo de ampliarse hasta llegar a lo que se conoce como *teoría de Zermelo-Fraenkel*, la cual ha servido como base de la moderna teoría de conjuntos, orientada hacia la solución de muchos otros problemas más allá de las preocupaciones de Cantor. De la misma manera, el problema del continuo llevó a la teoría de los conjuntos constructibles de Gödel y al *forcing*, el cual sirvió como base técnica sobre la que se levantaron múltiples variantes que han sido utilizadas para probar resultados de consistencia e independencia en distintas áreas de las matemáticas.

⁴Dado un conjunto X y un orden total \mathcal{O} entre sus elementos, decimos que \mathcal{O} es un *buen orden* cuando tiene la propiedad adicional de que todo subconjunto no vacío de X tiene un primer elemento conforme a \mathcal{O} . Por ejemplo, el orden habitual entre los números naturales es un buen orden, mientras que el orden entre los números racionales no lo es (v. gr., el intervalo $(0, 1)$ no tiene primer elemento).

⁵Esto significa, entre otras cosas, que la teoría de Cantor no es lo que comúnmente se entiende por «teoría de conjuntos»: una disciplina dedicada a la elaboración conceptual de prácticamente todas las ramas de la matemática (i. e., una teoría en la que se puede reconstruir gran parte de la matemática contemporánea, mérito que más bien corresponde a matemáticos como Dedekind, Zermelo, etc.) En contra de lo que muchos autores proclaman, esto tiene muy poco que ver con las preocupaciones de Cantor. En breve: Cantor jamás edificó una teoría general de conjuntos.

Los comienzos de la teoría cantoriana: conjuntos de números

La teoría de conjuntos de Cantor tuvo como punto de partida un problema matemático muy particular: el de la unicidad de la representación en series de Fourier de una función real de variable real. Entre los problemas que Cantor hubo de enfrentar se hallaba el de «contar» el número de puntos excepcionales en los que, por ejemplo, una función es discontinua, los cuales se pueden presentar en cantidades finitas o infinitas. Estas investigaciones lo llevaron a la necesidad de extender la noción usual de número entero para poder «contar» conjuntos infinitos, señalar la manera en que estos están ordenados (números ordinales), y expresar su magnitud (números cardinales), una idea distinta de la de desarrollar una teoría general de conjuntos.

Lo anterior lo llevó a examinar los conjuntos de números más importantes: los números naturales, los números racionales, los números algebraicos y los números reales. Buscó las diferencias entre ellos en el sentido de que los primeros forman un conjunto discreto (para cada número siempre hay «el siguiente»), los dos siguientes constituyen conjuntos densos no continuos (los hay por doquier, pero presentan «huecos» en la recta numérica), y los últimos forman un continuo. En 1874 publicó un artículo en el que demuestra el notable resultado de que los números racionales y los números algebraicos se pueden poner en correspondencia uno a uno (1-1) con los números naturales, mientras que los números reales no (es decir, no se pueden «contar» con los primeros). Con ello puso en evidencia que hay colecciones infinitas de distintas magnitudes, y demostró el hecho sorprendente de que los conjuntos de números naturales, racionales y algebraicos tienen lo que ahora llamamos «una misma cardinalidad».⁶

En [22, p. 52] podemos leer un pasaje escrito por Cantor en el que intenta recapitular su labor en este dominio:

Lo que afirmo y creo que he demostrado en este y otros trabajos anteriores es que, siguiendo lo finito, hay un *transfinito* (que también podría llamarse *supra-finito*), que es una escala ascendente ilimitada de modos definidos, que por su naturaleza no son finitos sino infinitos, pero que al igual que lo finito se pueden determinar mediante *números* bien definidos y distinguibles.

⁶La demostración de estos resultados lo llevó a servirse de dos procedimientos de su invención: el método de las matrices infinitas y el método de la diagonal.

Podemos decir entonces que la teoría de Cantor nació del afán por extender a totalidades infinitas algo íntimamente relacionado con la experiencia humana: el arte de contar y ordenar. En palabras de Shaughan Lavine [22, p. 3]:

A pesar de la historia usual, la de Cantor era una teoría no de colecciones en algún sentido familiar, sino de colecciones que se podían contar utilizando índices —los números ordinales finitos y transfinitos, como él los hubo de llamar—.

Un mérito de Cantor fue poner de manifiesto la disparidad entre las nociones de número ordinal y número cardinal, las cuales suelen tratarse como iguales en la esfera de lo finito.⁷ Una de sus preocupaciones centrales fue la de precisar las propiedades de la progresión numérica transfinita (en la que ordinales y cardinales se dispersan), y determinar el lugar que le corresponde en ella al continuo numérico.

En lo que sigue trataremos algunos aspectos de la obra de Cantor relacionados con su empeño en resolver el problema de la cardinalidad del continuo numérico. Su intención era solucionar este problema con base en cierto vínculo que descubrió entre los números ordinales y los números cardinales. Al respecto, el orden de nuestra exposición no se ciñe al orden temporal en que sucedieron las cosas (no es una historia de la teoría cantoriana); más bien, obedece a nuestro interés por precisar de manera sucinta ciertas ideas e inquietudes de Cantor que de alguna manera fijaron la agenda de las investigaciones en este dominio en el siglo veinte.

La cuestión del continuo numérico

Con relación al continuo numérico hubo dos problemas que atrajeron poderosamente la atención de Cantor: el problema de determinar su

⁷Una simple observación. Al contar los elementos de una colección finita, estamos imponiendo un orden entre sus elementos. V. gr., la acción de un granjero que cuenta sus gallinas la podemos interpretar así: cuando dice «una, dos, ..., n » en realidad lo que está haciendo es establecer un orden entre las aves, cual diciendo «esta es la primera, esa la segunda, ...»; llegar a la última del conteo corresponde a decir «y aquella es la enésima», por lo que dirá «tengo n gallinas». Es así que el número ordinal n se identifica con el número cardinal de la colección. Esto es posible en virtud de que, en el dominio de los conjuntos finitos, cualesquiera dos buenos órdenes de un conjunto son isomorfos entre sí (es decir, solo hay un ordinal asignable a la colección, el cual se identifica como su cardinal). Empero, en el dominio de los conjuntos infinitos esto deja de ser así. Por ejemplo, los buenos órdenes «1, 2, 3, 4, ...» y «1, 3, 5, ...; 2, 4, 6, ...» no son *semejantes* entre sí (no se pueden poner en correspondencia 1-1 conservando el orden en ambas partes), aunque el cardinal de las dos colecciones es el mismo. En otras palabras, en el transfinito hay una clara separación entre estos dos tipos de números, y no todo ordinal es un cardinal. En breve volveremos a este punto.

lugar en la jerarquía transfinita (problema de la cardinalidad del continuo), y el problema de «contar» sus elementos (es decir, de establecer un buen orden entre ellos).

La relación entre estos dos problemas es muy estrecha. Para empezar, la prueba ofrecida por Cantor de que el continuo numérico no se puede poner en correspondencia uno a uno con el conjunto \mathbb{N} de los números naturales no resolvió el problema de la cardinalidad del continuo: tan solo dejó ver que, cualquiera que esta sea, no es la de \mathbb{N} . En otras palabras, lo único que Cantor pudo probar es que el continuo y $P(\mathbb{N})$ (el conjunto potencia de \mathbb{N}) son biyectables entre sí.⁸ Fue entonces que imaginó otro camino para resolver el problema: imponer un *buen orden* entre los elementos del continuo numérico para después determinar el número ordinal correspondiente, fijando de esta manera su lugar en la jerarquía transfinita. Esto entrañaba dos cosas: i) asociar a cada conjunto bien ordenado un *número* que reflejaría dicho orden; ii) la necesidad de puntualizar los vínculos entre tales números y los números cardinales.

Cantor pudo resolver en parte estas cuestiones asociando a ciertos conjuntos bien ordenados un ente numérico (un «número», denominado por él «*número ordinal*»), el cual expresa la manera en que sus elementos están (o fueron) ordenados. En el transfinito, estos números resultaron ser conceptualmente distintos de los *números cardinales* o «potencias», cuya única función es expresar el tamaño de una colección.⁹ El primer paso en esta dirección lo dio con la introducción del número ω , el primer ordinal transfinito.

El número ω

Es un hecho bien sabido que en la matemática no basta con referirse conceptualmente a los números, sino que se requiere de una notación adecuada que permita operar con ellos. Con relación a los números ordinales, en 1883 Cantor introdujo, en un acto de absoluta creatividad, el número ω (omega), el primer ordinal transfinito, pensado como (sic) «el primer número entero que sigue a todos los números enteros finitos». Este número se debe entender como el límite de la sucesión $0, 1, 2, 3, \dots$

⁸La cuestión de que dos conjuntos A y B tienen la misma cardinalidad se soluciona estableciendo una correspondencia uno a uno entre ellos. No obstante, esto no resuelve por sí mismo el problema de su cardinalidad, pues lo único que se prueba con ello es que esta es la misma para ambos conjuntos, no cuál es. En cuanto a $P(\mathbb{N})$, su cardinalidad no era conocida, y conforme a lo sucedido posteriormente se trata de una cuestión indeterminada con relación a los axiomas establecidos por Zermelo y Fraenkel entre 1908 y 1922 (teoría conocida como ZFC).

