

Cuando los vikingos llegaron a Marte

Abimael Bengochea
Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México
abimael.bengochea@itam.mx

y

Ernesto Pérez-Chavela
Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México
ernesto.perez@itam.mx

1. Introducción

Este trabajo nació a raíz de la invitación del Dr. Carlos Bosch, Jefe del Departamento de Matemáticas del ITAM, a escribir un artículo para celebrar los 50 años de la creación de la Carrera de Matemáticas Aplicadas en el ITAM. Conversando al respecto, los autores de este manuscrito decidimos escribir conjuntamente un artículo que reflejara el carácter y las modalidades de esta carrera, la primera de su género en este país. Qué mejor oportunidad para transmitir, a nuestros estudiantes y lectores de *Miscelánea Matemática*, algunos aspectos de Mecánica Celeste relacionados con las misiones espaciales. Ya que en 2025 se cumplen 50 años del lanzamiento de las misiones espaciales Viking I y Viking II a Marte, decidimos dedicar parte de este escrito a esas misiones. También hablaremos de misiones espaciales más recientes, como lo son DART y Genesis y dedicamos una parte de este trabajo a describir algunos modelos de Mecánica Celeste que han servido para el diseño de misiones espaciales.

2. Misión espacial Viking

El proyecto Viking consistió en el lanzamiento de dos sondas espaciales idénticas, llamadas Viking I y Viking II, al planeta Marte. Estas sondas

Palabras clave: misiones espaciales, mecánica celeste, problema restringido de tres cuerpos.

Este artículo forma parte de la celebración por los 50 años de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas en el Instituto Tecnológico Autónomo de México.

espaciales debieron ser lanzadas en 1974 (hace 50 años), sin embargo, por falta de presupuesto y algunos detalles técnicos, su lanzamiento tuvo que posponerse un año. Las misiones Viking I y II partieron de Cabo Cañaveral, Florida y fueron lanzadas respectivamente el 20 de agosto y 9 de septiembre de 1975. El objetivo de la misión era *amartizar* en la superficie de este planeta y poder descubrir la existencia de algún tipo de vida.

Marte es el cuarto planeta de nuestro Sistema Solar. Dada su cercanía con la Tierra (la diferencia media entre los radios de sus órbitas es de tan solo 225 millones de kilómetros) es visible sin necesidad de instrumentos especiales, la mayor parte del año. Dada su brillantez y color rojo característico, a Marte se le nombró como el Dios de la guerra en la mitología romana. Su órbita vista desde la Tierra tiene la forma de un caracol, esto es una especie de un círculo con un lazo interior (véase la figura 1). Debido a que la trayectoria de Marte, vista desde la Tierra, en cierto periodo de tiempo va en una dirección y posteriormente regresa, los griegos y romanos lo conocían como el planeta que regresa (véase [14] para más detalles al respecto).

Estas son solo algunas características que motivaron el interés en dicho planeta. Encontrar algún vestigio de vida fuera de la Tierra es de enorme importancia, sabemos que en la Luna no existe, ¿qué tal en nuestros planetas vecinos? Marte, por ejemplo.

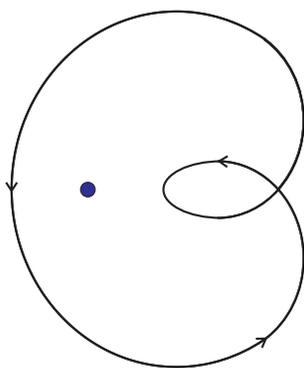


Figura 1. La órbita de Marte vista desde la Tierra.

Las sondas espaciales Viking estaban dotadas de un cohete propulsor provisto de cámaras fotográficas muy sofisticadas y de una cápsula espacial que terminaría posando sobre la superficie de Marte, la cual contaba con aparatos para medir temperatura, presión atmosférica, actividad sísmica y un laboratorio de biología capaz de detectar agua en la atmósfera, así como la composición química de la superficie marciana y sus propiedades magnéticas. El cohete que llevó la cápsula del Viking II estuvo orbitando alrededor de Marte hasta el 25 de julio de 1978,

pero el módulo espacial sobre la superficie del planeta funcionó hasta el 12 de abril de 1980, fecha en que dejó de emitir señales a la Tierra. Por su parte, el cohete del Viking I orbitó alrededor de Marte hasta el 7 de agosto de 1980 y su cápsula espacial funcionó hasta el 13 de noviembre de 1982. En total se recibieron 4,500 fotos de las cápsulas y 52,000 de los cohetes. La información que enviaron ambas misiones fue extraordinaria, se aprendió mucho sobre la composición del planeta y la superficie de Marte, desafortunadamente esta información no fue concluyente para verificar la existencia de vida en Marte. En la figura 2 se muestra una foto de la cápsula espacial Viking I junto al famoso científico Carl Sagan.



Figura 2. Cápsula espacial de la misión Viking I junto al astrónomo Carl Sagan (NASA/JPL).

3. Misión espacial DART

Los planetas son vulnerables a ser impactados por cuerpos celestes. La colisión de un cuerpo celeste con la Tierra puede causar pérdida de vidas y estragos materiales, dañar la Tierra o modificar su forma. En Tunguska, Rusia, el 30 de junio de 1908, un meteorito [4, 13] destruyó alrededor de 2,000 km² de bosque. Este tipo de meteoritos se conocen como *bólidos*, se caracterizan por explotar al ingresar a la atmósfera de la Tierra; en particular este estalló a una altura de 6 a 10 km lo que causó que se liberara una energía de 15 Megatonnes [8], equivalente a 1,000 veces la energía de la bomba atómica de Hiroshima. Otro evento más reciente es el meteorito de Chelyabinsk [7], del cual se tiene un registro detallado. Este también fue un *bólido*, de aproximadamente 20 m

de diámetro [17]; explotó el 15 de febrero de 2013 con una velocidad de 19 km/s a la entrada de la atmósfera terrestre. El evento causó daño en un área de 6,500 km², 7,300 edificios se vieron afectados y lesionó alrededor de 1500 personas [7, 5]. Se estima que la energía del evento es 30 veces más grande que la liberada por la bomba atómica en Hiroshima [17]. Este meteorito no fue detectado por observatorios terrestres, hasta su entrada a la atmósfera, debido a su tamaño y a que se acercó a la Tierra desde la dirección del Sol.

