Miscelánea Matemática **35** (2002) 29–48 SMM

¿Convenir para Jugar o Jugar para Convenir?

Paloma Zapata Lillo
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Exterior, C.U.
04510 México, D.F.
pzl@hp.fciencias.uanm.mx

Resumen

La teoría de juegos es un marco teórico adecuado para estudiar las "leyes" internas de los diversos conflictos humanos y puede resultar un importante instrumento de análisis en las ciencias que estudian estos conflictos. Con los juegos se pueden plantear muchos problemas parciales de la sociedad moderna, pero también problemas globales de ella, como el de la formación de instituciones o el del surgimiento de la moral y de las convenciones sociales. Peyton Young ha desarrollado, junto con otros autores, un interesante trabajo sobre estas últimas que exponemos en este artículo, con algunos ejemplos ilustrativos.

1 Del Carreño, de la Real Academia de la Lengua y de otras importantes autoridades.

Por poco convencionales que nos creamos, nuestra vida cotidiana está llena de reglas de convivencia que todos estamos dispuestos a seguir, pues esperamos, de todos los otros, que tambíen las seguirán. Son estas reglas las llamadas *convenciones*.

Convenciones se encuentran, no sólo en las "reglas de la buena educación", sino en todos los aspectos de una sociedad. El lenguaje mismo que le atribuye significado a las palabras, la existencia del alfabeto, etc. tienen un caracter convencional. La vida económica no podría desarrollarse sin la moneda y muchas otras reglas del mercado. ¿Por qué las aceptamos? ¿Por qué todo el mundo maneja por la derecha? ¿Por qué se está dispuesto a acatar las leyes jurídicas? ¿Por qué se decretaron esas y no otras leyes? y muchas preguntas más.

En cuanto a las "buenas costumbres", podríamos pensar en que la escuela, por un lado, y la familia por el otro, se han encargado de inculcarnos sólidos principios, los mismos que se han inculcado por generaciones. ¿Y quién convenció al sistema escolar y a los padres de familia de la bondad de las diversas reglas? ¿Personajes como el señor Carreño, quizá? Y a lo mejor en cuanto al lenguaje, el español desde luego, ¿fueron los sabios de la Real Academia de la Lengua quiénes *inventaron* las reglas que lo rigen? ¿Y en la conducta económica, política, etc?

Desde hace muchos años, diversas corrientes filosóficas y pensadores sociales han fundamentado que las convenciones que realmente se siguen en una sociedad, tengan o no la forma de leyes escritas, son la resultante de la acción tomada por los miembros de dicha sociedad, generalmente buscando objetivos muy distintos que los que se obtuvieron. Las leyes jurídicas y las respetadas autoridades en la materia son posteriores y también son un producto de dicha acción social. La teoría de juegos es un buen marco para modelar este tipo de problema, aunque, por supuesto, en una forma muy simplificada. En este trabajo presentaremos un interesante desarrollo de Peyton Young [6] sobre las Convenciones Sociales. Pero empecemos con un ejemplo

2 ¿Nosotros los pobres o ustedes los Burrón?

Tratemos de hacer un sencillo modelo matemático del espinoso conflicto entre los hombres y las mujeres, para empezar a discutir el problema.

Existe un famoso ejemplo de la teoría de juegos que lleva el sonoro nombre de *La Batalla de los Sexos*, lo que provoca frustaciones de todo el que lo aborda, tanto si piensa que se le presentará un tratamiento sobre la liberación femenina, como si le emociona enfrentarse a un modelo matemático de alguna sección del Kamasutra. Y en lugar de esos temas o de algún otro, igual de apasionante, se encuentra con la historia de un matrimonio que tiene un grave conflicto, pues a ella le gusta el ballet, mientras que él prefiere el box, por lo demás todo es simétrico y equitativo entre ellos. Tratemos nosotros de abordar una situación más cercana a nuestra idiosincracia, pero pensemos en que nos encontramos en el México de los años 40 o 50, así evitaremos suceptibilidades de todo tipo.