⁹Modernamente, las nociones de *número ordinal* y *número cardinal* cuentan con una definición precisa. Esto contrasta con el manejo que hizo Cantor de ellas, cuyo tratamiento fue informal, en el contexto del lenguaje natural y sin axiomas ni definiciones rigurosas.

en el infinito, a condición de considerar este límite como exterior a la sucesión. Su introducción resulta de un acto intelectual que Cantor denomina «segundo principio de formación». El primer principio es el siguiente: dado un número, añadir a este una unidad para engendrar el siguiente número. Con base en este último principio siempre se puede formar, a partir de un número dado, una sucesión ilimitada con la propiedad de que entre dos de sus términos invariablemente media una progresión finita.

El segundo principio consiste, justamente, en imaginar un nuevo número inmediatamente superior a todos los generados con el primer principio a partir de un número dado; una especie de *límite* de la sucesión, como ya lo hemos señalado.¹⁰

Más allá de su simple apariencia, el número ω constituye una invención similar a la de la unidad imaginaria i , junto con la que ocupa un importante lugar en las matemáticas. Con su inclusión, la vaguedad del infinito y todas las imágenes borrosas implicadas en la sola mención de la palabra fueron superadas: se tenía una entidad transfinita claramente determinada. Como complemento, Cantor extendió las operaciones aritméticas (suma, multiplicación, etc.) a los números transfinitos mediante una definición conveniente de estas operaciones, dando lugar a una aritmética ordinal y una aritmética cardinal distintas entre sí. Esto le permitió expresar en el lenguaje del álgebra ciertas operaciones y relaciones entre conjuntos.

Algo que Cantor puso en evidencia es que, en el transfinito, un conjunto se puede bien ordenar de muchas maneras no equivalentes entre sí (i. e., mostró que un número cardinal transfinito puede tener asociados a él una infinidad de números ordinales). En otras palabras: en el dominio de los conjuntos infinitos, dos ordinales distintos entre sí (es decir, que no se pueden biyectar conservando el orden entre sus elementos) pueden corresponder a un mismo cardinal, pues lo que marca la diferencia es la manera en que se han «arreglado» sus elementos, no su «cantidad».

Cantor notó que al formar la colección de todos los números ordinales numerables, es decir, de los ordinales que representan buenos órdenes de conjuntos equipotentes con ω , la colección (a la cual denominó *segunda clase numérica*, donde ω es primera) tiene una cardinalidad mayor que la de ω (i. e., no es numerable).

Es más, descubrió que el cardinal de la segunda clase numérica es el cardinal sucesor del número correspondiente a ω , en el sentido de

¹⁰Nótese que este principio no solo da lugar al número ω , sino a una infinidad de números ordinales transfinitos en combinación con el primer principio. V. gr., a partir de ω se genera, con la aplicación iterada del primer principio, una sucesión de números que denotamos con $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$... a partir de la cual se obtiene, mediante el segundo principio, el número $\omega+\omega = \omega \cdot 2$ (y vuelta a empezar: $\omega \cdot 2 + 1$, $\omega \cdot 2 + 2$, ...), etc.

que cualquier subconjunto infinito de la segunda clase numérica tiene la potencia del conjunto de los números naturales o de la segunda clase en su totalidad. Pronto generalizó lo anterior: si se reúnen todos los números ordinales que representan buenos órdenes de la segunda clase numérica (formando de esa manera la tercera clase numérica), el cardinal de esta clase deberá ser el sucesor del cardinal de la segunda clase, y así sucesivamente. De esta manera Cantor se sirvió de los números ordinales para generar una sucesión infinita de números cardinales (o potencias) consecutivos. A esta sucesión Cantor la habría de llamar «sucesión de *alephs*»: \aleph_0 (cardinal de los números naturales), \aleph_1 (cardinal de la segunda clase numérica), \aleph_2 (cardinal de la tercera clase numérica), etc. Dado que las clases numéricas se pueden generar indefinidamente, también los *alephs*:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \aleph_0 & & \aleph_1 & & \aleph_2 & & \dots & & \aleph_{n-1} & & \dots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \dots & & \downarrow & & \dots \\
 \omega & 2^{\text{a}} \text{ clase numérica} & 3^{\text{a}} \text{ clase numérica} & \dots & n^{\text{a}} \text{ clase numérica} & \dots & & & & & \dots
 \end{array}$$

El cardinal del continuo

Tras la introducción de los *alephs*, fue algo natural preguntarse si la cardinalidad del continuo numérico correspondía a alguno de estos números. V. gr., ¿tendría el continuo como número cardinal al número \aleph_1 , segundo de la sucesión transfinita? (Cantor supuso que sí), ¿o tendría como cardinal a algún otro \aleph ? Por el contrario, ¿sería que ninguno de estos números correspondía al continuo?

La conjetura de Cantor era que la totalidad de los números reales tenía la propiedad de que cualquier colección infinita de ellos, o era numerable o tenía la misma potencia que el continuo. Esta conjetura llegó a ser conocida como *hipótesis del continuo* (CH por sus siglas en inglés). Esta supuesta relación entre \mathbb{N} y \mathbb{R} era análoga a la existente entre la primera y la segunda clase numérica, en el sentido de que el cardinal de la segunda es el sucesor del cardinal de la primera. Según esto, la cardinalidad del continuo debía ser \aleph_1 .

Para entonces Cantor ya conocía distintas propiedades de los números ordinales y había definido una aritmética para ellos y otra para los números cardinales.¹¹ Por ejemplo, sabía que dos números ordinales α y β siempre son comparables entre sí, es decir, satisfacen la ley de tricotomía: $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ o $\alpha > \beta$. Sabía también que la unión de conjuntos numerables es numerable, cuestión que generalizó a todos los *alephs*:

¹¹ Al respecto, véase [18, caps. 5 y 6].

$\aleph_\alpha + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$. Con el desarrollo de la aritmética cardinal transfinita, Cantor pudo expresar la hipótesis del continuo en su forma moderna a través de la exponenciación cardinal: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.¹² Esto fue generalizado en 1908 por Félix Hausdorff para todos los *aleph*:

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \text{ (hipótesis generalizada del continuo o GCH).}$$

Todo lo anterior descansaba en algunas suposiciones y encerraba diversas cuestiones no resueltas, entre ellas las siguientes:

1. suposición: todo conjunto bien ordenado tiene un tamaño representado por un cardinal, es decir, la sucesión de los *aleph* incorpora los números cardinales de todos los conjuntos que se pueden bien ordenar;
2. incógnita: ¿Será acaso que todo conjunto se puede bien ordenar? Obviamente, si el continuo numérico tuviera la misma cardinalidad que la segunda clase numérica, se le podría bien ordenar, pero
3. ¿se le puede bien ordenar?

Un problema que enfrentaba Cantor era que no sabía cómo bien ordenar el conjunto potencia de \mathbb{N} . De hecho, no sabía cómo establecer un buen orden entre los subconjuntos de un conjunto infinito dado. Se trataba de un problema abierto. Esto encerraba la posibilidad de que, bajo cierta punto de vista que él parecía compartir, el conjunto potencia de \mathbb{N} no fuera un conjunto, lo cual afectaría el *statu quo* del continuo numérico que le es equivalente.¹³

Para Cantor todo lo anterior estableció una meta por alcanzar: probar que toda colección se puede bien ordenar. Al respecto, en su empeño llegó a creer que la posibilidad de bien ordenar toda colección era una ley del pensamiento.¹⁴ No obstante, la solución matemática del problema no se reducía a una cuestión de creencias; más bien, había que

¹²La notación corresponde a lo siguiente: todo conjunto finito de n elementos tiene 2^n subconjuntos. Por ejemplo, $X = \{a, b, c\}$ tiene 8 subconjuntos, y $8 = 2^3$ (recuérdese que el conjunto vacío también es un subconjunto de X). En la teoría de conjuntos la exponenciación se define de manera que esta propiedad se sigue cumpliendo: un conjunto transfinito de cardinalidad α tiene 2^α subconjuntos.

¹³Algunos autores sostienen que la noción de *conjunto* de Cantor es la de una colección definida por la enumeración de sus términos. Lavine es uno de ellos [22, p. 3]: «La teoría original de Cantor [...] se desarrolló a partir de una sola idea coherente: los conjuntos son *coleccionces que se pueden contar*». Por su parte Russell se refiere a la noción de conjunto con la que tratan los matemáticos, especialmente Cantor, diciendo que tales entidades [25, p. 68] «están definidas por una enumeración de sus términos». De ser así, para que el continuo numérico fuera un conjunto sus términos deberían poderse enumerar en el amplio sentido de la palabra. Esta noción contrasta con la que podemos hallar en la lógica y la teoría general de conjuntos, donde las clases y los conjuntos consisten en colecciones de entidades que verifican una aserción o, en términos más precisos, que satisfacen un predicado.

¹⁴Esto lo expresó en 1883 con las siguientes palabras [15]: «El concepto de *conjunto bien ordenado* se revela como fundamental para la teoría de los conjuntos. Que siempre es posible organizar cualquier conjunto bien definido en la forma de un conjunto bien ordenado es, me parece, una ley de pensamiento muy básica, rica en consecuencias y particularmente notable en virtud de su validez general».

probar las dos suposiciones anteriores: Que toda colección se puede bien ordenar, y que los *alephs* representan la escala de los cardinales infinitos (es decir, que a todo conjunto infinito le corresponde un *aleph*).

Cantor no pudo resolver ninguno de estos problemas, como tampoco pudo probar la hipótesis del continuo. No obstante, como ya lo hemos señalado, con ellos fijó en buena medida el curso de las investigaciones en este dominio durante el siglo veinte.