El progreso tecnológico ha permitido que algunas de las misiones espaciales más recientes estén orientadas hacia la protección de la Tierra, contra el posible impacto de asteroides o cometas. A la planeación de estas misiones espaciales les precede la clasificación, observación y detección de los cuerpos celestes que son potencialmente una amenaza, por colisionar con la Tierra. A continuación ahondaremos sobre este tema, posteriormente hablaremos sobre DART, la primera misión que logró modificar la órbita de un cuerpo celeste.

3.1 NEOs

Las órbitas de cuerpos celestes alrededor del Sol usualmente se describen utilizando elementos elípticos fijando al Sol en uno de sus focos. El perihelio se define como el punto más cercano de la órbita de un cuerpo celeste alrededor del Sol, mientras que el afelio como el punto más alejado. Al perihelio y afelio se les denota respectivamente con las letras q y Q .

Los objetos cercanos a la Tierra, o por su acrónimo en inglés NEO (*near-Earth objects*), se clasifican de acuerdo a la órbita que siguen alrededor del Sol. Los NEOs son asteroides o cometas y su clasificación se hace en función de qué tan cerca pasan de la Tierra y qué tan grande es su órbita en comparación con la órbita de la Tierra. En todos los casos se toma como centro de referencia la posición del Sol ya que cualquier cuerpo celeste que entre en el Sistema Solar tendrá aproximadamente un movimiento kepleriano alrededor de él, lo cual se debe a la enorme masa del Sol comparada con la masas de los otros cuerpos. Con el motivo de comparar la órbita de un cuerpo celeste con la órbita de la Tierra, se suele utilizar como unidad de distancia la unidad astronómica 1 AU = 149,597,870.7 km, la cual representa la distancia promedio entre la distancia de la Tierra al Sol. Como referencia, el perihelio y afelio de la Tierra tienen los valores de $q_T = 0.9833$ AU y $Q_T = 1.0166$ AU. La definición de NEO ha evolucionado de acuerdo al descubrimiento de asteroides cuyas órbitas poseen diferentes propiedades. La definición más reciente de NEO [23] es ligeramente menos restrictiva que su precedente [12, 2]; se consideran NEOs a aquellos asteroides o cometas

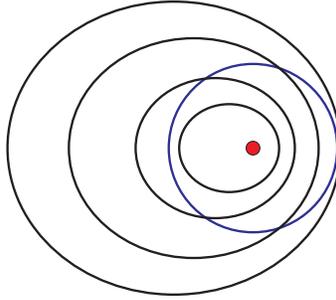


Figura 3. Esquematación de las órbitas de asteroides (en negro) de tipo Apollo, Atens, Amors y Atira, en orden exterior a interior. Se utiliza color azul para la órbita de la Tierra, el Sol se indica con el punto rojo sólido.

cuyas órbitas poseen un perihelio $q \leq 1.3$ AU. A su vez, los NEOs se clasifican en cuatro tipos [18, 19]. En la figura 3 se esquematizan los diferentes casos, en términos del perihelio q y del semieje mayor de la órbita denotado por a .

Clasificación de los 4 tipos de NEOs

- Apollo, $a > 1.0$ AU, $q < 1.0167$ AU. La órbita del asteroide cruza la órbita de la Tierra y el semieje mayor del asteroide a es mayor al semieje mayor de la órbita de la Tierra.
- Atens, $a < 1.0$ AU, $q < 1.0167$ AU. La órbita del asteroide cruza la órbita de la Tierra y el semieje mayor del asteroide es menor al semieje mayor de la órbita de la Tierra.
- Amors, $a > 1.0$ AU, 1.0167 AU $< q \leq 1.3$ AU. La órbita del asteroide es exterior a la de la Tierra pero interior a la órbita de Marte.
- Atira o Apohele, $a < 1.0$ AU, $Q < 0.983$ AU. La órbita del asteroide es interior a la de la Tierra.

Hasta el día de hoy, todos los nombres que se utilizan para la clasificación se deben al descubrimiento de un asteroide homónimo al tipo de NEO. Es relevante mencionar que la órbita de un NEO puede satisfacer alguna de estas definiciones solamente en cierto intervalo de tiempo ya que la órbita puede evolucionar por la interacción con los diferentes planetas del Sistema Solar.

Actualmente existen diferentes programas dedicados a la detección de NEOs. El programa de la NASA *Near-Earth Object, Survey and Deflection, Analysis of Alternatives*, en su reporte de marzo de 2007 al Congreso de los Estados Unidos de Norteamérica, indica que se conoce respectivamente la población de asteroides tipo Apollo, Atens, Amors

y Atira en 62 %, 6 %, 32 % y 100 % (existen solamente seis asteroides de tipo Atira). En diciembre de 2006 la NASA reportó que había identificado 701 NEOs con dimensiones mayores a 1 km y 3656 con dimensiones menores a 1 km. Las estimaciones de la población de NEOs con dimensiones mayores a 1 km es 1,100 y con dimensiones mayores a 140 m es de 100,000.

3.2 DART

Una de las estrategias principales para prevenir el impacto de NEOs es la *deflección*, que consiste en modificar la órbita. Hasta el momento, se han planteado tres técnicas de *deflección*:

- impactador cinético: se basa en la modificación de la órbita del NEO debido a la colisión con una nave enviada con dicho propósito.
- explosión nuclear: se basa en la explosión de un arma nuclear a cierta distancia del NEO; el cuerpo celeste puede ser desviado debido a la energía transmitida por la explosión en la superficie.
- tractor gravitatorio: en este caso se envía una nave que estará muy cerca del NEO durante varios años, debido a la atracción gravitacional desviará la trayectoria.

La primera misión espacial de tipo impactador cinético planeada es «Don Quijote» [6], proyecto dirigido por la Agencia Espacial Europea (ESA por su acrónimo en inglés *European Space Agency*). El objetivo de dicha misión era la deflección de NEOs con un diámetro de 300-800 m. Aunque esta misión no se concretó, sentó los precedentes para la misión DART.

Asteroid Impact & Deflection Assessment (AIDA) es un proyecto compartido entre la NASA y la ESA. La misión espacial DART, acrónimo de *Double Asteroid Redirection Test*, es parte del proyecto AIDA; es la primera misión espacial en la que se ha realizado exitosamente una prueba de tipo impactador cinético. DART fue impactado en Dimorphos, luna natural de Didymos, NEOs de tipo Apollo [1]. El lanzamiento se hizo el 24 de noviembre del 2021 y la colisión sucedería el 26 de septiembre de 2022.

