

Introducción al retículo de particiones de números enteros

Edith Vargas-García

Departamento Académico de Matemáticas

ITAM

edith.vargas@itam.mx

y

Andreas Wachtel

Departamento Académico de Matemáticas

ITAM

andreas.wachtel@itam.mx

1. Introducción

El estudio de las *particiones* de un número entero comenzó a llamar la atención en 1674 cuando Leibniz investigó en [13, p. 37] el número de maneras en las que se puede escribir a un número entero n como suma de enteros positivos en forma decreciente, a lo que les llamó *divulsiones* hoy conocidas como particiones sin restricciones [14].

Leibniz observó, que hay cinco maneras de escribir al número 4, que son $\{4, 3 + 1, 2 + 2, 2 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1\}$, es decir, hay 5 particiones del 4, para el número 5 hay 7 particiones, para el 6 hay 11 particiones etc., y preguntó en una carta a Jacob Bernoulli sobre *el número de particiones* $p(n)$ de un entero positivo n . Con esta carta, Leibniz daría inicio a una fructífera rama de la teoría de números: la teoría de particiones.

La teoría de particiones ha cautivado a los matemáticos desde entonces, entre ellos a Euler, quien descubrió *la función generadora* de $p(n)$, dada implícitamente por

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n.$$

Palabras clave: particiones de números enteros, retículos.

Este trabajo fue apoyado por la Asociación Mexicana de Cultura A.C.

Un avance significativo se dio en 1918, cuando G. H. Hardy y S. Ramanujan publicaron en [10] la fórmula asintótica para contar $p(n)$, que es

$$p(n) \sim \frac{\exp(\pi\sqrt{2n/3})}{4n\sqrt{3}} \text{ para } n \rightarrow \infty.$$

Tenemos conocimiento que hasta ahora, no se conoce ninguna ‘expresión en forma cerrada’ para $p(n)$. Actualmente, más de tres siglos después de su concepción, las particiones continúan siendo un interesante objeto de estudio en las matemáticas y en administración de recursos como lo mostraremos en el ejemplo al final de este artículo.

En [5] Thomas Brylawski demostró que el conjunto de todas las particiones de un entero n con *el orden de dominación*, es decir, comparando puntualmente sus secuencias de sumas parciales, forma una estructura de *retículo* finito (por lo tanto completo), denotado por \mathcal{L}_n . Las cardinalidades de estos retículos \mathcal{L}_n , es decir, los números $|\mathcal{L}_n| = p(n)$ de las particiones de n , crecen rápidamente a medida que n aumenta, su tamaño por sí solo sugiere una creciente complejidad en la estructura de los retículos \mathcal{L}_n para valores grandes de n , por ello es interesante estudiar dicha estructura con el fin de entender su comportamiento en general.

En la sección 2 revisaremos la notación, terminología y resultados técnicos necesarios para las secciones subsecuentes. Más aún, daremos la definición formal de una partición, su representación gráfica por medio de *diagramas de Ferrers* e identidades que satisfacen dichas particiones.

En la sección 3 se mostrará como se calculan tanto los ínfimos como los supremos en \mathcal{L}_n , también se proporciona una interpretación geométrica y aproximación dinámica a través de reglas de transición que nos servirán para la caracterización de la relación de cobertura entre particiones.

Finalmente, además de mostrar que para todo $n \geq 7$ los retículos \mathcal{L}_n no satisfacen *la identidad de modularidad*, ni *de distributividad*, se muestra una fórmula cerrada para contar elementos particulares conocidos como *supremo-irreducibles* e *ínfimo irreducibles* en el retículo \mathcal{L}_n . Los elementos supremo-irreducibles e ínfimo-irreducibles son importantes ya que a través de ellos se puede re-construir el retículo \mathcal{L}_n , al lector interesado en saber como se da la técnica reconstrucción se le invita a leer [4], ya que la técnica a través del análisis de conceptos formales no se desarrollará en este artículo.

2. Definición y ejemplos de particiones

A lo largo del texto $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ denota el conjunto de los **números naturales** y $\mathbb{N}_+ := \{1, 2, \dots\}$ el conjunto de los **números enteros positivos**. Adicionalmente, si P es un conjunto y \leq es una relación binaria sobre P , la cual es *reflexiva*, *antisimétrica* y *transitiva*, entonces $\mathbb{P} := (P, \leq)$ es un **conjunto parcialmente ordenado**. Algunas veces, cuando sea conveniente, abusaremos de la notación e identificaremos a \mathbb{P} con P ; por ejemplo, escribiremos $x \in \mathbb{P}$ en lugar de $x \in P$. Sean a y b elementos del conjunto parcialmente ordenado \mathbb{P} , diremos que a es **cubierto por b** si $a < b$ y no existe ningún elemento c tal que $a < c < b$, lo que se denota por $a \prec b$. Si $a \prec b$, entonces b es el **vecino superior** de a y a es el **vecino inferior** de b . Los conjuntos parcialmente ordenados \mathbb{P} y \mathbb{Q} serán **isomorfos** si existe un mapeo biyectivo $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ tal que $a \leq b$ en \mathbb{P} si y solamente si $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ en \mathbb{Q} . El mapeo φ es llamado un **isomorfismo de orden**. Un **orden-anti-isomorfismo** o **isomorfismo dual** $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ es un isomorfismo de orden entre \mathbb{P} y el dual de \mathbb{Q} , los conjuntos \mathbb{P} y \mathbb{Q} son llamados **dual isomorfos**, diremos que \mathbb{P} es **auto-dual** si este es dual isomorfo consigo mismo.

Un **retículo** es un conjunto parcialmente ordenado \mathbb{P} tal que para cualesquiera dos elementos a y b existen la menor cota superior, llamada **supremo** de a y b , denotada por $a \vee b$, y la mayor cota inferior, llamada **ínfimo** de a y b , denotada por $a \wedge b$. Más aún, si el supremo $\bigvee S$ y el ínfimo $\bigwedge S$ existen para cualquier subconjunto $S \subseteq \mathbb{P}$, entonces \mathbb{P} es llamado un **retículo completo**. Sea \mathbb{L} un retículo y $M \subseteq \mathbb{L}$. Entonces M es el conjunto de un **subretículo** \mathbb{M} de \mathbb{L} , si cada vez que $a, b \in M$, entonces $a \vee b \in M$ y $a \wedge b \in M$.