Como veremos, la resolución de estos problemas requirió de un aparato conceptual muy superior al dispuesto por Cantor, y las conclusiones alcanzadas no fueron precisamente lo que él esperaba.

La teoría de conjuntos tras el cambio de siglo

El inicio del siglo XX significó un cambio en la conducción de la teoría: las investigaciones pasaron de Cantor a la siguiente generación, lo cual redundó en la diversificación de su temática. Por ejemplo, Hausdorff orientó su trabajo hacia la exploración de los números transfinitos superiores, los distintos tipos de orden y la cofinalidad. Por su parte, Borel, Baire y Lebesgue se embarcaron en el estudio de los conjuntos de números reales definibles desde una perspectiva constructiva, con lo que sentaron las bases de la teoría de la medida y la teoría descriptiva de conjuntos, ampliadas más tarde por Hausdorff en Alemania y por Luzin, Sierpinski, Suslin *et al* en Rusia y Polonia. Se trata de dos programas de investigación que han perdurado hasta nuestros días.

En cuanto a las preocupaciones de Cantor, dos importantes figuras que trabajaron en ello fueron David Hilbert, quien en los años veinte intentó probar la hipótesis de Continuo con base en su teoría de la demostración, y Ernst Zermelo, quien en 1904–1908 abordó el problema de la buena ordenación, lo cual lo llevó a formular una base axiomática para la teoría.

Zermelo y el problema de la buena ordenación

En 1904, y después en 1908, Zermelo probó que todo conjunto se puede bien ordenar, dando con ello un paso en la dirección indicada por Cantor. No obstante, las pruebas que ofreció no fueron aceptadas por todos, pues se apoyaban en un principio, el llamado *axioma de elección*, que trascendía el marco existente de la teoría de conjuntos.¹⁵ Además,

¹⁵En 1908 Zermelo presentó este principio como el axioma VI de su sistema:

(Axioma de elección) Si T es un conjunto cuyos elementos son conjuntos diferentes de \emptyset y mutuamente ajenos entre sí, la unión $\cup T$ incluye al menos un subconjunto S que tiene un único elemento en común con cada elemento de T . También podemos

debido a la indeterminación que deriva de este principio, la pregunta por la cardinalidad del continuo siguió sin respuesta.

En efecto, si bien Zermelo deja ver que el conjunto de los números reales se «puede» bien ordenar, en sus pruebas no indica cómo llevar a cabo tal ordenación de manera efectiva, de modo que después de todo siguió siendo una incógnita a qué número ordinal habría de corresponder el resultado. En otras palabras, las pruebas de Zermelo no resuelven el problema de si entre el cardinal \aleph_0 de los números naturales y el cardinal \mathfrak{c} del continuo numérico hay o no un tercer cardinal en medio de ellos.

Lo que sí sucedió fue que el teorema del buen orden se convirtió en el sostén de la teoría de los cardinales infinitos, pues muestra que todo conjunto para el que tenga sentido hablar de sus subconjuntos se puede bien ordenar, haciéndole corresponder de esta manera un *aleph*, aunque no siempre se sepa cuál es este.

Como quiera que sea, el trabajo de Zermelo de 1908 marcó un cambio radical en el tratamiento de la teoría. En él, Zermelo hizo explícitos, bajo la forma de axiomas, todos los supuestos existenciales sobre los que se basa su segunda prueba del teorema del buen orden.¹⁶ Al mismo tiempo, dicho trabajo constituyó una reconstrucción de la teoría de conjuntos muy en el espíritu de la axiomática que ofrece Hilbert para la geometría en su libro *Grundlagen der Geometrie* de 1899. En particular, Zermelo intenta fijar una base sobre la cual edificar toda la aritmética y todo el análisis matemático. Con ello no solo estableció algunas propiedades fundamentales de los conjuntos, sino que transformó la teoría, conduciéndola a una segunda fase en su desarrollo.

Los axiomas de Zermelo, siete en total, son bien conocidos: *extensiónalidad*, *conjuntos elementales*, *separación*, *conjunto potencia*, *unión*, *elección e infinito*. Cf. ([18]).

Algunos cambios en la teoría después de Zermelo

Como complemento a lo hecho por Zermelo, en la década de los veinte Abraham Fraenkel y John von Neumann propusieron, con base en la

expresar el axioma diciendo que siempre es posible elegir un único elemento de cada conjunto M, N, \dots de T y combinar todos estos elementos en un conjunto S .

En la prueba de 1904 Zermelo utilizó un principio similar a este, aunque expresado en términos de una noción ahora en desuso: la de «cobertura». Con base en él pudo asegurar la existencia de lo que ahora llamamos una «función de elección».

¹⁶Akihiro Kanamori sostiene, con justa razón, que la presentación de la teoría que hace Zermelo ejemplifica un caso en el que la prueba de un hecho fundamental prescribe el cuadro de conceptos básicos y axiomas que han de ponerse en la base de la teoría. Véase ([20]). Esta limitante explica, entre otras cosas, la necesidad que hubo de extender la teoría con nuevos axiomas a fin de tratar con otros problemas de distinta índole. La teoría de Zermelo suele denotarse con ZC o, si se omite el axioma de elección, con Z.

labor de otros investigadores, dos nuevos axiomas que ahora suelen formar parte de la presentación de la teoría. Se trata de los axiomas de *reemplazo* (1922), y *fundación* o *regularidad* (1925). Al resultado de añadir el primero de ellos se le conoce como «teoría de Zermelo-Fraenkel», y se denota con ZF o ZFC, según se incluya o no el axioma de elección (*Axiom of Choice*).

Asimismo, hacia 1922 Thoralf Skolem propuso desarrollar la teoría con base en lo que se conoce como *lenguajes de primer orden*, en los que solo se dispone de variables para los individuos (los elementos del dominio de discurso), pero no para los conjuntos de individuos. En tales lenguajes es imposible cuantificar sobre conjuntos de individuos ya que se carece de variables para ellos.¹⁷

Al reconstruir la teoría en el contexto de un lenguaje de primer orden, la noción de *propiedad definida* (vital para el axioma de separación) se identifica con las *fórmulas predicativas de un argumento*, es decir, fórmulas que se pueden construir a partir de las fórmulas básicas —de la forma $x \in y$ y $x = y$ — mediante las operaciones lógicas de negación, conjunción, disyunción, implicación, equivalencia, cuantificación universal y cuantificación existencial, y que solo tienen una variable libre.

Si bien Zermelo se opuso tajantemente a la propuesta de Skolem debido a las implicaciones que tiene el uso de los lenguajes de primer orden (pues esto permite la existencia de modelos numerables de la teoría), a la larga la idea de Skolem prevaleció.¹⁸ Esto tuvo como consecuencia la anexión de la teoría de conjuntos a la lógica, de modo que ahora podía servirse (como lo hizo) del caudal de recursos sintácticos y semánticos de esta última: lenguajes formales, teoría de la prueba, teoría de modelos, etc. Desde esta nueva perspectiva, la teoría de conjuntos se contempla como el estudio de ciertos entes abstractos (los *conjuntos*) organizados en torno a una única relación (la *pertenencia*) y algunas operaciones, todo esto estipulado en los axiomas.

¹⁷ Algunos principios matemáticos requieren, en su expresión formal, de la cuantificación no solo de individuos, sino de conjuntos de individuos. Por ejemplo, en 1889 Peano enunció el *Principio de inducción* en términos de los subconjuntos de \mathbb{N} «Si el 1 pertenece a un conjunto de números naturales, y dado un elemento cualquiera, el sucesor también pertenece al conjunto, entonces todos los números naturales pertenecen a ese conjunto». Esto lo podemos formular en un lenguaje de segundo orden como sigue: $\forall X((X \subseteq \mathbb{N} \wedge 1 \in X \wedge \forall x(x \in X \rightarrow sx \in X)) \rightarrow X = \mathbb{N})$. Nótese que en la fórmula anterior la variable « X » no corre sobre números naturales (los elementos del dominio de discurso), sino sobre conjuntos de números naturales, de manera que el principio que ofrece Peano requiere de un lenguaje en el que no solo se cuantifican individuos, sino conjuntos de individuos. Eso no es posible en los lenguajes de primer orden, lo cual limita su capacidad expresiva.

¹⁸ El mismo Skolem probó que si los axiomas de la teoría son consistentes, tienen un modelo numerable. Debido a ello, en dicho modelo el conjunto de los números reales es numerable. A esto se le conoce como *paradoja de Skolem*. Dejamos al lector investigar por qué esto no contradice el teorema de Cantor acerca de la no numerabilidad de dicho conjunto.

Obviamente, el crecimiento de la teoría de conjuntos no fue todo lo sencillo y armonioso que pudiera parecer en estas páginas, ni se limitó a los cambios recién indicados. Por el contrario, su desarrollo envolvió otras líneas de investigación que aquí no habremos de mencionar, y múltiples desacuerdos en torno a los axiomas de elección y separación, o disputas acerca de cuestiones como la del lugar e importancia de la teoría de los números transfinitos de Cantor, la determinación del tipo de objetos admisibles en la teoría (¿urelementos?, ¿solo conjuntos bien fundados?)¹⁹, el propósito de reconstruir la matemática ordinaria al interior de ella, la disyuntiva entre jerarquizar o no a los conjuntos, la necesidad de distinguir entre *clases* y *conjuntos* y los modos de introducir este tipo de entidades.

Dado nuestro interés casi privativo en el problema del continuo, en lo que sigue nos limitaremos a explicar algunos cambios y mejoras debidos a von Neumann y Gödel que llevaron a resolver parcialmente dicho problema.