La fabricación de DART fue dirigida por el Laboratorio Johns Hopkins Applied Physics en Laurel, Maryland. DART contaba con instrumentos enfocados a la observación, uno de ellos DRACO, acrónimo de *Didymos Reconnaissance and Asteroid Camera for Optical navigation* y LICIAcube, fabricado en Italia. DRACO se utilizó para monitorear el sistema Didymos-Dimorphos 30 días antes de la colisión con DART. La motivación de las observaciones fue contar con información para modelar e interpretar la colisión de DART con Dimorphos. El objetivo

de LICIACube era monitorear el momento de la colisión entre DART y Dimorphos. LICIACube portaba las cámaras LUKE y LEIA; se separó de DART 15 días antes del impacto con Dimorphos al ser expulsada a una velocidad de 4 km/h relativa a DART.

3.3 Impacto en Dimorphos y misión Hera

La estructura principal de la nave DART asemeja a un refrigerador, con dimensiones de $1.2 \times 1.3 \times 1.3$ m. La nave tiene dos alas solares, cada una extendida cuenta con dimensiones de 8.5 m. La masa de DART, en el momento de su lanzamiento, fue aproximadamente de 610 kg y de 580 kg en el momento de la colisión. El asteroide Didymos mide alrededor de 780 m de diámetro y tiene un periodo alrededor del sol de 769 días. Por otro lado, la luna de Didymos, llamada Dimorphos, tiene 160 m de diámetro y un periodo orbital alrededor de Didymos de 11 h y 55 min; su órbita posee una excentricidad menor a 0.03, muy cercana a circular. La masa de Didymos es 5.4×10^{11} kg, la masa de Dimorphos no se conoce pero se tiene un estimado de 4.8×10^9 kg.

DART impactó a Dimorphos a una velocidad de 6.1 km/s. El impacto modificó el periodo orbital y la excentricidad de la órbita de Dimorphos. El periodo orbital se redujo 33min, que es aproximadamente 4.6 % de su periodo orbital [22].

Las consecuencias del impacto de DART en Dimorphos requieren tiempo para que puedan ser observadas. Para dar seguimiento a las consecuencias que tuvo el impacto en Dimorphos, se tiene planeada la misión espacial Hera para el año 2026 [9]. Otro de los objetivos de Hera es contar con una mejor aproximación de la masa de Dimorphos.

4. Las misiones espaciales y la Mecánica Celeste

La planeación de las misiones espaciales se lleva a cabo con ayuda de modelos matemáticos que se fundamentan con el problema de n -cuerpos, que es un conjunto de ecuaciones diferenciales el cual describe el movimiento de n partículas puntuales interactuando mediante la fuerza gravitacional de Newton. Por medio de modificaciones específicas al problema de n -cuerpos, se obtienen modelos que describen el movimiento de las naves en las misiones espaciales. La utilidad de estos modelos, en el diseño de misiones espaciales, radica en entender las diversas soluciones que existen, como lo son puntos de equilibrio, o soluciones periódicas. Esas soluciones sirven como guía para planear las trayectorias que seguirán las misiones espaciales.

¿Qué tan difícil es estudiar las ecuaciones del problema de n -cuerpos? Este problema se puede resolver en forma cerrada para $n = 2$, utilizando

las constantes de movimiento del sistema. En el caso $n = 2$ se conocen todas las soluciones y sus propiedades, podemos decir que este sistema se comprende totalmente. Sin embargo, para $n \geq 3$ no se puede resolver el sistema, como sucedía para $n = 2$; el sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente representa un gran problema de estudio, motivo por el que se introducen los problemas restringidos. En general, un problema restringido resulta de considerar restricciones particulares en un modelo general, en nuestro caso el problema de n -cuerpos. Entre las restricciones más comunes se encuentran la presencia de una masa muy pequeña y que algunos de los cuerpos siguen órbitas predeterminadas. Los problemas restringidos son útiles para el diseño de misiones espaciales, pero su aplicación es específica de la misión espacial en cuestión. La ventaja que presentan los problemas restringidos es que las ecuaciones que los definen, si bien no son triviales, son de menor complejidad que las del modelo general. Es relevante mencionar que, el avance de la computación, en particular lo relacionado a la integración numérica, ha ayudado a entender los modelos que se utilizan en las misiones espaciales, que a su vez ha permitido la creación de misiones espaciales más sofisticadas.

En la siguiente sección describiremos las ecuaciones del problema de n -cuerpos y el problema de 2-cuerpos, así como una de sus aplicaciones. Posteriormente describiremos el problema restringido circular de tres cuerpos y cómo se utilizó en el diseño de la misión espacial Genesis.

4.1 El problema de los n -cuerpos

El problema de n -cuerpos consiste en analizar la dinámica de n -partículas puntuales en \mathbb{R}^3 , donde al tiempo $t \in \mathbb{R}$ la partícula $i \in \{1, \dots, n\}$ con masa $m_i > 0$ está en la posición $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^3$. La fuerza que la partícula j ejerce sobre la partícula i está dada por la ley de gravitación universal de Newton (la fuerza con que dos partículas se atraen es directamente proporcional al producto de sus masas y está en razón inversa del cuadrado de sus distancias y va en la dirección de la recta que une ambas masas), es decir,

$$\mathbf{F}_{ij} = G \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^2} \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|} = G \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^3} (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i),$$

donde G es la constante de gravitación universal. De acuerdo a la segunda ley de Newton, en un sistema de referencia inercial, las ecuaciones de movimiento de los n cuerpos son

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

donde $r_{ij} = |\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|$. Es relevante mencionar que el lado derecho de la ecuación (1) se identifica con

$$\nabla_i U = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_i}, \quad U = \sum_{i < j} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}},$$

que es el gradiente de la energía potencial del sistema U con respecto al vector de posición de la i -ésima partícula. Por simplicidad, nos referiremos a la energía potencial como potencial U .