Dado un retículo \mathbb{L} , diremos que $a \in \mathbb{L}$ es **supremo-irreducible**, denotado por \vee -irreducible, si este no es el **elemento mínimo** $0_{\mathbb{L}}$ (siempre y cuando exista tal elemento) y para cada $b, c \in \mathbb{L}$ tal que $a = b \vee c$ podemos concluir que $a = b$ ó $a = c$. En particular para un retículo finito, los elementos supremo-irreducibles son aquellos los cuales cubren precisamente un elemento. Los elementos **ínfimo-irreducibles** (\wedge -irreducibles) son definidos de forma dual y en retículos finitos ellos pueden ser descritos como aquellos que son cubiertos por únicamente un elemento.

Dado un retículo \mathbb{L} , denotaremos por $\mathcal{J}(\mathbb{L})$ y por $\mathcal{M}(\mathbb{L})$ el conjunto de todos los elementos *supremo-irreducibles*, y de todos los elementos *ínfimo-irreducibles* de \mathbb{L} , respectivamente. Un ejemplo de elementos tanto ínfimo-irreducibles como supremo-irreducibles de los retículos \mathbb{N}_5 y \mathbb{M}_3 aparecen sombreados en la figura 1.

Para poder trabajar con particiones es necesario definirlas.

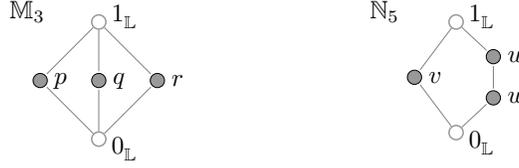


Figura 1. Retículos \mathbb{M}_3 y \mathbb{N}_5 cuyos elementos ínfimo-irreducibles y supremo-irreducibles aparecen sombreados.

Definición 2.1. Sea $n \in \mathbb{N}_+$ un número entero positivo. Una **partición** de n es una n -tupla $\vec{\alpha} := (a_1, \dots, a_n)$ de enteros no negativos tal que:

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n a_i = n.$$

Si existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a_k > 0$ y $a_i = 0$ para todo $i > k$, usualmente escribiremos (a_1, \dots, a_k) para referirnos a esa partición. Es decir, omitimos los ceros del final.

Ejemplo 2.2. La tupla $(5, 4, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ es una partición de 11 ya que

$$5 \geq 4 \geq 1 \geq 1 \geq 0 \quad \text{y} \quad 5 + 4 + 1 + 1 = 11.$$

Omitiendo los ceros la escribimos como $(5, 4, 1, 1)$. Otras particiones de 11 son (11) , $(6, 5)$, $(4, 2, 2, 2, 1)$, $(8, 1, 1, 1)$.

Bernhard Ganter en [8] presenta la siguiente definición de una partición conjugada:

Definición 2.3. Sea $\vec{\alpha} = (a_1, \dots, a_n)$ una partición de n . La **partición conjugada** de α es $\vec{\alpha}^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ donde,

$$a_i^* = |\{j \mid a_j \geq i\}| \quad \text{para todo } i \in \{1, \dots, n\}. \quad (1)$$

Ejemplo 2.4. Sea $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{11}) = (5, 4, 1, 1, 0, \dots, 0)$ una partición del número 11. Procedemos a calcular las componentes a_i^* de la ecuación (1) con el fin de obtener la partición conjugada $\vec{\alpha}^*$.

Para calcular a_1^* , tenemos que contar el número de entradas de $\vec{\alpha}$ que son mayores o iguales a 1, obtenemos que

$$a_1^* = |\{j \mid a_j \geq 1\}| = 4$$

Para a_2^* , el número de entradas de $\vec{\alpha}$ que son mayores o iguales a 2 es 2, por lo tanto $a_2^* = 2$. En cuanto a a_3^* , el número de entradas de $\vec{\alpha}$ mayores o iguales a 3 es 2, obteniendo que $a_3^* = 2$. Debido a que el número de entradas de $\vec{\alpha}$ que son mayores o iguales que 4 es 2, tenemos que $a_4^* = 2$. Finalmente, el número de entradas de $\vec{\alpha}$ que son mayores o iguales a 5 es 1, por lo tanto $a_5^* = 1$. Todos los otros elementos a_6^*, \dots, a_{11}^* son

cero. Por lo tanto, $\vec{\alpha}^* = (4, 2, 2, 2, 1) \in \mathfrak{L}_{11}$, es la partición conjugada, dada en la figura 2.

Una partición (a_1, \dots, a_k) de n puede representarse gráficamente con un **diagrama de Ferrers**, el cual es un dibujo en forma de escalera de k columnas adyacentes, donde la columna i (de izquierda a derecha) consiste en a_i pequeños cuadros apilados a los que llamamos **granos** (véase la figura 2). Dada una partición $\vec{\alpha}$ de n es posible obtener su partición conjugada $\vec{\alpha}^*$, leyendo su diagrama de Ferrers por filas de abajo hacia arriba (véase la figura 2).

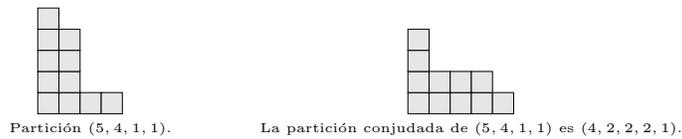


Figura 2. Diagramas de Ferrers representando particiones.

En 1748, Leonard Euler demostró que *para cualquier número entero $n \geq 2$, la cantidad de particiones de n en las que sus componentes son números impares es igual a la cantidad de particiones de n en las que sus componentes son todas distintas*, a esta propiedad se le conoce como la **identidad de Euler**. Los siguientes ejemplos fueron tomados del libro de Andrews [2], donde se pueden encontrar muchas más identidades interesantes dentro de las particiones.

Ejemplo 2.5.