La intervención de John von Neumann

Uno de los matemáticos más activos en el dominio de la teoría de conjuntos durante los años veinte fue, sin lugar a dudas, John von Neumann, quien trabajó en la remodelación del marco axiomático para la teoría de conjuntos. Uno de sus propósitos era organizar de mejor manera el universo conjuntista mediante la provisión de nuevos principios y procedimientos, a la vez que recuperar la teoría de los números transfinitos de Cantor. Los siguientes son algunos de sus logros: (i) ofreció una definición adecuada de los números ordinales y cardinales (los cuales en la teoría de Zermelo-Fraenkel no pasaban de ser algo periférico), restaurando con ello la teoría de los números transfinitos; (ii) extendió el principio de inducción al sistema de los números ordinales, introduciendo de esa manera la inducción y la recursión transfinitas como métodos de prueba y definición; (iii) impulsó, al igual que Fraenkel, la adopción del axioma de reemplazo; (iv) limitó, mediante el axioma de regularidad, la noción de conjunto a los llamados «conjuntos bien fundados»; y (v) jerarquizó el universo de los conjuntos mediante la introducción de la llamada «jerarquía acumulativa».

La primera aportación de von Neumann en este dominio fue una ingeniosa definición de los números ordinales y cardinales, todo esto en el marco de la teoría intuitiva de conjuntos, pero con la posibilidad de adaptarla a cualquier teoría. Al respecto, dice que de lo que se trata

¹⁹Un *urelemento* es un objeto que, sin ser un conjunto, pertenece a algún conjunto, algo así como la «carita sonriente» \odot en $\{\odot, \{\emptyset\}\}$.

es de «ofrecer una forma concreta e inequívoca a la noción cantoriana de número ordinal». Esto lo logra tomando como números ordinales ciertos conjuntos específicos, los cuales actuarán después como representantes de los distintos tipos de orden, es decir, de las distintas clases de equivalencia de conjuntos bien ordenados.

Comencemos con los ordinales finitos de von Neumann. Son los siguientes (1923):

El primero, el 0, es el conjunto vacío (es decir, $0 = \emptyset$). Los demás ordinales finitos —los «enteros» de von Neumann— se definen o construyen como sigue:

$$1 = \{0\} = \{\emptyset\}; 2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, 3 = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \dots n + 1 = \{0, 1, 2, \dots, n\} \dots$$

Nótese que cada número ordinal finito es el conjunto de los ordinales anteriores a él y que la sucesión formada por ellos se define por recursión.

Estas ideas las extiende más allá de los conjuntos finitos con base en la *recursión transfinita* como sigue (donde las dos primeras cláusulas son repetición de lo anterior):

- El conjunto vacío es el ordinal 0.
- Dado un ordinal α , el *sucesor* de α (i. e., el ordinal $\alpha + 1$) se define como $\alpha \cup \{\alpha\}$.
- Dado un conjunto A de ordinales, $\bigcup_{\alpha \in A} \alpha$ es un ordinal.²⁰

Un ordinal que es sucesor de otro ordinal se dice *ordinal sucesor*, y un ordinal que no es ni el 0 ni un ordinal sucesor se denomina, retomando la terminología de Cantor, *ordinal límite*. Como siempre, el primer ordinal límite es $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$. La clase de todos los ordinales se denota con *Ord*.

En cuanto al orden entre estos números, este se define mediante la pertenencia: $\alpha < \beta$ si y solo si $\alpha \in \beta$. Por ejemplo, dado que $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, $2 < 3$.

Con base en estas definiciones se puede probar que todo número ordinal es un conjunto bien ordenado, de manera que el orden entre ellos satisface las leyes de tricotomía y transitividad, y es asimétrica. Asimismo, se tiene la siguiente propiedad: $\alpha < \beta$ si y solo si $\alpha \subset \beta$. Esto último significa que los ordinales de von Neumann, además de estar ordenados por la pertenencia, también lo están por la contención.

A su vez, el hecho de que los números ordinales estén definidos mediante la relación de pertenencia permite una definición muy simple de los números cardinales: un número ordinal α es un *cardinal* si y solo si α

²⁰La forma de este esquema de definición corresponde al método de definición por recursión transfinita, y los procedimientos utilizados corresponden a los dos principios de formación de Cantor.

no es equipotente con ninguno de sus elementos. Un notable resultado que von Neumann pudo probar es el siguiente:

Dado un conjunto bien ordenado X , existe un único número ordinal α semejante a él (es decir, con el que se puede biyectar conservando el orden). En símbolos: $\forall X \in Bo \exists_1 \alpha \in Ord(X \cong \alpha)$ (von Neumann, 1923).²¹

Un hecho importante es que la prueba formal de este resultado requiere del *axioma de reemplazo*, el cual es independiente de los axiomas de Zermelo. Debido a esto y otras razones, von Neumann se volvió un acérrimo defensor de este principio que podemos enunciar así ([1, p. 22]):

Axioma de reemplazo. *Para cada conjunto A y cada función f de un argumento definida para los elementos de A , existe un conjunto B que contiene a todos los $f(x)$ para $x \in A$.*

En breve: Si el dominio de una función f es un conjunto, su imagen bajo f también es un conjunto.²²

La importancia de este axioma con relación a ZFC la podemos hacer evidente con un ejemplo. Una vez en posesión del conjunto ω de todos los ordinales finitos, cuya existencia se establece con el axioma del conjunto infinito, podemos formar la sucesión $\omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \dots, \omega + n \dots$ y definir el número $\omega + \omega$ como sigue:

$$\omega + \omega = \bigcup_{n \in \omega} \omega + n$$

Ahora bien, aunque la definición anterior parece inobjetable, la existencia de este conjunto no se puede probar con base en los axiomas de Zermelo: nada en esta teoría nos permite reunir a todos los $\omega + n$ en un solo conjunto para después aplicar el axioma de la unión.²³ No obstante, si consideramos la relación $\varphi(x, y) : y = \omega + x$ y tomamos al conjunto A como ω , entonces el axioma de reemplazo de la nota al pie 22 nos permite concluir la existencia de un conjunto B formado por todos los $\omega + n$.

²¹La expresión «Bo» es la utilizada por von Neumann para la clase de los conjuntos bien ordenados. Sirviéndonos de la terminología de Cantor, lo que el teorema dice es que, una vez agrupados los conjuntos bien ordenados en *tipos de orden*, los números ordinales sirven como representantes canónicos de dichos tipos.

²²Una forma de expresar el axioma de reemplazo en un lenguaje de primer orden es la siguiente:

$$\forall x \forall y (\forall z (\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \rightarrow y = z) \rightarrow \forall A \exists B \forall b (b \in B \leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge \varphi(x, b))))$$

En lenguaje llano, si una relación binaria φ es una función, entonces para cada conjunto A existe el conjunto B de sus imágenes bajo φ .

²³Recordemos que para aplicar el axioma de la unión es necesario disponer de un conjunto X cuyos elementos se habrán de unir. Sin embargo, como lo acabamos de decir, en ZC no es posible reunir los $\omega + n$ en una sola agrupación.

Antes de pasar al tema de la jerarquía acumulativa, queremos llamar la atención sobre algunos aspectos de la teoría de von Neumann que, nos parece, esclarecen su visión general del tema.

1) Una característica de la teoría de von Neumann es el uso irrestricto del principio de comprensión, en forma parecida a como este fue utilizado por Frege.²⁴ Tal uso constituye, en su opinión, un rasgo distintivo de la teoría ingenua de conjuntos al que no está dispuesto a renunciar. Esto significa que para von Neumann los objetos propios de la teoría son clases, algunas de las cuales son conjuntos.

2) Von Neumann distingue una categoría especial formada por las clases cuya extensión es máxima. Se refiere a ellas como clases «demasiado grandes» (Gödel las llamaría más tarde «clases propias»). Su rasgo distintivo es que tienen la misma potencia que la *clase de todas las cosas*. Las clases que no son demasiado grandes las llama «conjuntos», y solo estos pueden figurar como elementos de otras clases. Conforme a esta idea, en 1925 presentó un criterio, al que se le llama «axioma de von Neumann», que podemos formular así:

Axioma N. *Una clase C no es un conjunto si y solo si hay una función F que mapea a C sobre la clase V de todos los conjuntos.*

Como podemos ver, la noción que ofrece von Neumann de lo que es un conjunto se apoya en la idea de «limitación del tamaño». Al respecto pone como regla que solo los conjuntos pueden figurar como elementos de otros conjuntos, mientras que las clases propiamente dichas no lo pueden hacer. En su opinión, esto basta para evitar las paradojas. Así, en la teoría de von Neumann todos los conjuntos son clases, pero no todas las clases son conjuntos.²⁵

3) Con base en el Axioma N von Neumann deriva el axioma de separación, el axioma de reemplazo y prueba el teorema del buen orden en una versión todavía más fuerte: *La clase V de todos los conjuntos se puede bien ordenar* (1928). Asimismo, a partir de él obtiene una función de elección global F con la propiedad de que para todo conjunto no vacío A , $F(A) \in A$. Con ello tiene a la mano el axioma de elección.

4) En el sistema de von Neumann no hay *urelementos*. Lo único que hay son conjuntos «puros» y clases. Asimismo, no hay sucesiones

²⁴A grandes rasgos, Frege se sirve del siguiente principio: *Toda función proposicional $\alpha(x)$ determina una clase $\hat{x}\alpha(x)$ que es su extensión, es decir, tal que $y \in \hat{x}\alpha(x) \Leftrightarrow \alpha(y)$* . Sirviéndonos de un lenguaje formal para la teoría de von Neumann, el principio del que se sirve lo podemos expresar en parte como sigue: *Para toda fórmula $\alpha(x)$, existe una clase C tal que $\forall x(x \in C \leftrightarrow \alpha(x))$* .