Las ecuaciones de movimiento (1) no están definidas cuando al menos dos partículas tienen la misma posición, por lo que debemos quitar dichas posiciones. Para esto definimos

$$\Delta_{ij} = \{(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n) \in (\mathbb{R}^3)^n \mid \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j\},$$

es decir, el conjunto de las colisiones del cuerpo i con el cuerpo j . Con esto, el conjunto de todas las colisiones es

$$\Delta = \bigcup_{i < j} \Delta_{ij}.$$

En consecuencia, el espacio de configuración del problema de los n -cuerpos, que es donde pueden estar los vectores de posición, se define como

$$Q = \{(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n) \in (\mathbb{R}^3)^n\} \setminus \Delta.$$

Para identificar el espacio de posiciones y velocidades de las ecuaciones de los n cuerpos (1), también llamado espacio fase, requerimos escribir el sistema en forma estándar. Introduciendo las velocidades $\mathbf{v}_j = \dot{\mathbf{q}}_j$, $j = 1, \dots, n$, el sistema (1) se reescribe como

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{v}_i, \quad \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{Gm_j}{r_{ij}^3} (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Usualmente se denota a los vectores de posición $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)$ con \mathbf{q} y las correspondientes velocidades con \mathbf{v} . El espacio fase de (2) es $\Omega = Q \times (\mathbb{R}^3)^n$ y el campo vectorial que define el problema de los n -cuerpos es analítico en Ω por lo que, de acuerdo a la teoría de ecuaciones diferenciales, para toda condición inicial $(\mathbf{q}_0, \mathbf{v}_0)$ en $t = t_0$ existe una única solución del problema de los n -cuerpos definida sobre un intervalo maximal que contiene a t_0 .

Sea I_3 la matriz identidad 3×3 . Definiendo la matriz de masas

$$M = \text{diag}(m_1 I_3, m_2 I_3, \dots, m_n I_3),$$

las ecuaciones del problema de los n -cuerpos se pueden escribir como

$$M\ddot{\mathbf{q}} = \nabla U(\mathbf{q}).$$

Las ecuaciones diferenciales que describen el problema de los n -cuerpos poseen una estructura que da origen a algunas propiedades interesantes, una de ellas es la existencia de integrales primeras o constantes de movimiento. Una integral primera, o constante de movimiento, es una función de las variables de estado y posiblemente el tiempo que no cambia de valor al paso del tiempo t en cada solución del sistema, de tal forma que si g es una constante de movimiento entonces $\frac{dg}{dt} = 0$. En el problema de los n -cuerpos, la energía cinética

$$K = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j |\dot{\mathbf{q}}_j|^2$$

y la energía potencial U dan lugar a la energía total del sistema

$$h = K - U,$$

la cual es una constante de movimiento ya que

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{j=1}^n m_j \langle \ddot{\mathbf{q}}_j, \dot{\mathbf{q}}_j \rangle + \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_j}, \dot{\mathbf{q}}_j \right\rangle = \sum_{j=1}^n \left\langle m_j \ddot{\mathbf{q}}_j + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_j}, \dot{\mathbf{q}}_j \right\rangle = 0.$$

En otras palabras, dada una condición inicial en el problema de los n -cuerpos, la órbita correspondiente está en un mismo nivel de energía h para todo tiempo t .

Otra propiedad interesante de las ecuaciones de movimiento del problema de los n -cuerpos es que poseen una estructura hamiltoniana, usualmente su estudio se realiza en ese contexto. Definiendo el vector momento $\mathbf{p} = M\dot{\mathbf{q}}$ y el hamiltoniano

$$\begin{aligned} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= K(\mathbf{p}) - U(\mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{p}_j^2}{m_j} - \sum_{i < j} \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|}, \end{aligned} \quad (3)$$

las ecuaciones diferenciales del problema de n -cuerpos se pueden obtener con el hamiltoniano (3) y las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}.$$

Este sistema cuenta con otras constantes de movimiento. Para ver esto, note que de las ecuaciones de movimiento (1), se obtiene

$$\sum_{j=1}^n m_j \ddot{\mathbf{q}}_j = \mathbf{0}.$$

Al integrar una vez la ecuación anterior, se obtiene la conservación del momento lineal

$$\sum_{j=1}^n m_j \dot{\mathbf{q}}_j = \mathbf{c}_1,$$

donde \mathbf{c}_1 es un vector constante. Integrando nuevamente obtenemos

$$\sum_{j=1}^n m_j \mathbf{q}_j = \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2,$$

donde \mathbf{c}_2 es otro vector constante. Recordando que la posición del centro de masa del sistema está dado por

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{\sum_{j=1}^n m_j \mathbf{q}_j}{\sum_{j=1}^n m_j},$$

vemos de las constantes de movimiento que el centro de masa se mueve sobre una línea recta con velocidad constante. Usualmente fijamos este centro de masa en el origen, es decir $\mathbf{R}_{cm} = \mathbf{0}$, que equivale a $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2 = \mathbf{0}$.

Existe otra constante de movimiento que es el momento angular. Para identificarla, de las ecuaciones de movimiento (1) tomamos el producto cruz con \mathbf{q}_j y sumamos para obtener

$$\sum_{j=1}^n m_j \ddot{\mathbf{q}}_j \times \mathbf{q}_j = \mathbf{0}.$$

Usando la propiedad

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{q}_j \times \dot{\mathbf{q}}_j) = \mathbf{q}_j \times \ddot{\mathbf{q}}_j,$$

se deduce la integral del momento angular

$$\sum_{j=1}^n m_j \mathbf{q}_j \times \dot{\mathbf{q}}_j = \mathbf{c},$$

donde \mathbf{c} es un vector constante

Resumiendo, en el problema de los n -cuerpos hay 10 integrales de movimiento: 3 del momento lineal, 3 del centro de masa, 3 del momento angular y 1 de la energía total del sistema.

Para el caso $n = 2$, en general se tiene $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in (\mathbb{R}^3)^2$ para las posiciones y $(\dot{\mathbf{q}}_1, \dot{\mathbf{q}}_2) \in (\mathbb{R}^3)^2$ para las velocidades; manipulando las integrales de movimiento que acabamos de deducir se puede demostrar que este problema es integrable, es decir, se pueden deducir explícitamente todas sus soluciones.

El paso de $n = 2$ a $n = 3$ es abismal en cuanto a la dificultad que presentan las ecuaciones de movimiento que son no lineales. Para $n = 3$

las primeras integrales no son suficientes para resolverlo, no podemos resolver explícitamente las ecuaciones como sucede en el caso $n = 2$, es decir, el problema de los n -cuerpos para $n \geq 3$ es no integrable. De hecho, se puede demostrar analíticamente que este sistema es caótico.