Simplificando enormemente, podemos decretar que un hombre de esa época, sólo tenía dos pautas de conducta, entre las que *podría elegir* en cada ocasión que tuviera que enfrentarse a una mujer, según pensara que le convendría una u otra. La primera de estas pautas de conducta o estrategias sería la representada por nuestro llorado Pedro Infante, en casi cualquiera de sus personajes, Pepe el Toro por ejemplo, macho entre los machos, nadie como él para enamorar a las mujeres. La segunda, la de un hombre comprensivo y cooperador, conducta poco respetada, nos referimos a aquella época ¡claro está!, por ello, nos cuesta trabajo encontrar un galán de la talla de Pedro Infante para representarla y tendremos que conformarnos con una caricatura como la de Don Regino, el de la Familia Burrón de Gabriel Vargas. Es decir, cada vez que un hombre entraba en conflicto con una mujer tenía que elegir la estrategia de actuar como un Pedro Infante o como un Regino Burrón.

Como es lógico, las conductas o estrategias que cada mujer podía decidir seguir, cuando se iba a relacionar con un hombre, se tipifican con las contrapartes. Así una mujer podría decidir que le convenía comportarse como una sufrida mujer mexicana, al estilo de La Chorreada (Blanca Estela Pavón) o podría decidir actuar en forma “argüendera” y rebelde como doña Borola Burrón.

Para saber cuál es la bondad de cada estrategia, relativa a la usada por el contrario, en el conflicto en que estarían envueltos un hombre y una mujer de los 40-50, tendríamos que conocer las “utilidades” que él y ella recibirían con los resultados provocados por la elección de cada pareja de estrategias, una del hombre y otra la de la mujer. ¿Cómo les iría a uno que hubiera escogido comportarse como Pepe el Toro y a una que eligió actuar como Borola, al enfrentarse? Él pasaría más de un coraje, mientras ella sacaría algunos huesos rotos. Seguramente en más de una ocasión, cada uno de ellos, habría pensado en cambiar de estrategia. A los que hubieran elegido conductas como la de Pepe y su Chorreada, les habría ido de película, él siempre cantando y de buen humor. Para ella, llantos y celos, pero que cosa no compensaba aquello de “Amorcito Corazón, yo tengo tentación...”. En esos momentos no se cambiaría por nadie. Si a uno que quiso hacerla de don Regino le hubiera tocado una que actuara de Chorreada, no cabe duda que sería más feliz que con la Borola, pero el gusanito de que las cosas le saldrían aún mejor al imitar a Pedro Infante acabaría por vencerlo, mientras que a la aspirante a Chorreada, después de suspirar frente a las escenas románticas de las películas de su ídolo, llegaría a la conclusión de que cambiando de estrategia, tendría la gran ventaja de ser ella quien "llevara los pantalones". Por último, si alguna se decidió por hacer su santa voluntad, como doña Borola, y le tocase en suerte alguien decidido a ser tan paciente como Job o como Don Regino, ella podría hacer y deshacer a su antojo, mientras él pensaría que "mejor no menealе". Pongamos números que desde nuestro punto de vista reflejan la "utilidad" que recibirían los dos contrincantes (hombre y mujer) en las diversas situaciones resultantes y, si al lector no le satisfacen, puede probar con otros.

$$
\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{ll}\text{La Borola } (B) & \text{La Chorreada } (Ch)\end{array} \\
\begin{array}{l}\text{Pepe el Toro } (P) \\ \text{Regino Burrón } (R)\end{array} & \begin{pmatrix} (-1,-10) & (5,2) \\ (0,5) & (1,4) \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Tratemos ahora, de describir cuáles parejas de estrategias son patrones de conducta estables, en este conflicto. Pero no nos interesa lo que pasaría en una pareja dada, sino dentro de una gran población de hombres y mujeres que se enfrentan repetidamente, por parejas, en el conflicto expresado en la matriz, así podremos hablar de una *convención social.*

Supongamos una población de hombres y mujeres que se enfrentan, periodo tras periodo, de tal manera, que en cada uno de tales periodos se lleva a cabo el conflicto de una sola pareja tomada al azar. Cada miembro de la pareja que tomará decisiones, en el periodo t, no sabe lo que hará su oponente, entonces se basará en la experiencia de lo ocurrido en periodos pasados, para calcular en qué forma debe actuar.