²⁵En la teoría de von Neumann nada impide formar, por ejemplo, la clase de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos ([25]). No obstante, si $R = \{x \mid x \notin x\}$, la cuestión de si $R \in R$ o $R \notin R$ no tiene sentido en la teoría, pues R no es un conjunto.

infinitas de conjuntos $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ con la propiedad de que $x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni \dots \ni x_n \ni x_{n+1} \dots$.²⁶ Para ello, von Neumann introdujo un axioma llamado *de regularidad* o *buena fundación*, el cual, en su versión moderna, se formula como sigue:

Axioma de regularidad. $\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$

Este axioma impide la existencia de conjuntos x tales que $x \in x$, de conjuntos x, z tales que $x \in z$ y $z \in x$, y de sucesiones $\{x_k\}_{k \in \omega}$ como la recién señalada (dejamos al lector probar todo lo anterior). Al respecto, en ZF estas cuestiones no estaban resueltas, pudiéndose admitir conjuntos no bien fundados o cuyos elementos son urelementos.²⁷

La idea de restringir el universo de los conjuntos a conjuntos bien fundados se halla presente en Fraenkel (1922), Skolem (1923) y von Neumann (1925). El siguiente paso en esta dirección lo dio von Neumann en 1929 con la introducción de la llamada jerarquía acumulativa, en la que los conjuntos se forman y clasifican siguiendo un proceso gradual, dando lugar de esta manera a una especie de pirámide invertida en cuya «cúspide» (ahora convertida en la parte más baja de la jerarquía) se halla el conjunto vacío.

La jerarquía acumulativa de von Neumann

Al examinar la teoría de Zermelo resulta evidente que su orientación es más general que la de Cantor, pues su propósito era desarrollar una disciplina encauzada hacia algo más que a la teoría de los números transfinitos. Este cambio en el enfoque contribuyó a la disminución del interés en dicho tema. Esto no fue del agrado de von Neumann, quien decidió restituir la teoría de Cantor en un nuevo contexto: lo que se conocería como *jerarquía acumulativa*. Kanamori ve en ello una especie de contrarreforma: había que reconstruir los números transfinitos, centrales para Cantor y periféricos en la teoría de Zermelo, como auténticos conjuntos; había, además, que establecer su eficacia mediante la formalización de la recursión transfinita.²⁸ De esta manera von Neumann se

²⁶A los conjuntos de este tipo se les llama «no bien fundados».

²⁷El lector notará que no hemos elaborado una lista con los axiomas de von Neumann para la teoría de conjuntos. Esto obedece a las siguientes razones. Primero, a que la axiomática de von Neumann jamás gozó de gran popularidad (en parte, porque en vez de utilizar la noción de conjunto, utilizó la noción de función); segundo, a que años después, a partir de 1937, Paul Bernays reformuló la teoría (con distintas mejoras) en un lenguaje mucho más cercano al de ZFC, lo cual después fue modificado por Gödel en 1940 dando lugar a lo que ahora se conoce como *teoría de von Neumann-Bernays-Gödel* (NBG, o NBGC según se incluya o no el axioma de elección). Este sistema se puede ver como una extensión conservativa de ZF respecto a las fórmulas que hablan de conjuntos, y es consistente si y solo si ZF (o ZFC) lo es.

²⁸V. [20, p. 15-16].

distanció de la idea de una teoría demasiado general, prefiriendo un sistema en el que todos los objetos serían conjuntos y estarían dispuestos en rangos.

Como resultado, en 1929 introdujo un universo inspirado en la *concepción iterativa* de los conjuntos. Según esta, los conjuntos se han de construir *iterando* un mismo procedimiento a partir de ciertos elementos dados. Esto se relaciona con la idea de que los conjuntos, salvo los iniciales, están formados por otros conjuntos previamente establecidos. Al respecto von Neumann eligió como elemento inicial al conjunto vacío, y tres procedimientos básicos: la unión de conjuntos, la aplicación del operador *conjunto potencia* y la inducción transfinita. Con ello logró un viejo anhelo: jerarquizar el universo de los conjuntos en una serie de estratos V_α , donde α varía sobre los números ordinales, en los que estos objetos se van acumulando.

La jerarquía se define como sigue:

$$V_0 = \emptyset;$$

$$V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup P(V_\alpha), \alpha \in Ord;$$

$$V_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} V_\alpha, \text{ cuando } \lambda \text{ es un ordinal límite.}$$

$$\text{Finalmente, } V = \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha.$$

Como se puede ver, aquí también los procedimientos utilizados corresponden a los dos principios de formación de Cantor.

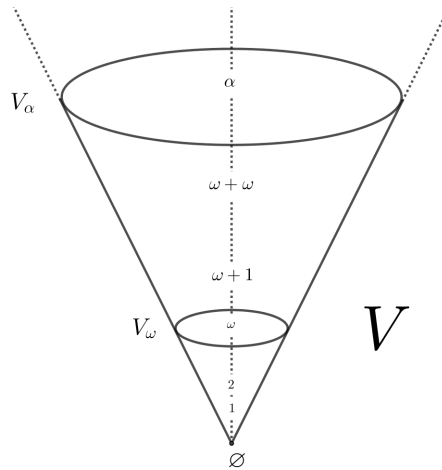


Figura 1. Representación gráfica de la jerarquía acumulativa V .

En la figura 1, los óvalos representan algunos estratos de la jerarquía. V_ω es el primer nivel transfinito, es decir, con un número infinito de elementos; en él están todos los enteros de von Neumann. Le siguen una infinidad de niveles V_α , uno para cada ordinal transfinito $\alpha > \omega$.

La jerarquía no tiene un límite superior. La línea central representa la sucesión de ordinales, la cual avanza con cada estrato. En general, el ordinal α aparece en el estrato $V_{\alpha+1}$. En la base se halla el punto de inicio: el conjunto vacío. La velocidad de crecimiento de los estratos finitos es apresurada: el $n + 1$ tiene 2^k elementos, donde $k = \text{card}(V_n)$. Esto da lugar a los siguientes valores: 0, 1, 2, 4, 16, 65536, ... (Nota. Sería difícil escribir el siguiente número, pues en base 10 se requieren 19, 564 dígitos).

A V se le llama *universo de von Neumann*. Se trata de una clase propia formada por conjuntos bien fundados, los cuales componen una escala de conjuntos $V_0, V_1, \dots, V_\omega, \dots, V_\alpha \dots$ indexada por los números ordinales. También se le conoce bajo el nombre de *jerarquía acumulativa* de von Neumann. Al respecto, queremos hacer tres comentarios:

1) La jerarquía acumulativa requiere para su edificación de un número muy limitado de recursos: el conjunto vacío, el sistema de los números ordinales, el axioma de la unión, la operación de conjunto potencia y el teorema de recursión transfinita (el cual da validez a las pruebas y definiciones por inducción y recursión transfinita). Esto permite su construcción al interior de muchas teorías que cuentan con tales recursos: ZF, ZFC, von Neumann, von Neumann-Bernays-Gödel, Morse-Kelley, etc.

2) En particular tenemos los siguientes resultados, expuestos por Paul Cohen: i) si se omite el axioma del infinito en ZF, entonces V_ω (el primer estrato infinito, cuyos elementos son todos conjuntos finitos) es un modelo de la teoría resultante ([6, p. 54]), ii) Si κ es un cardinal inaccesible, entonces V_κ es un modelo de ZFC ([6, p. 80]).²⁹

3) La jerarquía incluye al conjunto de los ordinales finitos de von Neumann. Bien entendido, esto significa que tenemos dentro de ella un modelo de los axiomas de Peano. Esto muestra la posibilidad de construir el sistema de los números naturales sin recurrir a nada que no sean conjuntos, lo cual no deja de ser sorprendente.

Si bien la jerarquía acumulativa de von Neumann ofrece una idea más precisa del universo de los conjuntos, no insistiremos en ella. Esto se debe a que nuestro interés sigue siendo el problema del continuo, y esta estructura tiene poco que ofrecer al respecto.

En efecto, ¿acaso la jerarquía de von Neumann encierra una respuesta a la pregunta por la cardinalidad del continuo? Con lo que hemos visto hasta ahora tal parece que no. Al respecto, lo único que nos deja ver es que $\text{card}(V_\omega) = \aleph_0$ y que $P(\omega) \in V_{\omega+2}$, pero nada más.

²⁹Un cardinal infinito κ es *inaccesible* si no es posible obtenerlo a partir de cardinales menores que él mediante las operaciones usuales de la aritmética cardinal, es decir, si no es la suma de menos de κ cardinales menores que él y para todo $\alpha < \kappa, 2^\alpha < \kappa$.

Veamos el problema desde la perspectiva de ZF, teoría en la que es posible construir el universo de von Neumann. Un primer examen, aunque somero, nos hace pensar que los axiomas de ZF no ofrecen suficiente información en cuanto a la cardinalidad de los conjuntos. Por ejemplo, el axioma del conjunto potencia nos dice que para cada conjunto X , hay un conjunto $P(X)$ formado por todos los subconjuntos de X ; pero, ¿acaso la teoría nos permite determinar la existencia de un conjunto $Y \in V_{\omega+2}$ tal que $\aleph_0 < \text{card}(Y) < \text{card}(P(\omega))$?