El problema de los 3-cuerpos ha sido un gran reto para matemáticos y físicos desde tiempos de Newton. Hasta nuestros días continúa fascinando a muchos investigadores, ya que su mejor entendimiento nos ayudaría a profundizar en la dinámica del Sistema Solar.

4.2 El problema de 2-cuerpos y órbitas de transferencia

Se sabe que los únicos movimientos posibles en un problema de 2-cuerpos son en cónicas (hipérbola, parábola, elipse, circular) y en línea recta, dependiendo de la energía total y momento angular del sistema. Entender estas soluciones ha dado lugar a conceptos fundamentales en la planeación de las misiones espaciales [11], como lo son las *órbitas de transferencia*.

En su forma más general, una órbita de transferencia es una maniobra orbital ejecutada por una nave espacial, con el fin de alcanzar una órbita requerida. La órbita de transferencia clásica es aquella que sucede en un campo de fuerza central y se utiliza para desplazar una nave desde una órbita circular de radio r_1 a otra de radio $r_2 \neq r_1$. Se dice que la órbita de transferencia es ascendente o descendente si $r_2 > r_1$ o $r_2 < r_1$, respectivamente. La técnica que se utiliza para conseguir una órbita de transferencia es la maniobra orbital descubierta por el ingeniero alemán Walter Hohmann en 1925 [10], la cual explicaremos a continuación para el caso ascendente. Consideremos una nave que inicialmente sigue una órbita circular de radio r_1 alrededor del planeta P . Con los motores de la nave se da un impulso Δv_1 que cambia el momento de la nave y hace que pase a una órbita elíptica. La nave seguirá una trayectoria elíptica, hasta alcanzar un radio orbital r_2 ; en ese momento se da otro impulso Δv_2 a la nave lo que permitirá que esta orbite circularmente alrededor de P con radio r_2 . En términos de energía, la órbita elíptica, tangente tanto a la órbita inicial como final, es la más eficiente. La esquematización de esta maniobra orbital se realiza en la figura 4.

4.3 El problema restringido circular de tres cuerpos

El problema de 2-cuerpos ha sido de gran utilidad en el desarrollo de las misiones espaciales, pero tiene limitaciones, inherente al número de cuerpos que considera. Con el objetivo de establecer un modelo más amplio dinámicamente que el de 2-cuerpos y que sea de utilidad para el diseño de misiones espaciales, se añade un cuerpo de masa muy pequeña, insignificante en comparación con las masas de los cuerpos

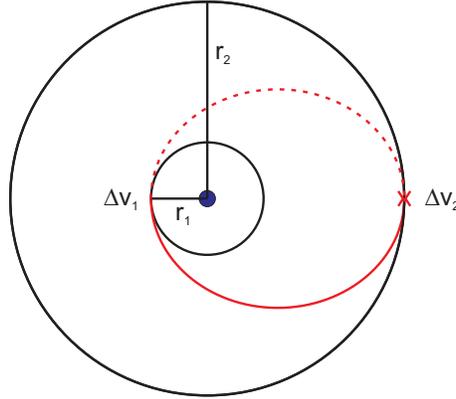


Figura 4. Órbita de transferencia de Hohmann.

originales. Esto y establecer que los dos cuerpos originales sigan órbitas circulares dan origen al *problema restringido circular de tres cuerpos* (PRC3C), que se puede considerar un problema intermedio, entre los problemas de 2 y 3 cuerpos. Este modelo fue introducido por Euler a finales del siglo XVIII [15, 16]. La idea es brillante, consiste en considerar un problema de tres cuerpos con dos partículas muy masivas, denominados *primarios*, junto a una tercera de masa despreciable, de tal forma que a las primeras no les afecta la presencia del tercero, pero el movimiento de este está totalmente definido por las atracciones de los dos cuerpos masivos. En este sistema la pregunta es, ¿cómo es la dinámica de la partícula de masa despreciable bajo la fuerza gravitacional ejercida por los primarios?

Para introducir el modelo, supongamos que tenemos 3 cuerpos con masas $m_1 \geq m_2 > 0$, $m_3 > 0$, todos ellos moviéndose en el plano fijo \mathbb{R}^2 . De las ecuaciones del problema de los n -cuerpos (1) con $n = 3$ obtenemos

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{Gm_j}{r_{ij}^3} (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Realizando $m_3 \rightarrow 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_1 &= \frac{Gm_2}{r_{12}^3} (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1), \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 &= \frac{Gm_1}{r_{12}^3} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2), \\ \ddot{\mathbf{q}}_3 &= \frac{Gm_1}{r_{13}^3} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) + \frac{Gm_2}{r_{23}^3} (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3). \end{aligned}$$

Observemos que las ecuaciones de movimiento de los primarios se han desacoplado, no dependen de \mathbf{q}_3 , por lo que tendremos que ellos satisfacen el problema clásico de dos cuerpos. También supondremos que los primarios se mueven en una órbita circular con el centro de masa en el origen (véase la figura 5). Desde aquí los vectores de estado de los primarios serán funciones del tiempo, esto es $\mathbf{q}_1(t)$, $\mathbf{q}_2(t)$.

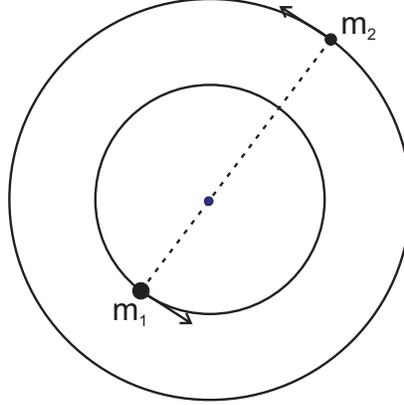


Figura 5. Órbitas circulares con misma velocidad angular constante, en un sistema coordenado con origen en el centro de masa de los dos cuerpos.

La ecuación diferencial que define a \mathbf{q}_3 es de segundo orden y no autónoma ya que depende explícitamente del tiempo a través de \mathbf{q}_1 y \mathbf{q}_2 :

$$\ddot{\mathbf{q}}_3 = \frac{Gm_1(\mathbf{q}_1(t) - \mathbf{q}_3(t))}{|\mathbf{q}_1(t) - \mathbf{q}_3(t)|^3} + \frac{Gm_2(\mathbf{q}_2(t) - \mathbf{q}_3(t))}{|\mathbf{q}_2(t) - \mathbf{q}_3(t)|^3}.$$

Lo siguiente es parametrizar $\mathbf{q}_1(t)$, $\mathbf{q}_2(t)$. Los primarios se mueven con la misma velocidad angular constante, es decir

$$\mathbf{q}_1(t) = R(\omega t)\mathbf{p}_1, \quad \mathbf{q}_2(t) = R(\omega t)\mathbf{p}_2,$$

donde

$$R(\omega t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\text{sen}(\omega t) \\ \text{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

y \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 son vectores constantes. También podemos suponer, sin perder generalidad, que \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 están sobre el eje x , a la izquierda y derecha respectivamente.