La forma en que se eligen las estrategias recuerda a la del algoritmo de juego ficticio, aunque con importantes diferencias. En el periodo $s+1$, $s \geq 1$, del juego ficticio aplicado a la matriz construida, los dos contrincantes, para decidir cuál es la estrategia que les conviene, cuentan con una capacidad de memoria absoluta, en el sentido de que saben perfectamente qué parejas de estrategias se escogieron desde el periodo 1 hasta el s, por grande que sea s. Entonces la mujer calcularía la frecuencia con que el hombre escogió cada una de sus dos estrategias P y R y el pago promedio que, las de su sexo, hubieran obtenido, en caso de haber escogido siempre B. Haría lo análogo para Ch y, entonces, en $s+1$, elegiría la estrategia para la que ese pago promedio es mayor lo que constituiría *su mejor respuesta.* Los hombres actuarían en forma semejante.

En cambio, *el proceso de adaptación de Young* es, como dice su autor, menos ficticio que el juego ficticio, ya que supone que las personas normales están llenas de limitaciones. En particular, no son capaces de obtener toda la información de lo ocurrido desde un periodo inicial, hasta el corriente. Además, ni siquiera tiene sentido hablar de un primer periodo, la memoria de dicho periodo se habría perdido en la noche de los tiempos. O sea, que en cada periodo de enfrentamiento, el conflicto ya se ha llevado una gran cantidad de veces, en el pasado y la sociedad guarda sólo memoria de la forma de comportarse de los hombres y las mujeres en los últimos m periodos. Así, cuando se efectúa el conflicto en un periodo t cualquiera, $t > m$ y la sociedad recuerda lo que ocurrió en $t-1$, $t-2$, ..., $t-m$. Después de que transcurra el conflicto en t, se olvidan las conductas del periodo más viejo $t-m$ y se añaden, a la memoria social, las seguidas en t, conservándose siempre, en dicha memoria, una historia de tamaño m.

Por ejemplo, dentro del conflicto que nos ocupa, en cualquier periodo t, se puede recordar la historia h, en la que el registro más viejo que guarde la sociedad sea tal que el hombre se comportó como un Pedro Infante y la mujer fue dócil y abnegada, es decir $h_1 = (P, Ch)$. El periodo siguiente, que se recordase podría consistir en que el hombre siguió en sus trece y la mujer decidió hacerle a la Borola, $h_2 = (P, B)$. Mientras que en el más reciente periodo, el hombre se había llenado de paciencia y a la mujer le seguía gustado el "argüende", por lo que $h_m = (R, B)$. Si en un nuevo periodo, la pareja actúa igual que en el más reciente de h, se pasaría a una historia h', en donde los registros serían $h'_1 = (P, B) = h_2$, $h'_2 = h_3$, ..., $h'_{m-1} = (R, B) = h_m$ y $h'_m = (R, B)$.

Los hombres y mujeres individuales, por su lado, tienen más limitaciones que la sociedad entera, ellos sólo se pueden informar de una pequeña porción de la experiencia social, con los medios muy parciales que están a su alcance. Así, por ejemplo, las mujeres de aquella época, como es de todos conocido, eran muy chismosas y, unas en el lavadero, otras en el mercado o en el "salón", platicaban con las comadres y las vecinas, y se enteraban de cosas importantes: "A Petra la dejó su marido, porque nomás anda de pata de perro", "Doña Meche se pasa de corajuda, el otro día hasta le pegó a su viejo que es re buena gente". Lo que se traducía en la obtención de la información de dos periodos de la memoria social que podemos formalizar como (P, B) y (R, B) respectivamente. Para otras, la información importante sólo se podía obtener de la experiencia de la mamá y de la abuelita que aseguraban que "en su época sí duraban los matrimonios, porque las mujeres tenían mucho aguante, los hombres, ya se sabe, siempre serán borrachos y parranderos". Ellas obtenían la información de algunos periodos viejos de la memoria social, todos ellos consistentes en (P, Ch). También estaban las novelas de la radio y los programas de la Doctora Corazón, en donde se podía adquirir mucha experiencia de tantos casos de hombres y mujeres. Por su lado, muchos hombres platicaban con sus cuates en la cantina de todas las cosas malas que eran capaces de hacer "las viejas" y de la forma idónea de tratarlas. Hasta los mariachis aportaban informaciones con sus canciones sobre la que se fue y la que quiso quedarse. Algunos preferían leer periódicos y revistas sobre el tema, etc. Por desgracia, todavía no existían los *talk-shows*, pero cada quién podía enterarse de un pequeño subconjunto de la historia recordada por la sociedad, obteniendo "una pequeña muestra" que, a falta del conocimiento de como actuaría su antagonista, le servía para tomar sus decisiones, cada vez que tenía que hacerlo.