Con justa razón, algunos matemáticos (Zermelo entre ellos) llegaron a sospechar que la hipótesis del continuo no se podía resolver con base en ZFC, es decir, que era indecidible en esa teoría. Ante tal posibilidad había dos formas de proceder complementarias: por una parte, extender la teoría con nuevos axiomas que proporcionaran más información acerca de los subconjuntos de un conjunto dado; por la otra, explorar los modelos de ZF, tratando de determinar localmente el cardinal del correspondiente conjunto de números reales.

Uno de los primeros en acometer estas tareas fue Gödel, quien exploró la cuestión en lo que constituye un refinamiento del universo de von Neumann. Lo que hizo fue armar un modelo de ZF en el que pudo determinar localmente la cardinalidad del conjunto de los números reales. Esto lo consiguió mediante un refinamiento de la jerarquía acumulativa, estableciendo un riguroso control sobre la forma de generar nuevos conjuntos. El propósito era muy claro: obtener un modelo de ZF tan «pequeño» como fuera posible, con la esperanza de que en ese modelo el cardinal del conjunto de los números reales fuera el conjeturado por Cantor: ω_1 (i. e., \aleph_1). De esta y otras cosas nos ocuparemos en el siguiente apartado.

El universo constructible de Gödel

La prueba de Gödel acerca de la consistencia de la hipótesis del Continuo significó un enorme avance para la teoría de conjuntos. En su momento no solo ayudó a esclarecer el problema planteado por Cantor, sino que al hacerlo introdujo diversas nociones y técnicas inéditas, de su creación, las cuales pasaron a formar parte del acervo de la teoría de conjuntos.

Grosso modo, lo que Gödel hizo fue construir una jerarquía similar a la de von Neumann, pero con restricciones, la cual resultó ser un modelo de ZF. El caso es que en dicho modelo el conjunto de los números reales se puede enumerar utilizando como índices a los ordinales numerables. Eso equivale a asignarle el número \aleph_1 como su cardinal en el modelo.

Con ello dejó ver que la hipótesis del continuo CH es consistente con los axiomas de ZF, es decir, que se pueden satisfacer a la vez.³⁰

Si denotamos con L al modelo construido por Gödel, podemos decir que la suya es una prueba de consistencia relativa del tipo $L \models \text{ZF}$.³¹ Dicho modelo tiene el atributo de que en él se cumplen la igualdad $2^\omega = \omega_1$ y el axioma de elección, denotado AC por sus siglas en inglés, el cual no se utiliza en la construcción del modelo:

$$L \models 2^\omega = \omega_1 \text{ y } L \models \text{AC}$$

De esta manera, con la construcción de L Gödel resolvió una cuestión que se venía discutiendo desde la formulación de ZFC: ¿sería compatible el axioma de elección con los axiomas de ZF?

L es lo que se llama un *modelo interno* de ZF. Por tal cosa se entiende una colección M que es parte del universo V de von Neumann, es transitiva, contiene a todos los ordinales y satisface los axiomas de ZF cuando la cuantificación se restringe a conjuntos pertenecientes a M (relativización).³² A L se le llama *universo constructible de Gödel*. En general, todo lo que es cierto en un modelo interno, es consistente con ZF.

Para no dejar al lector con demasiadas dudas (o para sembrar más dudas en él), señalamos con brevedad los pasos esenciales de la prueba de la consistencia de CH con ZF, sirviéndonos en parte de la terminología actual.³³

Paso 1 Definición de L

Al igual que V , el universo constructible L se define por recursión sobre los números ordinales. Una diferencia es que en L el procedimiento para obtener el siguiente nivel no consiste en añadir todos los subconjuntos del último nivel alcanzado (como en V), sino que, en vez

³⁰La base de todo esto es una cuestión lógica bien conocida: Si T es una teoría que tiene un modelo M y M satisface una cierta fórmula φ , entonces T no puede refutar a φ (i. e., no puede probar a $\neg\varphi$). Otra manera de decir lo anterior es que la existencia de M deja ver que φ es compatible con T , i. e., que $T \cup \{\varphi\}$ es consistente. Así, mostrando un modelo de tal naturaleza para ZF y CH, Gödel probaría la coherencia de CH con ZF, es decir, probaría que ZF no la puede contradecir.

³¹Esta es la primera vez que utilizamos el símbolo de satisfacción de Tarski, lo cual merece un comentario. La expresión $L \models \text{ZF}$ se lee «los axiomas (y, por ende, los teoremas) de ZF son verdaderos con relación a L » (i. e., al interpretar las fórmulas de ZF como referidas a L , todo lo que «dicen» es cierto). Tarski introdujo este símbolo en el contexto de su *teoría semántica de la verdad*, cuyo propósito era ofrecer, con referencia a un lenguaje formal dado y una interpretación del mismo, una definición adecuada de la expresión *fórmula verdadera*. Se trata de un concepto central de la teoría de modelos. Para nuestros fines es suficiente con que el lector esté familiarizado con la definición que ofrece Mendelson en ([23, §2.2]).

³²Una propiedad P se relativiza a un conjunto M reemplazando en la definición de P cada cuantificador $\exists x\varphi$ por $\exists x(x \in M \wedge \varphi)$ y cada cuantificador $\forall x\varphi$ por $\forall x(x \in M \rightarrow \varphi)$. La propiedad relativizada se denota con P^M .

³³La prueba de consistencia para CH se puede llevar a cabo con diversos sistemas para la teoría de conjuntos. Nosotros supondremos que se trata de ZF.

de ello, solo se incorporan aquellos conjuntos que se pueden *definir* en el sentido que a continuación se indica.

Dado un conjunto X , $Def(X)$ denota al conjunto de todos los subconjuntos de X *definibles* en la estructura $\langle X, \in \rangle$.³⁴ Con esta notación, la jerarquía constructible de Gödel se define por recursión sobre los ordinales como sigue:

$$\begin{aligned} L_0 &= \emptyset; \\ L_{\alpha+1} &= L_\alpha \cup Def(L_\alpha), \alpha \in Ord; \\ L_\lambda &= \bigcup_{\alpha < \lambda} L_\alpha, \text{ cuando } \lambda \text{ es un ordinal límite.} \\ \text{Finalmente, } L &= \bigcup_{\alpha \in Ord} L_\alpha. \end{aligned}$$

Por definición, un conjunto X es *constructible* si y solo si $X \in L$.³⁵ El axioma que establece que todos los conjuntos son constructibles se denota con « $V = L$ » y se llama *axioma de constructibilidad*. Lo podemos escribir así: $\forall x(x \in L)$. Lo anterior es posible en virtud de que la clase L se puede definir en \mathcal{L}_{ZF} , lo cual exige formalizar en dicho lenguaje las nociones de *definibilidad* y *ser constructible* (es decir, los predicados « x es *definible*» y « x es *constructible*»). Para esto Gödel debió expresar en dicho lenguaje la noción metamatemática de *satisfacción* de Tarski. Él ya había realizado algo semejante en la demostración de sus teoremas de incompletitud de 1931, con la diferencia de que en aquella ocasión lo que formalizó fue una noción sintáctica, la de *prueba*, mientras que ahora se trataba de una noción semántica.

En cuanto a L , hay que tener presente que se trata de una clase propia y no de un conjunto, aunque cada L_α es un conjunto.

Los siguientes son algunos resultados relativos a L (v. [8, cap. II]):

1. $\alpha \leq \beta$ implica $L_\alpha \subseteq L_\beta$.
2. Cada L_α es transitivo (y, por lo tanto, L es transitiva).
3. para todo α , $L_\alpha \subseteq V_\alpha$.
4. $\alpha < \beta$ implica $\alpha \in L_\beta$ y $L_\alpha \in L_\beta$ (y, por lo tanto, $Ord \subseteq L$)
5. para todo α , $L \cap \alpha = L_\alpha \cap Ord = \alpha$.
6. Para todo $\alpha \leq \omega$, $L_\alpha = V_\alpha$ (L y V coinciden hasta el nivel ω).
7. para todo $\alpha \geq \omega$, $|L_\alpha| = |\alpha|$.

³⁴Decimos que $Y \subseteq X$ es *definible* en $\langle X, \in \rangle$ cuando existen una fórmula $\varphi(x, z_1, \dots, z_n)$ en \mathcal{L}_{ZF} con $n+1$ variables libres y $(b_1, \dots, b_n) \in X^n$ tales que $Y = \{a \in X \mid \langle X, \in \rangle \models \varphi[a, b_1, \dots, b_n]\}$. En lo anterior los corchetes sirven para indicar que al evaluar las variables x, z_1, \dots, z_n en a, b_1, \dots, b_n la fórmula se satisface. Alternativamente, \mathcal{L}_{ZF} se puede extender mediante la adición de una constante individual k_b para cada $b \in X$, de modo que la expresión $\varphi(k_a, k_{b_1}, \dots, k_{b_n})$ sería una fórmula del lenguaje extendido, en cuyo caso diríamos que $\langle X, \in \rangle \models \varphi(k_a, k_{b_1}, \dots, k_{b_n})$. Hacer esto último facilita el uso del teorema de Löwenheim-Skolem.

³⁵Nótese que, a diferencia de von Neumann y Zermelo-Fraenkel, Gödel no toma como básico el operador *conjunto potencia* P (llamado «no restringido»), sino que solo admite como miembros de $L_{\alpha+1}$ aquellos subconjuntos de L_α que son *definibles* en $\langle L_\alpha, \in \rangle$.