Utilizamos unidades de masa tal que $G(m_1 + m_2) = 1$, que por comodidad escribimos en términos del parámetro $\mu \in (0, 1/2]$ como $Gm_1 = 1 - \mu$ y $Gm_2 = \mu$. Note que para $\mu = 1/2$ las masas son iguales y si $0 < \mu < 1/2$ entonces $m_1 > m_2$.

Fijar el centro de masa en el origen de los primarios da lugar a la restricción $(1 - \mu)\mathbf{p}_1 + \mu\mathbf{p}_2 = 0$. Además, la distancia entre los primarios es constante, debido a que el movimiento de los primarios es sobre

círculos con la misma velocidad angular. Consideramos unidades de distancia de tal forma que $|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1| = 1$. Utilizando la condición de centro de masa y unidad de distancia obtenemos

$$\mathbf{p}_1 = (-\mu, 0), \quad \mathbf{p}_2 = (1 - \mu, 0).$$

Hasta ahora hemos elegido unidades relacionadas con la masa y distancia, nos falta el tiempo. Escogemos unidades en el tiempo de tal forma que $\omega = 1$ (el periodo de los primarios es 2π), en consecuencia

$$\ddot{\mathbf{q}}_3 = \frac{(1 - \mu)(R(t)\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_3)}{|R(t)\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_3|^3} + \frac{\mu(R(t)\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_3)}{|R(t)\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_3|^3}. \quad (4)$$

Para simplificar (4) introducimos un sistema de referencia rotatorio donde \mathbf{q}_1 y \mathbf{q}_2 giran con la misma velocidad angular $\omega = 1$ y un vector \mathbf{z} , contraparte de \mathbf{q}_3 en el sistema rotatorio, es decir $\mathbf{q}_3 = R(t)\mathbf{z}$.

Observemos que

$$\frac{d}{dt}R(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) \end{bmatrix} = R(t)J,$$

donde $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ es la matriz simpléctica.

Si derivamos nuevamente obtenemos

$$\frac{d^2}{dt^2}R(t) = \frac{d}{dt}(R(t)J) = R(t)J^2 = -R(t), \quad J^2 = -I_2,$$

por lo que

$$\ddot{\mathbf{q}}_3 = \left(\frac{d^2}{dt^2}R(t) \right) \mathbf{z} + 2 \left(\frac{d}{dt}R(t) \right) \dot{\mathbf{z}} + R(t)\ddot{\mathbf{z}} = R(t) [\ddot{\mathbf{z}} + 2J\dot{\mathbf{z}} - \mathbf{z}].$$

Sustituyendo la expresión anterior en (4) se obtiene

$$\ddot{\mathbf{z}} + 2J\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{z} + \frac{1 - \mu}{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{z}|^3}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{z}) + \frac{\mu}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{z}|^3}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}. \quad (5)$$

Note que esta ecuación es autónoma. Sin embargo, ahora hay dos términos ($2J\dot{\mathbf{z}}$ y \mathbf{z}), que no vienen de fuerzas gravitatorias, estos términos son producto de la fuerza centrífuga y de Coriolis asociada al sistema rotatorio.

Los términos de la derecha de (5) se pueden ver como el gradiente de la función

$$\phi(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\mathbf{z}^2 + \frac{1 - \mu}{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{z}|} + \frac{\mu}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{z}|} + \frac{1}{2}(1 - \mu)\mu.$$

En consecuencia, (5) puede reescribirse como

$$\ddot{\mathbf{z}} + 2J\dot{\mathbf{z}} = \nabla\phi(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\},$$

que en términos de un sistema de primer orden resulta

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= -2J\mathbf{v} + \nabla\phi(\mathbf{z}).\end{aligned}$$

Dada una solución $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$, definimos la *constante de Jacobi*

$$\mathcal{J} = 2\phi(\mathbf{z}(t)) - |\dot{\mathbf{z}}(t)|^2,$$

expresión que es integral primera, o constante de movimiento, ya que su derivada temporal es cero:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{J}}{dt} &= 2\langle \nabla\phi(\mathbf{z}), \dot{\mathbf{z}} \rangle - 2\langle \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}} \rangle \\ &= 2\langle \nabla\phi(\mathbf{z}), \dot{\mathbf{z}} \rangle - 2\langle \dot{\mathbf{z}}, -2J\dot{\mathbf{z}} + \nabla\phi(\mathbf{z}) \rangle \\ &= 4\langle J\dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{z}} \rangle = 0.\end{aligned}$$

4.4 Soluciones de equilibrio, periódicas y heteroclínicas

A diferencia del problema de 2-cuerpos, el PRC3C posee una gran diversidad de soluciones. Las primeras soluciones que interesan, en un problema tan complejo como lo es el PRC3C, son aquellas que se pueden describir de forma relativamente sencilla o tienen propiedades relevantes en algún sentido.

Las primeras soluciones que estudiamos son aquellas que permanecen constantes en el tiempo, conocidas como soluciones o puntos de equilibrio. Los puntos de equilibrio del PRC3C están definidos por las ecuaciones $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\nabla\phi(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$, son conocidos como los *puntos de libración* o *puntos de Lagrange*. Después de un cálculo sencillo resulta que los puntos de equilibrio, o puntos de Lagrange, son las soluciones de la ecuación

$$\mathbf{z} = \frac{1 - \mu}{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{z}|^3}(\mathbf{z} - \mathbf{p}_1) + \frac{\mu}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{z}|^3}(\mathbf{z} - \mathbf{p}_2). \quad (6)$$

Las soluciones de la ecuación (6) son 5 puntos sobre el plano. Tres de las soluciones son puntos colineales L_1 , L_2 , L_3 y se localizan sobre la línea recta que une a los primarios. El punto L_1 se localiza entre los primarios, el punto L_2 está a la derecha de la partícula 2 y el punto L_3 se encuentra a la izquierda de la partícula 1. Los otros dos puntos de equilibrio definen configuraciones de triángulo equilátero, es decir, en dichas soluciones la partícula de masa infinitesimal está colocada en un vértice de un triángulo equilátero y los primarios están colocados en los otros dos vértices. Esos puntos son denominados L_4 y L_5 , se pueden distinguir mediante su coordenada y la cual es positiva y negativa, respectivamente. Los puntos de equilibrio en el PRC3C se esquematizan en la figura 6.