1. A continuación ilustramos la identidad de Euler para $n \in \{2, \dots, 6\}$.

n	Número de particiones	Particiones de n con componentes impares	Particiones de n con componentes distintas
2	1	(1, 1)	(2)
3	2	(1, 1, 1), (3)	(3), (2, 1)
4	2	(1, 1, 1, 1), (3, 1)	(4), (3, 1)
5	3	(1, 1, 1, 1, 1), (3, 1, 1), (5)	(5), (4, 1), (3, 2)
6	4	(1, 1, 1, 1, 1, 1), (3, 1, 1, 1), (3, 3), (5, 1)	(6), (5, 1), (4, 2), (3, 2, 1)

2. Leonard James Rogers en 1894 y Srinivasa Ramanujan en 1913, demostraron la siguiente propiedad:

Para cualquier entero $n \geq 2$, el número de particiones con componentes de tamaños 1, 4, 6, 9, 11, 14, ... es igual al número de particiones donde la diferencia entre los números de sus componentes es de al menos dos.

n	Número de particiones	Particiones de n con diferencia de al menos 2	Particiones enteras en componentes de tamaños 1, 4, 6, 9, 11, 14...
2	1	(2)	(1, 1)
3	1	(3)	(1, 1, 1)
4	2	(4), (3, 1)	(4), (1, 1, 1, 1)
5	2	(5), (4, 1)	(4, 1), (1, 1, 1, 1, 1)
6	3	(6), (5, 1), (4, 2)	(6), (4, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1)
7	3	(7), (6, 1), (5, 2)	(6, 1), (4, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)
8	4	(8), (7, 1), (6, 2), (5, 3)	(6, 1, 1), (4, 4), (4, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)
9	5	(9), (8, 1), (7, 2), (6, 3), (5, 3, 1)	(9), (6, 1, 1, 1), (4, 4, 1), (4, 1, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)

3. El retículo de particiones \mathcal{L}_n

El conjunto de todas las particiones, denotado por $\text{Part}(n)$, de un número entero positivo n , puede ser ordenado de distintas maneras, una de ellas es a través del *orden de dominación* definido a continuación.

Definición 3.1 ([5]). Sean $\vec{\alpha} = (a_1, \dots, a_k)$ y $\vec{\beta} = (b_1, \dots, b_m)$ dos particiones de un número entero positivo n . Definimos el **orden de dominación** entre $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$ por

$$\vec{\alpha} \leq \vec{\beta} \quad \text{si y solamente si} \quad \sum_{i=1}^j a_i \leq \sum_{i=1}^j b_i \quad \text{para toda } j \geq 1.$$

Con dicho orden $\text{Part}(n)$ forma un conjunto parcialmente ordenado, en efecto, la relación \leq es un orden parcial sobre $\text{Part}(n)$, ya que la reflexividad y transitividad se siguen inmediatamente de la reflexividad y transitividad del orden usual en los enteros. Adicionalmente, para probar la antisimetría suponga que $\vec{\alpha} \leq \vec{\beta}$ y $\vec{\beta} \leq \vec{\alpha}$; entonces,

$$\sum_{i=1}^j a_i \leq \sum_{i=1}^j b_i \quad \text{para todo } j \geq 1$$

y

$$\sum_{i=1}^j b_i \leq \sum_{i=1}^j a_i \quad \text{para todo } j \geq 1.$$

De la antisimetría del orden usual en los enteros se sigue que

$$\sum_{i=1}^j a_i = \sum_{i=1}^j b_i \quad \text{para todo } j \geq 1.$$

Sea $j \geq 1$, entonces

$$a_j = \sum_{i=1}^j a_i - \sum_{i=1}^{j-1} a_i = \sum_{i=1}^j b_i - \sum_{i=1}^{j-1} b_i = b_j.$$

De manera que $a_j = b_j$ para todo $j \geq 1$ y concluimos que $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

Ejemplo 3.2. Considere a las particiones $(4, 1, 1, 1), (4, 2, 1) \in \text{Part}(7)$. Se cumple que $(4, 1, 1, 1) \leq (4, 2, 1)$ ya que:

$$\begin{aligned} 4 &\leq 4 \\ 5 &= 4 + 1 \leq 4 + 2 = 6 \\ 6 &= 4 + 1 + 1 \leq 4 + 2 + 1 = 7 \\ 7 &= 4 + 1 + 1 + 1 \leq 4 + 2 + 1 + 0 = 7 \end{aligned}$$

Sin embargo, $(3, 2, 2)$ y $(4, 1, 1, 1)$ no son comparables, pues $3 < 4$ y $3 + 2 \leq 4 + 1$, pero $3 + 2 + 2 > 4 + 1 + 1$.

En [5, prop. 2.2] se muestra que el conjunto $\text{Part}(n)$ con el orden de dominación, es decir, $(\text{Part}(n), \leq)$ es un **retículo**.

Definición 3.3. Sea $n \in \mathbb{N}_+$, el **retículo de todas las particiones** de n con el orden de dominación es $\mathcal{L}_n := (\text{Part}(n), \leq)$. Se observa que es un retículo finito, ya que para cada $n \geq 1$, hay un número finito de particiones.

Dado un retículo, es importante conocer como determinar el ínfimo y el supremo de elementos dados. La siguiente proposición (tomada de [5, prop. 2.2]) determina como encontrar el ínfimo de dos particiones, cabe señalar que se omite la demostración, una demostración completa se encuentra en [6, lem. 3.2.3].

Proposición 3.4 ([5]). *Sea n un entero positivo. Si $\vec{\alpha}, \vec{\alpha}' \in \mathcal{L}_n$, entonces el ínfimo esta definido por $\vec{\alpha} \wedge \vec{\alpha}' = \vec{\beta}$, donde $\vec{\beta} = (b_1, \dots, b_n)$ con*

$$b_i = \text{mín} \left(\sum_{j=1}^i a_j, \sum_{j=1}^i a'_j \right) - \sum_{j=1}^{i-1} b_j \text{ para } i \in \{1, \dots, n\}^1. \quad (2)$$

Ejemplo 3.5. Sean $\vec{\alpha} = (5, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ y $\vec{\alpha}' = (4, 3, 0, 0, 0, 0, 0)$ dos particiones de \mathcal{L}_7 . Calculamos el ínfimo $\vec{\alpha} \wedge \vec{\alpha}'$:

$$\begin{aligned} b_1 &= \text{mín}(5, 4) - 0 = 4 \\ b_2 &= \text{mín}(5 + 1, 4 + 3) - 4 = 2 \\ b_3 &= \text{mín}(5 + 1 + 1, 4 + 3 + 0) - (4 + 2) = 1 \\ b_i &= \text{mín}(7, 7) - 7 = 0 \text{ para } i \in \{4, \dots, 7\}. \end{aligned}$$

¹Por convención en la notación, definimos $\sum_{j=1}^0 b_j = 0$.

De manera que $\vec{\alpha} \wedge \vec{\alpha}' = (4, 2, 1, 0, 0, 0, 0)$.

El resultado del ejemplo anterior se puede ver en el *diagrama de Hasse* del retículo \mathcal{L}_7 , el cual presentamos a continuación.