Paso 2 L es un modelo de ZF.

Por su misma construcción, cada L_α es un conjunto transitivo (en el sentido de que si $x \in y$ y $y \in z$, entonces $x \in z$), lo cual implica que L también es transitivo. Además, L contiene a todos los ordinales (en el sentido de que estos son definibles). Esto último, junto con el hecho de que L es cerrado respecto a ZF (por lo pronto, en el vago sentido de que todo conjunto cuya existencia afirman los axiomas de ZF y cuyos elementos se hallan en L , también se halla en L), es suficiente para mostrar que L es un modelo interno de ZF. Es más, se puede probar que L es el menor de todos los modelos internos de ZF (cosa que Gödel sabía).

Probar que los axiomas de ZF son verdaderos en L equivale a probar, en términos generales, que si en algún axioma de ZF se afirma la existencia de un conjunto con una propiedad P , entonces en L hay un conjunto que tiene la propiedad relativizada P^L . En cuanto al axioma de separación, este se verifica probando que si el conjunto del que se toman los elementos se halla en el nivel L_α , entonces el conjunto cuya existencia se afirma en el axioma se halla en el siguiente nivel $L_{\alpha+1}$.

La prueba moderna de esto último se basa en un resultado conocido como *principio de reflexión de Montague-Levy*. Con relación al universo constructible, este afirma que cualquier enunciado perteneciente al lenguaje de ZF que sea verdadero en V (el universo de von Neumann) será cierto en algún nivel de L . Es más, el principio indica el nivel α en el que eso sucede. Gödel no disponía de este resultado (el cual fue formulado en los años 60), pero en su prueba usó un argumento similar al que se utiliza en la prueba del mismo. La importancia de este principio radica en que nos hace ver que cualquier verdad relativa a la jerarquía acumulativa V se «refleja» en algún segmento inicial L_α del universo constructible L , es decir, será cierta también respecto a un conjunto que en eso se asemeja (*refleja*) a V .

Paso 3 La definición de L es *absoluta*.

¿Qué sucede cuando la noción de *conjunto constructible* se relativiza a L mismo? La cuestión pareciera dar lugar a una sucesión de clases: la clase de los conjuntos constructibles (es decir, L), la clase de los conjuntos constructibles en L , la clase de los conjuntos constructibles en la clase de los conjuntos constructibles en L , etc. No obstante, lo que sucede es muy simple: los conjuntos constructibles son, por decirlo de alguna manera, invariantes, es decir, la noción no cambia cuando se le relativiza a L .

En otras palabras, los conjuntos constructibles en L son los conjuntos constructibles en general: al relativizar la noción de constructibilidad a L , lo que resulta es L mismo. En símbolos: $Def(L) = L$. Y esto se repite: $Def(Def(L)) = L$, etc. De lo anterior se sigue que en L se cumple la propiedad de que *todo conjunto es constructible*, de modo que $L \models (V = L)$.

Es más, el resultado anterior es de validez general: al relativizar la noción de conjunto constructible a cualquier modelo interno M de ZF, lo que resulta es L . Dicho de otra manera, en todo modelo interno M de ZF, $Def(M) = L$. Esto se debe a lo siguiente:

$$\begin{aligned} (x \text{ es constructible})^M &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \alpha (x \in L_\alpha^m) \\ &\stackrel{**}{\Leftrightarrow} \exists \alpha (x \in L_\alpha) \\ &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{es constructible.} \end{aligned}$$

El paso decisivo en las equivalencias anteriores es el marcado con dos estrellas. Sin entrar en detalles diremos que esto es así porque la función $\alpha \mapsto L_\alpha$ es *absoluta*, donde por «absoluta» se entiende que la función da los mismos resultados respecto a cualquier modelo interno M : para todo α , el conjunto L_α^m de conjuntos constructibles con relación a M es, como ya lo hemos dicho, igual a L_α .

De la misma manera, una propiedad $P(x)$ se dice que es *absoluta* cuando tiene el mismo valor de verdad en todos los modelos internos de ZF, es decir, cuando para todo modelo interno M y todo $x \in M$, $P(x) \leftrightarrow P^M(x)$. Una manera de expresar esto es la siguiente: para todo x en M , el valor de verdad del predicado $P(x)$ es el mismo respecto a M que en general.³⁶

En particular, repetimos, L es absoluto: para todo modelo interno M de ZF, $L^M = L$.

De esto, y del hecho de que el axioma de constructibilidad se satisface cuando se relativiza a L , es decir, que $ZF \vdash (V = L)^L$, se sigue que el axioma $V = L$ es consistente con ZF.³⁷

Paso 4 CH y AC son válidos en L .

Finalmente, Gödel debió probar que CH y AC se siguen de $ZF + (V = L)$.

En lo que respecta a CH, la prueba se reduce a probar que cada número real figura en algún nivel numerable de la jerarquía L . Dado

³⁶El lector interesado en la prueba de todo esto podrá consultar el texto ([27]).

³⁷A diferencia del símbolo \models , el símbolo \vdash en $ZF \vdash (V = L)^L$ significa que la fórmula $(V = L)^L$ es un teorema de ZF, es decir, que se deriva formalmente de los axiomas de esta teoría.

que un nivel es numerable cuando su índice es un ordinal numerable, (pues solo hay un número numerable de fórmulas posibles), y dado que el número de niveles numerables es ω_1 , debe haber solo ω_1 números reales.

¿Cómo probó Gödel que cada número real queda construido en algún nivel numerable de la jerarquía L ? Lo hizo con base en el siguiente resultado de su creación, dado a conocer en 1939. Se le conoce como *lema de condensación* de Gödel: *Cualquier subconjunto de L_{ω_α} que es un elemento de L_β para algún ordinal β , es un elemento de $L_{\omega_{\alpha+1}}$.*³⁸

Para aplicar el lema en el caso de los números reales debemos tener presente que en L estos objetos se interpretan como conjuntos de números naturales (esto en virtud de que \mathbb{R} y $P(\mathbb{N})$ son biyectables entre sí).

Supongamos ahora que r es un número real (entendido como un conjunto de números naturales) que pertenece a algún nivel L_{ω_α} . Dado que $r \subseteq \omega$, r es un subconjunto de L_ω , pues en L_ω se hallan todos los ordinales finitos que, como ya lo hemos señalado, se identifican los números naturales. En símbolos, $r \subset L_\omega = L_{\omega_0}$. Por el lema de condensación concluimos que $r \in L_{\omega_1}$, que es lo que se quería probar.³⁹

En cuanto al axioma de elección, Gödel exhibe una fórmula $\varphi(x, y)$ de \mathcal{L}_{ZF} que define un buen orden entre los elementos de L . Dicha fórmula es tediosa de escribir pero la idea es simple: un conjunto $x \in L_\alpha$ precede a un conjunto $z \in L_\beta$ en el orden $\Leftrightarrow \alpha < \beta$; y si $\alpha = \beta$, la precedencia entre dos conjuntos x y z se determina conforme a un buen orden previamente establecido entre las fórmulas que los definen. ¡Ah! y si x y z están definidos por una misma fórmula, el criterio es que los parámetros que figuran en la definición de x se hallen en L antes que los parámetros de z . Este buen orden muestra que en L se cumple AC (recordemos que desde Zermelo se sabe que el axioma de elección y el principio del buen orden son equivalentes).

No pretendemos probar aquí nada de lo anterior, ni proceder con mayor rigor. Nuestro propósito ha sido indicar ciertos problemas que Gödel debió enfrentar en su prueba, presentar algunas cosas que debió demostrar (y que pasaron a formar parte de la teoría de modelos), señalar diversas técnicas que introdujo y ciertos resultados a los que

³⁸([14, p. 27]). Este resultado se le ocurrió a Gödel como una generalización del método de Skolem para construir modelos numerables (v. el *teorema de Löwenheim-Skolem* en ([9, p. 151])).

³⁹En la actualidad este resultado suele probarse con base en una versión más refinada del lema de condensación, conocida bajo el mismo nombre: *Si N es una colección de conjuntos tal que la estructura $\langle N, \in \rangle$ es una subestructura elemental de algún $\langle L_\alpha, \in \rangle$, entonces para algún ordinal $\beta \leq \alpha$, $\langle N, \in \rangle \simeq \langle L_\beta, \in \rangle$ (i.e., $\langle N, \in \rangle$ es isomorfa a algún nivel de la jerarquía de Gödel anterior a $L_{\alpha+1}$). Que $\langle N, \in \rangle$ sea una subestructura elemental de $\langle L_\alpha, \in \rangle$ significa que satisface los mismos enunciados de \mathcal{L}_{ZF} que $\langle L_\alpha, \in \rangle$ y que $N \subseteq L_\alpha$. Tales pruebas suelen servirse de dos resultados que aquí solo mencionamos: el *Teorema descendente de Löwenheim-Skolem* y el *Teorema del colapso transitivo* de Mostowski-Shepherdson (v. [23, p. 128] y [8, p. 22]).*

todo esto dio lugar. Al respecto, el lector hallará mucha información en la bibliografía.

La hipótesis generalizada del continuo

En esta sección esbozamos la prueba de consistencia relativa de GCH con ZF que ofrecen Smullyan y Fitting [26]. En ella sus autores se sirven del lema de condensación de Gödel en su versión original de 1939. Al respecto, una cuestión que debemos tener en mente es que en L todo L_α infinito tiene la misma cardinalidad que α , es decir, que para todo $\alpha \geq \omega$, $|L_\alpha| = |\alpha|$ ([8, cap. II]). Ergo si $A \subseteq L_\alpha$, $|A| \leq |L_\alpha| = |\alpha|$.