Supongamos que la muestra que podía sacar cualquier individuo era de tamaño $k \leq m$. ¿Cómo podía usarse en la toma de decisiones? Una buena idea consiste en encontrar la estrategia que hubiese dado el mejor pago promedio a su sexo, si se hubiera elegido en los k periodos a consideración, bajo el supuesto de que el sexo opuesto actuó con las estrategias de la muestra. Esa sería *la mejor respuesta a la muestra*. Por el momento, pensemos que nadie se sale de esta forma de comportarse, es decir, no se cometen errores ni se experimenta. Entonces, el proceso de adaptación sobre el conflicto, con tamaño de memoria social m y tamaño de muestra k, consiste en asociar, a cada historia h de tamaño m, todas las historias a las que es posible pasar desde h, en un solo periodo. Es decir, historias que, por un lado, tienen consistencia de memoria con el hecho de venir de h, después de un solo periodo y, por otro lado, el periodo recordado más reciente, en las historias de llegada, debe ser una mejor respuesta, de parte de hombre y mujer, para algún par de subconjuntos de k periodos de los m que componen h. Con esto, se estaría suponiendo que, para cada η, subconjunto de k periodos de h, existen hombres y mujeres que tomaron como muestra a η.

El objetivo sería estudiar si existen historias o conjuntos de historias que representen situaciones estables en este proceso.

Si $m = 2$ y $k = 1$, podemos representar el proceso de "adaptación social", descrito hasta aquí, con la gráfica dirigida de la figura 1, cuyos vértices son las 16 historias de tamaño 2 y cuyas flechas son parejas de historias (h, h') tales que $h_2 = h'_1$ y existen "muestras de h" de tamaño 1, una para el hombre y otra para la mujer, para las que h'_2 está compuesta por las mejores respuestas de un hombre y una mujer respecto a dichas muestras.

Por ejemplo, si h es $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P,B) \\ (R,B) \end{pmatrix}$ se puede pasar a h', si $h'_1 = (R,B) = h_2$ y además $h'_2 = (R,B)$ o $h'_2 = (R,Ch)$ pues las dos muestras posibles de tamaño 1 de h son (R,B) y (P,B) y, para todas las combinaciones de una muestra para el hombre y otra para la mujer, las parejas de estrategias de mejores respuestas a dichas muestras, para hombre y mujer, son las mencionadas (R,B) y (R,Ch). Entonces h' puede ser $\begin{pmatrix} (R,B) \\ (R,B) \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} (R,B) \\ (R,Ch) \end{pmatrix}$.

En la gráfica, resaltan algunas historias especiales que son $h_{PCh} = \begin{pmatrix} (P,Ch) \\ (P,Ch) \end{pmatrix}$ y $h_{RB} = \begin{pmatrix} (R,B) \\ (R,B) \end{pmatrix}$. Estas son las únicas historias que tienen la propiedad de que desde cualquier historia h se llega a alguna de las dos, por el proceso de aprendizaje social representado en la gráfica. Es decir, existe una trayectoria dirigida que une a h con h_{PCh} o con h_{RB}. Además, si se ha llegado a h_{PCh}, o a h_{RB}, no existen flechas que empiecen en alguna de estas historias y terminen en otra distinta, por lo que ya no se puede salir de ellas, nunca más. La elección de m como 2 y de k como 1 perseguía el fin de obtener una gráfica relativamente pequeña, pero un resultado análogo se habría obtenido, con las h_{PCh} y h_{RB} correspondientes, si $k < m$ y k y m/k suficientemente grandes, lo que se aclarará posteriormente.