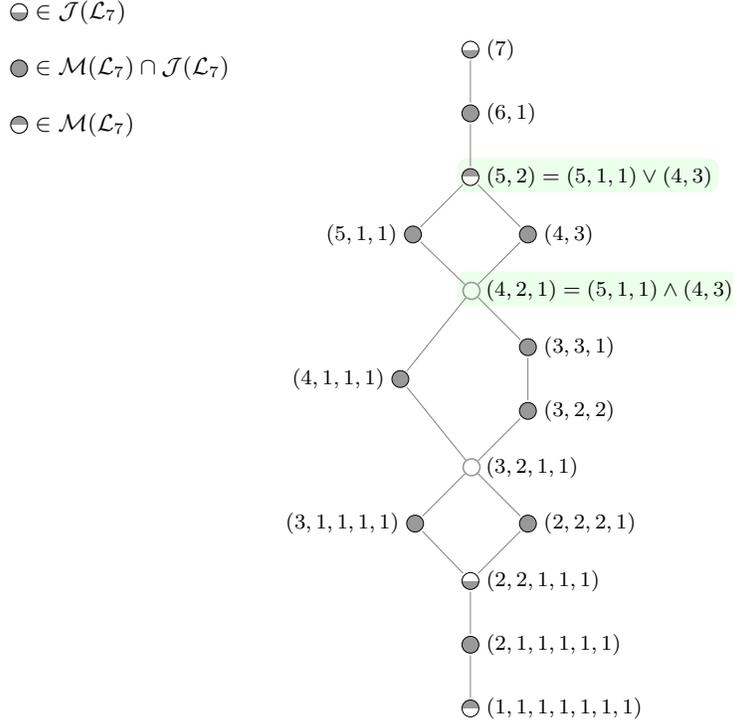


Figura 3. Diagrama de Hasse de \mathcal{L}_7 .

Ya vimos que la partición conjugada (dual) $\vec{\alpha}^*$ de una partición $\vec{\alpha}$, es nuevamente una partición y como en un retículo el dual del ínfimo es el supremo, se tiene que el **supremo** de dos particiones $\vec{\alpha}$ y $\vec{\alpha}'$ de un entero positivo n , se calcula con la fórmula siguiente

$$\vec{\alpha} \vee \vec{\alpha}' = (\vec{\alpha}^* \wedge (\vec{\alpha}')^*)^*. \tag{3}$$

Ejemplo 3.6. Sean $\vec{\alpha} = (5, 1, 1)$ y $\vec{\alpha}' = (4, 3)$ dos particiones de \mathcal{L}_7 , para calcular el supremo de estas particiones, primero se calcula el dual de cada una de las particiones, así, $\vec{\alpha}^* = (3, 1, 1, 1, 1)$ y $(\vec{\alpha}')^* = (2, 2, 2, 1)$. Luego utilizando la ecuación (3) y la proposición 3.4 obtenemos que

$$\begin{aligned} (5, 1, 1) \vee (4, 3) &= ((5, 1, 1)^* \wedge (4, 3)^*)^* = ((3, 1, 1, 1, 1) \wedge (2, 2, 2, 1))^* \\ &\stackrel{3.4}{=} (2, 2, 1, 1, 1)^* = (5, 2). \end{aligned}$$

El resultado anterior se puede ver en la figura 3.

Caracterizar a *la relación de cobertura* es uno de los principales objetivos en el estudio de un retículo finito, ya que a partir de ella podemos

construir a los diagramas de Hasse. Brylawski [5, prop. 2.3] caracterizó la relación de cobertura a través de dos posibilidades de movimiento descendente a lo largo de las particiones de \mathcal{L}_n . Posteriormente, Latapy and Phan [12, fig. 2, p. 1358] le dieron una interpretación geométrica y aproximación dinámica más intuitiva a esas posibilidades de movimientos, las cuales llamaron *reglas de transición*, que vamos a seguir en este artículo. Dichas reglas de transición han tenido aplicaciones en los modelos dinámicos de pilas de arena tratados en [11, p. 527]. Un ejemplo de estos modelos se encuentra al final del artículo. Para mostrar las reglas de transición se requieren las siguientes definiciones, que tienen su representación geométrica en la figura 4.

Definición 3.7 ([12]). Para una partición $\vec{\alpha} = (a_1, \dots, a_k)$, la **diferencia de altura** de $\vec{\alpha}$ en j , denotada por $d_j(\vec{\alpha})$, es el entero $a_j - a_{j+1}$. Diremos que la partición $\vec{\alpha} = (a_1, \dots, a_k)$ tiene:

1. Un **acantilado** en j si $d_j(\vec{\alpha}) \geq 2$.
2. Una **meseta resbaladiza** en j si existe un $k > j$ tal que $d_i(\vec{\alpha}) = 0$ para todo $i \in \{j, j + 1, \dots, k - 1\}$ y $d_k(\vec{\alpha}) = 1$. El entero $k - j$ es llamado la *longitud* de la meseta resbaladiza en j .
3. Una **meseta no resbaladiza** en j si $d_i(\vec{\alpha}) = 0$ para todo i que pertenece a $\{j, j + 1, \dots, k - 1\}$ y tiene un acantilado en k . El entero $k - j$ es la **longitud** de la meseta no resbaladiza en j .
4. Un **paso resbaladizo** en j si $\vec{\alpha}' = (a_1, \dots, a_j - 1, \dots, a_k)$ es una partición con una meseta resbaladiza en j .
5. Un **paso no resbaladizo** en j si $\vec{\alpha}' = (a_1, \dots, a_j - 1, \dots, a_k)$ es una partición con una meseta no resbaladiza en j .

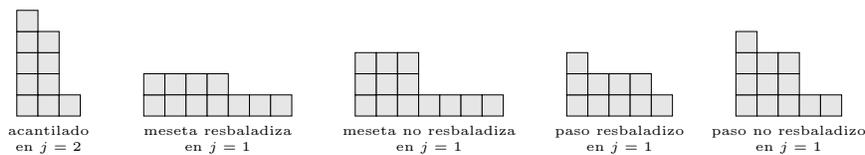


Figura 4. La meseta resbaladiza y el paso resbaladizo tienen una longitud 3, la meseta no resbaladiza y el paso no resbaladizo tienen longitud 2.

Definición 3.8 (Reglas de transición, cf. [5, 12]). Sea n un entero positivo y $\vec{\alpha} \in \mathcal{L}_n$.

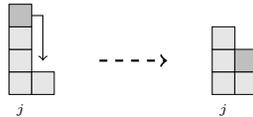
- (1) Si $\vec{\alpha} = (\dots, k+1, k, \dots, k, k-1, \dots)$ para algún $k > 0$ con $1 \leq k < n$ tiene un *paso resbaladizo*, entonces el grano en el paso resbaladizo se desliza hasta obtener $\vec{\alpha} = (\dots, k, k, \dots, k, k, \dots)$.