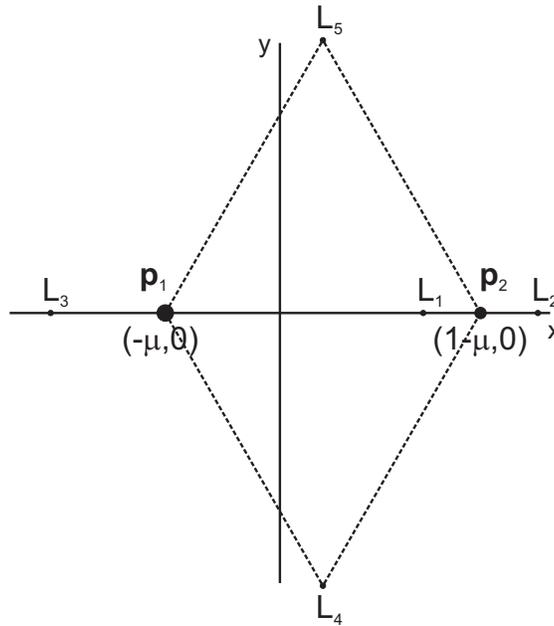


Figura 6. Posiciones de los cuerpos primarios y puntos de equilibrio en el PRC3C en el plano.

Otro tipo de soluciones de interés son las soluciones periódicas. Una solución periódica es aquella que se repite después de un cierto tiempo positivo; al mínimo tiempo $T > 0$ con esta propiedad se le denomina periodo de la órbita. Existen numerosos estudios sobre las órbitas periódicas del PRC3C.

Existen otros tipos de órbitas en el PRC3C, relevantes para el diseño de misiones espaciales, que se denominan órbitas heteroclínicas [3]. Una órbita heteroclínica es aquella que nace y termina de forma asintótica en diferentes puntos de equilibrio.

Es relevante mencionar que las soluciones del PRC3C se ven diferente en el marco de referencia inercial de acuerdo a la relación $\mathbf{q}_3 = R(t)\mathbf{z}$. Por ejemplo, los puntos de equilibrio L_i , $i = 1, \dots, 5$, que son puntos fijos en el PRC3C, definen órbitas circulares en el sistema inercial.

4.5 El PRC3C y la misión espacial Genesis

Genesis fue una misión espacial cuyo propósito era recolectar muestras de viento solar¹ y traerlas a la Tierra. Esta es una de las misiones espaciales que fue planeada con ayuda del PRC3C en el espacio. El diseño de dicha misión involucró el análisis de órbitas periódicas tipo halo (véase la figura 7) y órbitas heteroclínicas entre los puntos de equilibrio L_1 y L_2 , del PRC3C conformado por Sol-Tierra y nave Genesis.

¹Flujo con partículas cargadas eléctricamente.

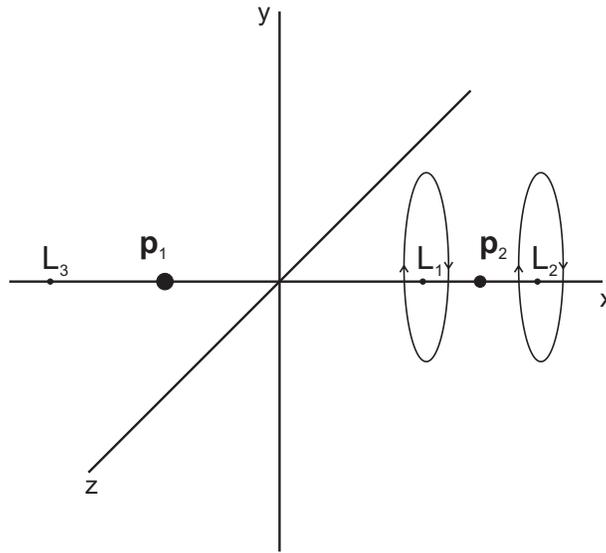


Figura 7. Órbitas tipo halo en el PRC3C espacial.

Las órbitas halo son órbitas periódicas en el espacio², en este caso alrededor de los puntos de equilibrio L_1 y L_2 . Las órbitas heteroclínicas de interés en la misión espacial Genesis son aquellas que nacen asintóticamente en L_1 y terminan asintóticamente en L_2 .

La trayectoria de la nave Genesis se puede resumir en las siguientes etapas [20]. En un inicio, la nave se puso en órbita alrededor de la Tierra el 8 de agosto del 2001; una hora después de su lanzamiento se modificó su trayectoria para dirigirla hacia el punto de equilibrio L_1 . Posteriormente, el 16 de noviembre del mismo año, al acercarse al punto de liberación L_1 , se modificó la órbita de la nave para llevarla a una órbita periódica halo alrededor de dicho punto. Una vez que Genesis seguía la órbita halo, inició el proceso de recolección de muestras de viento solar. Una vez terminado el proceso de recolección, Genesis fue dirigida hacia el punto de equilibrio L_2 el 22 de abril de 2004, utilizando como guía la órbita heteroclínica que conecta a la órbita halo de L_1 con la órbita halo de L_2 . En esta parte de la misión, la nave espacial pasó cerca de la Luna, posteriormente cerca de la Tierra y finalmente, en julio del 2004, alcanzó el punto L_2 . En la parte final de la misión, Genesis rodeó el punto de equilibrio L_2 ; posteriormente, estando muy cerca de la Tierra, expulsó la cápsula con las muestras recolectadas hacia la Tierra el 8 de septiembre del 2004.

²En esta presentación hemos expuesto las ecuaciones del PRC3C en el plano, las ecuaciones del PRC3C en el espacio se pueden obtener mediante una ligera modificación [21].

5. Conclusiones

En este escrito describimos brevemente las misiones espaciales Viking I y Viking II, que motivaron el título de este trabajo, junto a las misiones DART y Genesis. Nuestro objetivo fue mostrar cómo la *mecánica celeste* nos ayuda a comprender las trayectorias complejas de los objetos lanzados al espacio y su relevancia en la planeación de misiones espaciales.

