Miscelánea Matemática **47** (2008) 63–65 SMM

Primos consecutivos y algunas consecuencias de los teoremas de Sylow

Julio Cesar Salas Torres

Departamento de Matemáticas, UAM-I

México, D. F. 09340

salas@esfm.ipn.mx

En los cursos usuales de teoría de grupos en las licenciaturas de matemáticas, uno de los puntos culminantes es la demostración de los recíprocos parciales del teorema de Lagrange, a saber, los teoremas de Sylow, y después se introducen aplicaciones sobre grupos de orden pequeño, por ejemplo, se demuestra que los grupos de orden $45 = (3^2)(5)$ o $175 = (5^2)(7)$ son abelianos. Estos son casos espaciales del teorema siguiente y cuya demostración sólo requiere resultados del mismo nivel y que sí se suelen demostrar en los citados cursos:

Proposición 1 *Sean G un grupo finito y $p < q$ primos consecutivos.*

1. *Si $|G| = pq$ y $3 \leq p$, entonces G es cíclico.*

2. *Si $|G| = p^2q$ y $3 \leq p$, entonces G es abeliano.*

3. *Si $|G| = p^2q^2$ y $5 \leq p$, entonces G es abeliano.*

Para la demostración, comenzamos observando

i) Si $3 \leq p < q$, son primos consecutivos, entonces $p \nmid q - 1$. En efecto, por el Postulado de Bertrand, véase por ejemplo ([1], pp. 343 y 373), $p < q \leq 2p$ y por lo tanto $p \leq q - 1 < 2p$. Note ahora que si $p \mid q - 1$, se tendría $p = q - 1$, lo cual contradice el hecho de que p y q son impares. Se sigue que $p \nmid q - 1$.

ii) Similarmente se muestra que si p, q son primos consecutivos y $5 \leq p < q$, entonces $p \nmid q+1$, ya que por el Postulado de Bertrand, siendo p, q consecutivos se tiene que $p < q < 2p - 2 < 2p$, y por lo tanto $p < q + 1 < 2p$, y así $q + 1$ no puede ser múltiplo de p, es decir, $p \nmid q + 1$.

Demostración: La parte *1.* de la proposición es un resultado conocido válido siempre que $p < q$ y $p \nmid q-1$, véase por ejemplo ([2], pp. 96).
Para probar la parte *2.*, demostramos más generalmente que si $|G| = p^2q$ con $p < q$ y $p \nmid q-1$, entonces G es abeliano. La demostración de este hecho se reduce a mostrar que G sólo tiene dos subgrupos de Sylow. En efecto, Sea n_p el número de p-subgrupos de Sylow de G. Por el Tercer Teorema de Sylow tenemos que $n_p \mid q$ y $n_p \equiv 1 \mod p$. Luego $n_p \in \{1, q\}$. Si $n_p = q$ entonces $p \mid q-1$ lo cual no puede ser pues por hipótesis tenemos que $p \nmid q-1$. Por lo tanto $n_p = 1$.
Sea P el p-subgrupo de Sylow de G. Tenemos que $P \triangleleft G$ y $|P| = p^2$, luego P es abeliano. Ahora, sea n_q el número de q-subgrupos de Sylow de G. Por el mismo teorema de Sylow tenemos que $n_q \mid p^2$ y $n_q \equiv 1 \mod q$. Luego $n_q \in \{1, p, p^2\}$. Si $n_q = p^2$, entonces $q \mid p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$, como q es primo tenemos que $q \mid p-1$ ó $q \mid p+1$. Si suponemos que $q \mid p-1$ obtenemos una contradicción pues $p < q$. Si $q \mid p+1$, como $p < q$, tenemos $p+1 \leq q$ luego se sigue que $q = p+1$ el cual es par, contradicción. Si $n_q = p$ entonces $q \mid p-1$ lo cual es una contradicción pues $p < q$. Luego $n_q = 1$.
Sea Q el q-subgrupo de Sylow de G. Tenemos que $Q \triangleleft G$ con $|Q| = q$. Luego Q es cíclico y por lo tanto Q es abeliano.
Por otro lado, tenemos que $P \cap Q = \{e\}$ y así

$$|PQ| = \frac{|P||Q|}{|P \cap Q|} = \frac{p^2q}{1} = p^2q = |G|.$$

Como P, Q son subgrupos normales, tenemos $G \cong P \times Q$ el cual es un grupo abeliano, por lo tanto, G también es abeliano.
Para probar la parte *3.*, demostraremos más generalmente que si $|G| = p^2q^2$, con $p < q$ tales que $p \nmid q^2 - 1$, entonces G es abeliano. En efecto, sea n_p el número de p-subgrupos de Sylow de G. Por el Tercer Teorema de Sylow tenemos que $n_p \mid q^2$ y $n_p \equiv 1 \mod p$. Luego $n_p \in \{1, q, q^2\}$. Si $n_p = q^2$, entonces $p \mid q^2 - 1$ lo cual es una contradicción pues por hipótesis sabemos que $p \nmid q^2 - 1$. Si $n_p = q$ entonces $p \mid q-1$ lo cual no puede ser pues de $p \nmid q^2 - 1$. Tenemos que $p \nmid q-1$, por lo tanto $n_p = 1$.
Sea P el p-subgrupo de Sylow de G, tal que $P \triangleleft G$ con $|P| = p^2$. Luego P es abeliano. Argumentando como en la demostración de la proposición anterior tenemos que existe un único q-subgrupo de Sylow Q, el cual es normal en G y $|Q| = p^2$, luego Q es abeliano.
Finalmente, haciendo un análisis similar al de la demostración de la proposición anterior, concluimos que $G \cong P \times Q$ y por lo tanto, G es abeliano.

Finalmente, veremos que las condiciones anteriores sobre p, es decir, $p \geq 3$ o $p \geq 5$ son necesarias.

Observaciones

Es necesario pedir $p \geq 3$, pues si $p = 2$ y $q = 3$ tenemos el grupo simétrico S_3 de orden $6 = (2)(3)$ y el grupo alternante A_4 de orden $12 = (2^2)(3)$ que no son abelianos.

También, es necesario que p sea mayor o igual que 5. Si $p = 2$ y $q = 3$ tenemos el grupo diédrico D_{18} de orden $36 = (2^2)(3^2)$ que no es abeliano. Para el caso $p = 3$ y $q = 5$, observamos que existe un grupo no abeliano de orden $225 = (3^2)(5^2)$. Este grupo puede obtenerse como producto directo un grupo cíclico de orden 3 y un grupo no abeliano de orden 75, este último es un producto semidirecto (no directo) de $C_5 \times C_5$ y C_3.

Agradecimientos

Agradezco a la Dra. Martha Rzedowski Calderón y al Dr. Gabriel Villa Salvador por la revisión y comentarios hechos a este trabajo y especialmente por su apoyo.

Referencias

[1] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford, Fourth Edition, 1960.

[2] T. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag New York, Third Printing, 1984.

[3] F. Barrera *Introducción a la teoría de grupos*, SMM y Univ. Aut. de Hidalgo, México, 2005.

[4] F. Zaldívar *Introducción a la teoría de grupos*, SMM-Reverté, México, 2006.