El siguiente diagrama muestra la aplicación de esta transición al paso resbaladizo en la posición j (con $i \geq j + 2$).



(2) Si $\vec{\alpha} = (\dots, k, k - h, \dots)$ para algún k, h con $2 \leq h \leq k \leq n$ tiene un acantilado, entonces el grano cae del acantilado para obtener $\vec{\alpha} = (\dots, k - 1, k - h + 1, \dots)$.

A continuación se ejemplifica esta transición con un acantilado de altura 3 en la posición j .



Dada una partición $\vec{\alpha} \in \mathcal{L}_n$, si se le aplica a $\vec{\alpha}$ la primera o la segunda regla de transición cada vez que $\vec{\alpha}$ tiene un paso resbaladizo o un acantilado, entonces, se obtienen las particiones $\vec{\beta}$ tal que $\vec{\beta} \prec \vec{\alpha}$, como lo muestra el siguiente lema. La figura 5 ilustra el resultado para la partición $(4, 2, 1)$.

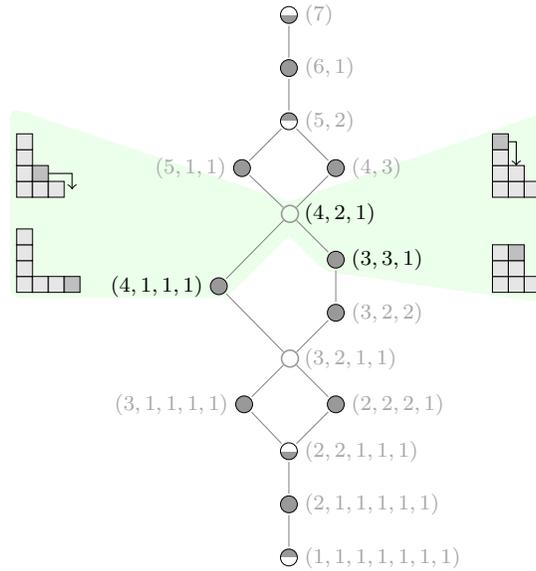


Figura 5. Retículo de \mathcal{L}_7 y reglas de transición aplicadas a la partición $(4,2,1)$.

Lema 3.9 ([5, prop. 2.3] y [12]). *El conjunto de los vecinos inferiores de una partición $\vec{g} \in \mathcal{L}_n$ consiste exactamente de todas las particiones \vec{g} que pueden ser obtenidas de \vec{g} aplicando alguna de las dos reglas de transición (1) o (2) descritas en la definición 3.8.*

3.1 Características estructurales del retículo \mathcal{L}_n

En esta sección además de ver la relación entre los elementos \mathcal{L}_{n+1} y los elementos de \mathcal{L}_n , veremos algunas características estructurales del retículo \mathcal{L}_n .

Observe que, en general, el retículo \mathcal{L}_n no es una cadena. Sin embargo, resulta que $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4$ y \mathcal{L}_5 sí lo son.

Lema 3.10 ([6]). *Si $n \in \{1, \dots, 5\}$, entonces \mathcal{L}_n es una cadena.*

Demostración. \mathcal{L}_1 tiene un solo elemento. Basta notar que los elementos de cada uno de estos conjuntos están ordenados de la siguiente manera:

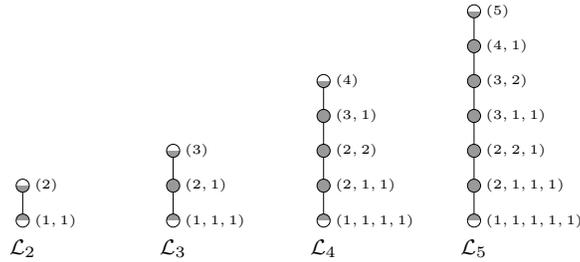
$\mathcal{L}_2: (1, 1) \leq (2).$

$\mathcal{L}_3: (1, 1, 1) \leq (2, 1) \leq (3).$

$\mathcal{L}_4: (1, 1, 1, 1) \leq (2, 1, 1) \leq (2, 2) \leq (3, 1) \leq (4).$

$\mathcal{L}_5: (1, 1, 1, 1, 1) \leq (2, 1, 1, 1) \leq (2, 2, 1) \leq (3, 1, 1) \leq (3, 2) \leq (4, 1) \leq (5).$

Los diagramas de Hasse de \mathcal{L}_n con $n \in \{2, \dots, 5\}$ son:



□

A continuación mostramos como construir los elementos de \mathcal{L}_{n+1} a partir de los elementos de \mathcal{L}_n .

Suponga que $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ es una partición de n . Una forma sencilla de construir una partición de $n + 1$ a partir de $\vec{\alpha}$ es agregando un *grano* en su primera entrada, es decir, $(a_1 + 1, a_2, \dots, a_n, 0)$ será una partición de $n + 1$. A dicha partición la denotamos por $\vec{\alpha}^{\downarrow 1}$. Por lo tanto, si $\vec{\alpha} \in \mathcal{L}_n$, entonces $\vec{\alpha}^{\downarrow 1} \in \mathcal{L}_{n+1}$. De lo que se sigue que $\mathcal{L}_n^{\downarrow 1} := \{\vec{\alpha}^{\downarrow 1} : \vec{\alpha} \in \mathcal{L}_n\}$ es un subconjunto de \mathcal{L}_{n+1} , al que podemos tratar como un conjunto parcialmente ordenado con el orden de dominación heredado de \mathcal{L}_{n+1} . Como veremos a continuación, $\mathcal{L}_n^{\downarrow 1}$ es un *subretículo* de \mathcal{L}_{n+1} isomorfo a \mathcal{L}_n . Esto quiere decir que, en cierto sentido, una copia de \mathcal{L}_n existe en \mathcal{L}_{n+1} .