Mostramos la aplicación de dos problemas clásicos de la *mecánica celeste*, el problema de 2-cuerpos, con la maniobra orbital de Hohmann y el problema restringido circular de tres cuerpos, con la misión espacial Genesis. En la exposición destacamos el hecho de que las órbitas de estos modelos de la mecánica celeste representan trayectorias ideales, que permiten diseñar la trayectoria de la misión espacial. La trayectoria de la misión se compone de diferentes partes de órbitas ideales y el paso de una a otra se realiza con maniobras orbitales ejecutadas por la nave espacial.

Las misiones espaciales son proyectos de gran escala que requieren la colaboración de equipos multidisciplinarios, integrando expertos de diversas áreas, como las matemáticas, la física, la computación y la teoría de control, entre otras. La colaboración interdisciplinaria es clave para el éxito de estos proyectos, ya que cada componente, desde la navegación hasta el análisis de datos, depende de conocimientos provenientes de diferentes disciplinas.

Bibliografía

- [1] L. A. M. Benner, J. Margot, M. C. Nolan, J. D. Giorgini, M. Brozovic, D. J. Scheeres, C. Magri y S. J. Ostro, «Radar Imaging and a Physical Model of Binary Asteroid 65803 Didymos», *Bull. Am. Astron. Soc.*, vol. 42, núm. 1056, 2010, 113777.
- [2] W. F. Bottke, «Understanding the Near-Earth Object Population: the 2004 Perspective», en *Comet/Asteroid Impacts and Human Society: An Interdisciplinary Approach*, eds. P. T. Bobrowsky y H. Rickman, Springer Berlin Heidelberg, 2007, 175–187.
- [3] C. C. Chicone, *Ordinary differential equations with applications*, vol. 34, Springer, 2006.
- [4] C. F. Chyba, P. J. Thomas y K. J. Zahnle, «Unconfirmed near-Earth objects», *Nature*, vol. 361, núm. 6407, 1993, 40–44.
- [5] V. V. Emel'yanenko, O. P. Popova, N. N. Chugai, M. A. Shelyakov, Y. V. Pakhomov, B. M. Shustov, V. V. Shuvalov, E. E. Biryukov, Y. S. Rybnov, M. Y. Marov et al., «Astronomical and physical aspects of the Chelyabinsk event (February 15, 2013)», *Solar System Research*, vol. 47, núm. 4, 2013, 240–254.
- [6] A. Gálvez, J. A. González y J. F. Martín-Albo, «Paving the way for an effective deflection mission: State of the art NEO precursor missions», en *2004 Planetary Defense Conference: Protecting Earth from Asteroids*, 2004, AIAA Paper 2004–1425.
- [7] N. Gorkavyyi, A. Dudorov y S. Taskaev, *Chelyabinsk Superbolide*, Springer Nature, 2019.

- [8] J. Lyne y M. Tauber, «Origin of the Tunguska event», *Nature*, vol. 375, 1995, 638–639.
- [9] P. Michel, M. Küppers, A. C. Bagatin, B. Carry, S. Charnoz, J. De Leon, A. Fitzsimmons, P. Gordo, S. F. Green, A. Hérique et al., «The ESA Hera mission: detailed characterization of the DART impact outcome and of the binary asteroid (65803) Didymos», *PSJ*, vol. 3, núm. 7, 2022, 160.
- [10] A. Miele, M. Ciarcià y J. Mathwig, «Reflections on the Hohmann transfer», *J. Optim. Theory Appl.*, vol. 123, 2004, 233–253.
- [11] A. Morbidelli, *Modern Celestial Mechanics. Aspects of Solar System Dynamics*, Taylor & Francis, Cambridge Scientific Publishers, 2002.
- [12] A. Morbidelli, W. F. Bottke Jr., C. Froeschlé y P. Michel, «Origin and Evolution of Near-Earth Objects», en *Asteroids III*, eds. W. F. Bottke Jr. et al., University of Arizona Press, 2002, 409–422.
- [13] B. Napier y D. Asher, «The Tunguska impact event and beyond», *Astronomy & Geophysics*, vol. 50, núm. 1, 2009, 1–18.
- [14] E. Pérez-Chavela, «El gigante Johannes Kepler», *Miscelánea Matemática*, vol. 74, 2022, 11–23.
- [15] H. Poincaré, «Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps», *BA*, vol. 1, 1884, 65–74.
- [16] ———, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, vol. 2, Gauthier-Villars et fils, imprimeurs-libraires, 1893.
- [17] O. P. Popova, P. Jenniskens, V. Emel’yanenko, A. Kartashova, E. Biryukov, S. Khaibrakhmanov, V. Shuvalov, Y. Rybnov, A. Dudorov, V. I. Grokhovsky et al., «Chelyabinsk airburst, damage assessment, meteorite recovery, and characterization», *Science*, vol. 342, núm. 6162, 2013, 1069–1073.
- [18] E. M. Shoemaker, J. G. William, E. F. Helin y R. F. Wolfe, «Earth-crossing asteroids: Orbital classes, collision rates with Earth, and origin», en *Asteroids*, ed. T. Gehrels, University of Arizona Press, 1979, 253–282.
- [19] ———, «Earth-crossing asteroids: Orbital classes, collision rates with Earth, and origin», en *Asteroids*, ed. T. Gehrels, University of Arizona Press, 1979, 253–282.
- [20] A. A. Siddiqi, *Beyond Earth: A chronicle of deep space exploration, 1958-2016*, vol. 4041, National Aeronautics & Space Administration, 2018.
- [21] V. Szebehely, *Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies*, Academic Press, 1967.
- [22] C. A. Thomas, S. P. Naidu, P. Scheirich, N. A. Moskovitz, P. Pravec, S. R. Chesley, A. S. Rivkin, D. J. Osip, T. A. Lister, L. A. M. Benner et al., «Orbital period change of Dimorphos due to the DART kinetic impact», *Nature*, vol. 616, núm. 7957, 2023, 448–451.
- [23] P. Vereš, M. J. Payne, M. J. Holman, D. Farnocchia, G. V. Williams, S. Keys y I. Boardman, «Unconfirmed near-Earth objects», *AJ*, vol. 156, núm. 1, 2018, 5.