Sea κ un cardinal transfinito y denotemos con κ^+ el cardinal sucesor de κ . Lo que GCH afirma es que si $\kappa = \aleph_\alpha$ para algún α , entonces $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} = \kappa^+$. Ahora bien, por el teorema de Cantor sabemos que para todo κ infinito, $\kappa^+ \leq |P(\kappa)|$, de modo que GCH equivale a la afirmación de que para todo κ infinito, $|P(\kappa)| \leq \kappa^+$. Esto señala la estrategia a seguir: probar que si todos los conjuntos son constructibles, como en L , entonces para todo κ , el número de subconjuntos constructibles de κ es a lo más κ^+ (es decir, que GCH es verdadera).

Lo anterior se puede probar con base en el lema de condensación de Gödel, pues de él se sigue que todo subconjunto constructible de L_κ es un elemento de L_{κ^+} , y como el número de elementos de L_{κ^+} es κ^+ , se tiene que $|P(\kappa)| \leq \kappa^+$.

Por lo tanto, lo que Smullyan y Fitting tienen que hacer es probar el lema de condensación de Gödel. Para ello se sirven de un teorema que ahí mismo presentan, el cual sintetiza dos resultados propios de la teoría de modelos: el teorema del mapeo de Mostowski-Shepherdson y un teorema de reflexión debido a Tarski y Vaught (v. [26, caps. 10 y 11]). Tomando las letras iniciales de los nombres de estos cuatro académicos, Smullyan y Fitting denominan a dicho resultado M.S.T.V.

Teorema 1 (Teorema M.S.T.V.). *Sea K una clase extensional y bien fundada que se puede bien ordenar, y sea φ un enunciado puro de L_{ZF} que es verdadera respecto a K . En tal caso cualquier subconjunto infinito A de K es subconjunto de algún conjunto transitivo T con la misma cardinalidad que A , y tal que φ es verdadero para T .*

Veamos cómo se sirven Smullyan y Fitting de este teorema para probar el lema de condensación de Gödel, y con ello la consistencia de GCH con ZF.⁴⁰

⁴⁰En la prueba, Smullyan y Fitting se apoyan en un resultado que demuestran en el capítulo 14 de su libro como **Teorema 5.4**: *Si T es una clase transitiva y $T \models V = L$, entonces cada elemento x de T es constructible y su orden se halla en T . [Nota: el orden de un conjunto constructible x es el menor ordinal α tal que $x \in L_{\alpha+1}$.]*

En el teorema M.S.T.V. tómesese a L como la clase K , y el enunciado $\forall x(x \in L)$ como el enunciado φ . Esto es posible en virtud de que L satisface todas las condiciones impuestas a K (es extensional, bien fundada y se puede bien ordenar), y el enunciado $\forall x(x \in L)$ (es decir, el axioma de constructibilidad $V = L$) es verdadero en L .

Sea κ un cardinal transfinito y A un subconjunto constructible de L_κ . El conjunto $\kappa \cup \{A\}$ tiene cardinalidad κ y es transitivo, pues $A \subseteq \kappa$. De lo anterior se sigue, por el teorema M.S.T.V., que $L_\kappa \cup \{A\}$ es subconjunto de un conjunto transitivo T de cardinalidad κ tal que $V = L$ se cumple en T . Dado que $A \in T$, por el teorema 5.4 de Smullyan Fitting sabemos que el orden α de A se halla en T . Pero T es transitivo, de modo que $\alpha \subseteq T$. Pero entonces, dado que T tiene cardinalidad κ , la cardinalidad de α es menor o igual que κ . De lo anterior se sigue que $\alpha < \kappa^+$, de modo que $A \in L_{\kappa^+}$. Ergo el lema de condensación de Gödel es válido para L .

Esto concluye la prueba de consistencia relativa de la hipótesis generalizada del continuo respecto a ZF.

Concluimos este ensayo con una observación: la técnica utilizada por Gödel para probar la consistencia de la hipótesis del continuo y el axioma de elección con ZF tiene limitaciones en cuanto a su alcance, y no se puede utilizar con relación a las negaciones de CH y AC. La cuestión es que el método utilizado, el de los modelos internos, no permite construir modelos en los que haya conjuntos arbitrariamente grandes (v. gr., no permite construir un modelo interno de ZF en el que el cardinal del continuo sea mayor que \aleph_1), de modo que la consistencia relativa de $\neg\text{CH}$ y $\neg\text{AC}$ con ZF no se puede establecer mediante esta clase de modelos, pues en ellos siempre se cumplen CH y AC. Este impedimento obligó a superar el marco teórico utilizado por Gödel, a ampliar el horizonte, a seguir otros caminos.

Bibliografía

- [1] P. Bernays, *Axiomatic Set Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958.
- [2] G. Cantor, «On a property of the set of real algebraic numbers», *Ewald*, 1874, 839–842.
- [3] ———, «Foundations of a general theory of manifolds: a mathematico-philosophical investigation into the theory of the infinite», *Ewald*, 1883, 878–919.
- [4] ———, «On an elementary question in the theory of manifolds», *Ewald*, 1891, 920–922.
- [5] ———, «Beirtrage zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (II)», *Mathematische Annalen*, vol. xlix, 1897, 207–246, Traducido al inglés como *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Nueva York, Dover Publications, Inc., 1955. & Nota. En (*Ewald*, 1996, vol. 2) se halla parte de la correspondencia de Cantor con Dedekind y Hilbert.

- [6] P. J. Cohen, *Axiomatic Set Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1966.
- [7] J. W. Dauben, *The battle for cantor set theory*, CMS Books in Mathematics, Springer, New York, NY., 1979, https://doi.org/10.1007/0-387-28272-6_10.
- [8] K. J. Devlin, *Constructibility*, ASL & Cambridge University Press, Cambridge., 2016.
- [9] H. B. Enderton, *A mathematical introduction to logic*, Harcourt / Academic Press, USA, 1972.
- [10] W. B. Ewald, *from kant to hilbert: A source book in the foundations of mathematics*, vol. I y II, Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [11] S. Feferman, J. W. Dawson Jr., G. H. Moore, R. M. Solovay y J. van Heijenoort, eds., *Collected Works, vol. I: publications 1929-1936*, Oxford University Press, Nueva York y Oxford, 1986.
- [12] S. Feferman, J. W. Dawson Jr., G. H. Moore, R. M. Solovay y J. van Heijenoort, eds., *Collected Works, vol. II: publications 1938-1974*, Oxford University Press, Nueva York y Oxford, 1990.
- [13] S. Feferman, J. W. Dawson Jr., G. H. Moore, R. M. Solovay y J. van Heijenoort, eds., *Collected works, vol. iii: Unpublished essays and lectures*, Oxford University Press, Nueva York y Oxford, 1995.
- [14] K. Gödel, «What is Cantor's continuum problem?», *Gödel*, 1990, 176–187.
- [15] M. Hallet, «Introductory note to 1904 and 1908a v. zermelo, 2010», 2013, 80–114.
- [16] _____, «Zermelo's Axiomatization of Set Theory», 2016, Disponible en línea: <https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/zermelo-set-theory>.
- [17] D. Hilbert, *Acerca del infinito*, 2.^a ed., Fundamentos de las matemáticas (recopilación), Colección MATHEMA, Facultad de Ciencias, UNAM, 2011.
- [18] K. Hrbacek y T. Jech, *Introduction to Set Theory*, Marcel Dekker Inc., New York Bassel, 1999.
- [19] T. Jech, *Set Theory*, 3.^a ed., Springer, 2006.
- [20] A. Kanamori, «The mathematical development of set theory from Cantor con Cohen», *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 2, 1996, 1–71, <https://doi.org/10.2307/421046>.
- [21] J. Kennedy, «Kurt Gödel», en *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, ed. Edward N. Zalta, Metaphysics Research Lab, Stanford University, Winter 2020.^a ed., 2020.
- [22] S. Lavine, *Understanding the Infinite*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1998.
- [23] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, 6.^a ed., CRC Press, Taylor & Francis Group, USA, 2015.
- [24] Y. Rav, «Why do we prove theorems?», *Philosophia Mathematica*, vol. 7, núm. 3, 1999, 5–41.
- [25] B. Russell, *The principles of Mathematics*, 2.^a ed., Cambridge University Press, Londres, 1937, 1903, Traducción al español de Juan Carlos Grimberg, *Los principios de las matemáticas*, Espasa Calpe S. A., Madrid, 1967.
- [26] R. Smullyan y M. Fitting, *Set Theory and the Continuum Problem*, Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [27] R. Tao, «Gödel's Constructible Universe», 2020, Tesis de grado, McGill University, 2020. Disponible en línea: <http://www.math.mcgill.ca/gams/drp/papers/2020Winter.Tao.pdf>.
- [28] J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel, a Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1967.
- [29] J. von Neumann, *Collected Works, Vol. I Logic, Theory of Sets and Quantum Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 1961.
- [30] E. Zermelo, «Proof that every set can be well-ordered», 1904, Carta a David Hilbert traducida al inglés y reproducida en Heijenoorth, 1967, pp. 139-141.
- [31] _____, «A new proof of the possibility of a well-ordering», 1908, v. van Heijenoort 1967, pp. 183-198.

- [32] ———, «Investigations in the foundations of set theory i», 1908a, v. (van Heijenoort 1967, pp. 200-215.
- [33] ———, «Ernst Zermelo Collected Works, Vol. I Set Theory», 2010.