Lema 3.11 ([4]). *\mathcal{L}_n es isomorfo a $\mathcal{L}_n^{\downarrow 1}$ para toda $n \geq 1$.*

Demostración. Sea $\varphi: \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{L}_n^{\downarrow 1}$ definida por $\varphi(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha}^{\downarrow 1}$. Claramente φ es inyectiva. Ya que $\varphi[\mathcal{L}_n] = \mathcal{L}_n^{\downarrow 1}$, obtenemos que φ es biyectiva. Para mostrar que φ es un isomorfismo de orden, sean $\vec{\alpha} = (a_1, \dots, a_n)$

y $\vec{\beta} = (b_1, \dots, b_n)$ elementos de \mathcal{L}_n . Entonces $\vec{\alpha}^{\downarrow 1} = (a'_1, \dots, a'_{n+1})$, $\vec{\beta}^{\downarrow 1} = (b'_1, \dots, b'_{n+1})$, donde $a'_1 = a_1 + 1$, $b'_1 = b_1 + 1$, $a'_{n+1} = b'_{n+1} = 0$ y $a'_i = a_i$, $b'_i = b_i$ para todo $i \in \{2, \dots, n\}$, y se sigue que

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \leq \vec{\beta} &\iff \sum_{i=1}^j a_i \leq \sum_{i=1}^j b_i \text{ para todo } j \in \{1, \dots, n\} \\ &\iff 1 + \sum_{i=1}^j a_i \leq 1 + \sum_{i=1}^j b_i \text{ para todo } j \in \{1, \dots, n\} \\ &\iff \sum_{i=1}^j a'_i \leq \sum_{i=1}^j b'_i \text{ para todo } j \in \{1, \dots, n+1\} \\ &\iff \vec{\alpha}^{\downarrow 1} \leq \vec{\beta}^{\downarrow 1}. \quad \square \end{aligned}$$

En la figura 6 mostramos los diagramas de los retículos \mathcal{L}_6 y \mathcal{L}_7 y la biyección entre de los elementos de \mathcal{L}_6 y $\mathcal{L}_6^{\downarrow 1} \subset \mathcal{L}_7$.

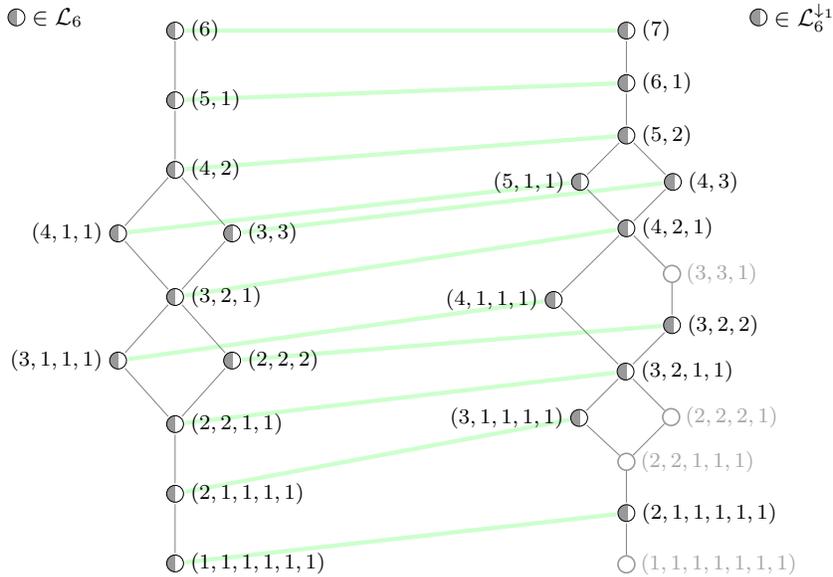


Figura 6. Retículos \mathcal{L}_6 , \mathcal{L}_7 y $\mathcal{L}_6^{\downarrow 1}$ encajado.

Proposición 3.12 ([12]). *El conjunto $\mathcal{L}_n^{\downarrow 1}$ forma un subretículo de \mathcal{L}_{n+1} para todo $n \geq 1$.*

Usaremos $\mathbb{K} \succ \mathbb{L}$ para indicar que el retículo \mathbb{L} tiene un subretículo isomorfo al retículo \mathbb{K} . Esta relación de incrustación es transitiva, es decir, si $\mathbb{K} \succ \mathbb{L} \succ \mathbb{M}$, entonces $\mathbb{K} \succ \mathbb{M}$. Más aún, del lema 3.11 y proposición 3.12 obtenemos que $\mathcal{L}_n \succ \mathcal{L}_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}_+$.

Dedekind escribió en [3] a finales del siglo XIX, sobre retículos a los que llamaba *Dualgruppen*. En dicho artículo se percató de que ciertos retículos satisfacían una identidad conocida como *la identidad de modularidad* e incluso una identidad más fuerte conocida como *la identidad de distributividad*. Los retículos que satisfacen estas identidades tienen propiedades interesantes (véase [7, p. 89]) por lo que si se trabaja con algún retículo es importante determinar si éste es modular o distributivo. Precisamos a lo que nos referimos con las siguientes definiciones.

Definición 3.13. Sea \mathbb{L} un retículo. Decimos que \mathbb{L} es **distributivo** si para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{L}$ se satisface:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \quad (4)$$

Por otro lado, decimos que \mathbb{L} es **modular** si para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{L}$ se cumple que:

$$c \leq a \implies a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c \quad (5)$$

La identidad (4) es conocida como **la identidad de distributividad** y (5) como **la identidad de modularidad**.

Observe que si $c \leq a$, se sigue que $a \wedge c = c$. En consecuencia, si \mathbb{L} es distributivo, entonces es modular. La inversa de esta proposición no se cumple, ya que existen retículos que son modulares pero no son distributivos, como lo es el retículo \mathbb{M}_3 de la figura 1. Una inspección de cada caso convencerá al lector de que \mathbb{M}_3 es modular, sin embargo, no es distributivo, ya que

$$p \wedge (q \vee r) = p \wedge 1_{\mathbb{L}} = p \neq 0_{\mathbb{L}} = 0_{\mathbb{L}} \vee 0_{\mathbb{L}} = (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

También hay retículos que no son distributivos ni modulares, por ejemplo el retículo \mathbb{N}_5 de la figura 1. En lo que sigue estudiaremos las identidades de modularidad y distributividad en los retículos \mathcal{L}_n para todo $n \geq 1$.

Lema 3.14 ([4]). *Si $n \geq 7$, entonces \mathcal{L}_n es no-modular y no-distributivo.*

Demostración. En la figura 6 el conjunto

$$\{(4, 2, 1), (4, 1, 1, 1), (3, 3, 1), (3, 2, 2), (3, 2, 1, 1)\} \subseteq \mathcal{L}_7$$

es un subretículo isomorfo a \mathbb{N}_5 . Por lo tanto, para $n \geq 7$ por el lema 3.11 y la proposición 3.12 tenemos que

$$\mathbb{N}_5 \succ \mathcal{L}_7 \succ \mathcal{L}_8 \succ \dots \succ \mathcal{L}_{n-1} \succ \mathcal{L}_n.$$

Por transitividad se sigue que $\mathbb{N}_5 \succ \mathcal{L}_n$. De este modo, aplicando el teorema $\mathbb{M}_3\text{-}\mathbb{N}_5$ que se encuentra en [7, p. 89] a \mathcal{L}_n , obtenemos que \mathcal{L}_n es no-modular y no-distributivo. \square

En el lema 3.10 vimos que si $n \in \{1, \dots, 5\}$, entonces, los retículos \mathcal{L}_n forman una cadena bajo el orden de dominación, de esto se sigue que estos no tienen subretículos isomorfos a \mathbb{N}_5 o \mathbb{M}_3 . Además en la figura 6 podemos verificar que el retículo \mathcal{L}_6 tampoco tiene subretículos isomorfos a \mathbb{N}_5 o \mathbb{M}_3 . Por lo tanto para $n \in \{1, \dots, 6\}$ los retículos \mathcal{L}_n son distributivos y por ende modulares.

3.2 Elementos supremo-irreducibles e ínfimos irreducibles de \mathcal{L}_n

Como ya lo mencionamos en la introducción determinar el número de elementos en \mathcal{L}_n es un problema que ha cautivado a los matemáticos por años. Por lo tanto, es natural preguntar sobre el número de los elementos que son \vee -irreducibles o \wedge -irreducibles. Para estudiar el crecimiento de estos elementos es suficiente con conocer el crecimiento de $|\mathcal{J}(\mathcal{L}_n)|$, ya que la función que a toda partición la mapea a su partición conjugada $*$ es un *automorfismo dual* de retículos (véase [5] para la demostración de esto último) y de ello se sigue que $\mathcal{J}(\mathcal{L}_n)^* = \mathcal{M}(\mathcal{L}_n)$. Por lo tanto $|\mathcal{J}(\mathcal{L}_n)| = |\mathcal{M}(\mathcal{L}_n)|$. En la siguiente tabla presentamos $|\mathcal{J}(\mathcal{L}_n)|$ para $1 \leq n \leq 8$. El patrón aparente en la última columna sugiere una relación entre $|\mathcal{J}(\mathcal{L}_n)|$ y $|\mathcal{J}(\mathcal{L}_{n+1})|$, la cual fue demostrada en [4] por Mike Behrisch y coautores.

n	$ \mathcal{L}_n $	$ \mathcal{M}(\mathcal{L}_n) $	$ \mathcal{J}(\mathcal{L}_n) $	$ \mathcal{J}(\mathcal{L}_{n+1}) - \mathcal{J}(\mathcal{L}_n) $
1	1	0	0	1
2	2	1	1	1
3	3	2	2	2
4	5	4	4	2
5	7	6	6	2
6	11	8	8	3
7	15	11	11	3
8	22	14	14	3

Debido a que en retículos finitos los elementos \vee -irreducibles pueden ser caracterizados como aquellos que cubren exactamente un elemento, en \mathcal{L}_n estos son aquellos que tienen exactamente un acantilado (y no un paso resbaladizo) o exactamente un paso resbaladizo (y no un acantilado). Los elementos \vee -irreducibles de \mathcal{L}_n fueron descritos por Brylawski en [5] y estos se enlistan en el siguiente lema.

Lema 3.15 ([5, cor. 2.5]). *Para $n \geq 1$ las particiones \vee -irreducibles de $\mathcal{J}(\mathcal{L}_n)$ pueden ser categorizadas en cuatro tipos donde $m, \ell, s \geq 1$:*

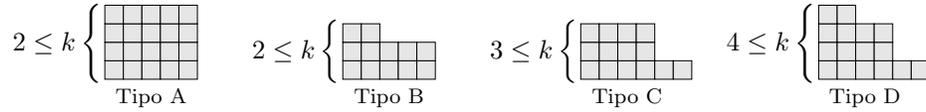
Tipo A: $(\overset{m}{k}, k, \dots, k)$ para $k \geq 2$.

Tipo B: $(k, k, \dots, \overset{m}{k}, k - 1, k - 1, \dots, \overset{m+\ell}{k - 1})$ para $k \geq 2$.

Tipo C: $(\overset{m}{k}, k, \dots, k, 1, 1, \dots, \overset{m+\ell}{1})$ para $k \geq 3$.

Tipo D: $(k, \dots, \overset{m}{k}, k-1, \dots, \overset{m+\ell}{k-1}, 1, \dots, \overset{m+\ell+s}{1})$ para $k \geq 4$.

Esto puede visualizarse como sigue:



En términos generales y saltándonos varios detalles técnicos, cuando agregamos un grano a cada elemento de $\mathcal{J}(\mathcal{L}_n)$ y aplicamos las reglas de transición de la definición 3.8 generamos los elementos de \mathcal{L}_{n+1} desde \mathcal{L}_n . Si contamos los elementos de $\mathcal{J}(\mathcal{L}_{n+1})$ en términos de los de $\mathcal{J}(\mathcal{L}_n)$, entonces obtenemos el siguiente teorema que revela el patrón que aparece en la última columna de la tabla presentada al inicio de la sección. La demostración del teorema que sigue se encuentra en [4], no se presenta aquí porque es técnica y requiere de un análisis de varios casos.

Teorema 3.16 ([4, teo. 16]). *Empezando con $|\mathcal{J}(\mathcal{L}_1)| = 0$, para cada $n \geq 1$ tenemos la siguiente fórmula de recursión*

$$|\mathcal{J}(\mathcal{L}_{n+1})| = |\mathcal{J}(\mathcal{L}_n)| + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1,$$

donde $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ es el mayor entero que es menor que o igual a $\frac{n}{3}$.

De este último teorema obtenemos la siguiente fórmula cerrada para la cardinalidad de $\mathcal{J}(\mathcal{L}_{n+1})$, es decir, podemos calcular $|\mathcal{J}(\mathcal{L}_{n+1})|$ en términos de n .

Corolario 3.17 ([4]). *Para todo $n \in \mathbb{N}_+$ tenemos que*

$$|\mathcal{J}(\mathcal{L}_{n+1})| = n \left(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1 \right) - \frac{3}{2} \lfloor \frac{n}{3} \rfloor^2 - \frac{1}{2} \lfloor \frac{n}{3} \rfloor.$$

Más aún, la fórmula anterior se simplifica a la que dio Ganter en [8, prop. 3].

Terminaremos este artículo con la siguiente sección donde daremos una aplicación de las reglas de transición vistas en la definición 3.8 antes de iniciar la sección 3.1.

3.3 Aplicación de las reglas de transición en particiones

Ejemplo 3.18 ([1]). En logística a lo largo de una cadena de mando o de una producción en serie, las particiones $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{L}_n$ pueden modelar la distribución de cargas de trabajo $a_i \geq 0$ (con una carga total de n trabajos) como se muestra a continuación.

En una cadena de mando se tiene que el agente subordinado $i + 1$ siempre puede cubrir como máximo tantas tareas como su superior i . Es decir $a_{i+1} \leq a_i$, esta situación puede ser porque el superior tiene

mejor acceso a los recursos. También el superior puede delegar una tarea a su subordinado directo siempre y cuando se satisfaga la condición de monotonicidad de la definición 3.1. Esto es, una delegación directa de trabajo solo es posible si $a_i - 1 \geq a_{i+1} + 1$, o equivalentemente $a_i \geq a_{i+1} + 2$, dicha delegación de trabajo se puede modelar mediante la transición (2).

Si dos posiciones adyacentes en la cadena de mando tienen la misma carga de trabajo, $a_i = a_{i+1}$, entonces no puede haber delegación alguna de trabajo ya que se debe mantener la monotonicidad de la definición 3.1, sin embargo, en el caso restante, cuando $a_i = a_{i+1} + 1$, la delegación puede ser posible en la siguiente situación: Si el superior tiene que cubrir una tarea más que su subordinado (y también que un número finito de subordinados posteriores a él), esto es si se cumple que

$$a_i - 1 = a_{i+1} = \dots = a_{i+l-1} > a_{i+l}$$

para algún $l \geq 2$, entonces el superior puede traspasar una tarea hasta el final al subordinado $i + l$ bajo la condición de que $a_{i+l-1} \not\geq a_{i+l} + 2$, es decir, ese agente $i + l - 1$ no puede transferir directamente una tarea a su subordinado. El permitir la propagación indirecta de tareas corresponde precisamente a la transición (1).

El lema 3.9 muestra que la dinámica de cambiar tareas de esta manera se describe moviéndose hacia abajo en \mathcal{L}_n a lo largo de la relación de cobertura. La evolución de tales modelos dinámicos (modelos de pilas de arena) es discutido, por ejemplo en [9] y [11], este último solo permite transiciones del tipo (2), ya que la delegación directa siempre es preferible, ya que transmitir una tarea a lo largo de la cadena es más complicado o costoso, potencialmente proporcional a l .

Ejemplo 3.19. Un caso particular es la distribución de la tarea de comprimir $n = 100$ imágenes, de dimensiones iguales, entre 8 procesadores. Una distribución uniforme del trabajo esta dada por una partición $(13, 13, 13, 13, 12, 12, 12, 12)$, es decir, las posiciones a_i representan el número de imágenes comprimidas por el procesador $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$. El tiempo de solución de la tarea completa sería proporcional a la altura $a_1 = 13$ de la partición y no existe una partición con menor altura y 8 entradas.

En general, una distribución uniforme de n tareas, de complejidad idéntica, entre $w \in \mathbb{N}_+$ ($w < n$) procesadores, se puede obtener usando la descomposición calculando n módulo w que da $n = hw + r$ para algún $0 \leq r < h$. Esta da la partición $p = (h + 1, \dots, h + 1, \overset{r}{h}, \dots, \overset{w}{h})$ que siempre es una partición irreducible del tipo A o B en lema 3.15.

Bibliografía

- [1] A. Almazaydeh, M. Behrisch, E. Vargas-García, y A. Wachtel, «Arrow relations in lattices of integer partitions», *International Journal of Approximate Reasoning* vol. 172 (2024) 109244, doi:10.1016/j.ijar.2024.109244.
- [2] G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*, no. 2, Cambridge University Press, 1998.
- [3] H. Beckurts y R. Dedekind, «Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Teiler», *Fest-Schrift der Herzoglichen Technischen Hochschule Carolo-Wilhelmina: Dargeboten den Naturwissenschaftlichen Theilnehmern an der 69. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte vom Herzogl. Braunsch. Staats-Ministerium* (1897) 1–40.
- [4] M. Behrisch, A. Chavarri Villarello, y E. Vargas-García, «Representing Partition Lattices through FCA», en *Formal Concept Analysis – 16th International Conference, ICFCA 2021, Strasbourg, France, June 29 – July 2, 2021, Proceedings*, A. Braud, A. Buzmakov, T. Hanika, y F. Le Ber, eds., Lecture Notes in Artificial Intelligence, tomo 12733, Springer, 2021, doi:10.1007/978-3-030-77867-5, 3–19.
- [5] T. Brylawski, «The lattice of integer partitions», *Discrete Math.* vol. 6 (1973) 201–219, doi:10.1016/0012-365X(73)90094-0.
- [6] A. Chavarri Villarello, «El retículo de particiones de enteros positivos y su contexto estándar», Tesis de licenciatura con mención honorífica, ITAM, Río Hondo 1, Ciudad de México, julio 2020.
- [7] B. A. Davey y H. A. Priestley, *Introduction to lattices and order*, Cambridge university press, 2002.
- [8] B. Ganter, «Notes on integer partitions», en *15th International Conference on Concept Lattices and Their Applications*, F. J. Valverde-Albacete y M. Trnecka, eds., CEUR Workshop Proceedings, tomo 2668, CEUR-WS.org, 2020, 19–31.
- [9] E. Goles, M. Morvan, y P. T. H. Duong, «Sandpiles and order structure of integer partitions», *Discrete Appl. Math.* vol. 117 (2002) 51–64, doi:10.1016/S0166-218X(01)00178-0.
- [10] G. H. Hardy y S. Ramanujan, «Asymptotic formulæ in combinatory analysis», *Proceedings of the London Mathematical Society* vol. 2 (1918) 75–115, doi:10.1112/plms/s2-17.1.75.
- [11] M. Latapy, R. Mantaci, M. Morvan, y P. T. H. Duong, «Structure of some sand piles model», *Theoret. Comput. Sci.* vol. 262 (2001) 525–556, doi:10.1016/S0304-3975(00)00363-7.
- [12] M. Latapy y T. H. D. Phan, «The lattice of integer partitions and its infinite extension», *Discrete Math.* vol. 309 (2009) 1357–1367, doi:10.1016/j.disc.2008.02.002.
- [13] D. Mahnke, *Leibniz auf der Suche nach einer allgemeinen Primzahlgleichung.*, *Bibl. Math.* (3), 1912–1913, <https://www.ophen.org/pub-102519>.
- [14] N. e. Sloane, «The on-line encyclopedia of integer sequences. Sequence A000041», OEIS Foundation, <https://oeis.org/A000041>, Online; accessed 30 April 2024.