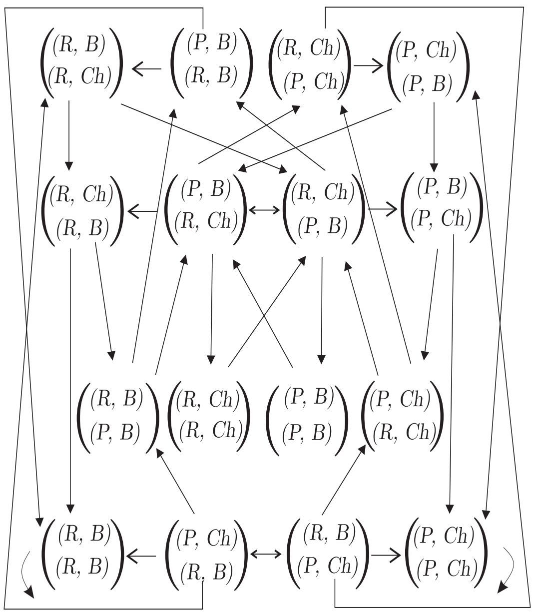

Figura 1

Otra interesante propiedad de h_{PCh} y de h_{RB} es que están formadas por la misma pareja de estrategias, periodo tras periodo. Eso quiere decir que cuando la sociedad alcanzaba una historia en donde sólo se recordaba que las mujeres se comportan como la Chorreada y los hombres como Pepe el Toro (o ellas como la Borola y ellos como don Regino), ésta se convertía en la regla esperada que todos los hombres y mujeres estaban dispuestos a seguir, es decir se habría llegado a una *convención social dentro del conflicto entre hombres y mujeres.*

Después de este análisis, podemos intuir que los patrones estables de conducta (convenciones) son las parejas formadas por Pepe el Toro y su Chorreada y por los señores Burrón, no en balde, las dos son parejas típicas. Aunque, hasta ahora, tanto derecho tiene la primera pareja, como la segunda, a considerarse convenciones posibles, sin ninguna ventaja de una sobre otra. Sin embargo sabemos que esto no era así, cualquier hombre o mujer de la época hubiera preferido formar parte de una pareja como la cinematográfica y no como la de la tira comíca. Veamos cómo discriminar entre ambas convenciones.

Introduzcamos, en nuestro análisis, la consideración de que las personas reales tienen tendencia a experimentar y a equivocarse, con cierta frecuencia. Decimos que una persona experimenta en este proceso, cuando escoge una estrategia distinta que la "mejor respuesta" a su muestra y, por otro lado, que alguien ha cometido un error respecto al proceso de adaptación, cuando no se puede justificar con ninguna muestra, del tamaño permitido, la respuesta que dicha persona ha dado. Así por ejemplo, volviendo al caso $m = 2$ y $k = 1$, si estando en $h = \begin{pmatrix} (P, B) \\ (R, B) \end{pmatrix}$ la mujer escogió como muestra $\eta = (R, B)$ y el hombre cualquiera de las dos muestras posibles, y se pasó a la historia $\begin{pmatrix} (R, B) \\ (P, Ch) \end{pmatrix}$, entonces la mujer realizó un experimento, pues no escogió lo mejor en relación a η, pero existe $\eta' = (P, B)$, respecto a la cual su respuesta es óptima. Por su lado, el hombre cometió un error, pues en las dos muestras posibles de h la mujer usó la estrategia B y, ante esto, el hombre debió haber escogido R y no P.

Si el tamaño de memoria es m y el de muestra es k y suponemos que cada persona puede experimentar y equivocarse, tenemos un proceso de adaptación perturbado que se puede representar con otra gráfica dirigida, con los mismos vértices que antes, pero con más flechas, pues ahora se puede pasar de una historia a otra también cometiendo errores. Entonces la pareja de historias (h, h') forma una flecha si y sólo si $h_i = h'_{i-1}$, para $i = 2, 3, ..., m$. h'_m puede ser cualquiera de las 4 parejas posibles, no importando si está formada por mejores respuestas de ambos participantes a alguna muestra o no. Esta nueva gráfica es conexa.

A cada flecha (h, h') de la digráfica perturbada le podemos asociar un costo, consistente en el número de errores que hay que cometer para pasar de h a h'. En nuestro ejemplo los costos de las flechas pueden ser 0, 1 o 2. Decimos que el costo de una trayectoria dirigida es igual a la suma de los costos de sus flechas. Nos interesa encontrar la historia h que requiere de menos errores en total para llegar hasta ella desde cualquier otra historia. Dada $h' \neq h$, pueden existir varias trayectorias que conecten a h' con h. Un $h-$árbol es una subdigráfica de la gráfica perturbada tal que, para cada $h' \neq h$, contiene una sola de las trayectorias que unen a h' con h. El costo de un $h-$árbol es la suma de los costos de todas sus flechas.

Para $m = 2$, $k = 1$ y $h = \begin{pmatrix} (R, Ch) \\ (P, B) \end{pmatrix}$. La figura 2 muestra uno de estos $h-$árboles, con los costos de cada flecha,

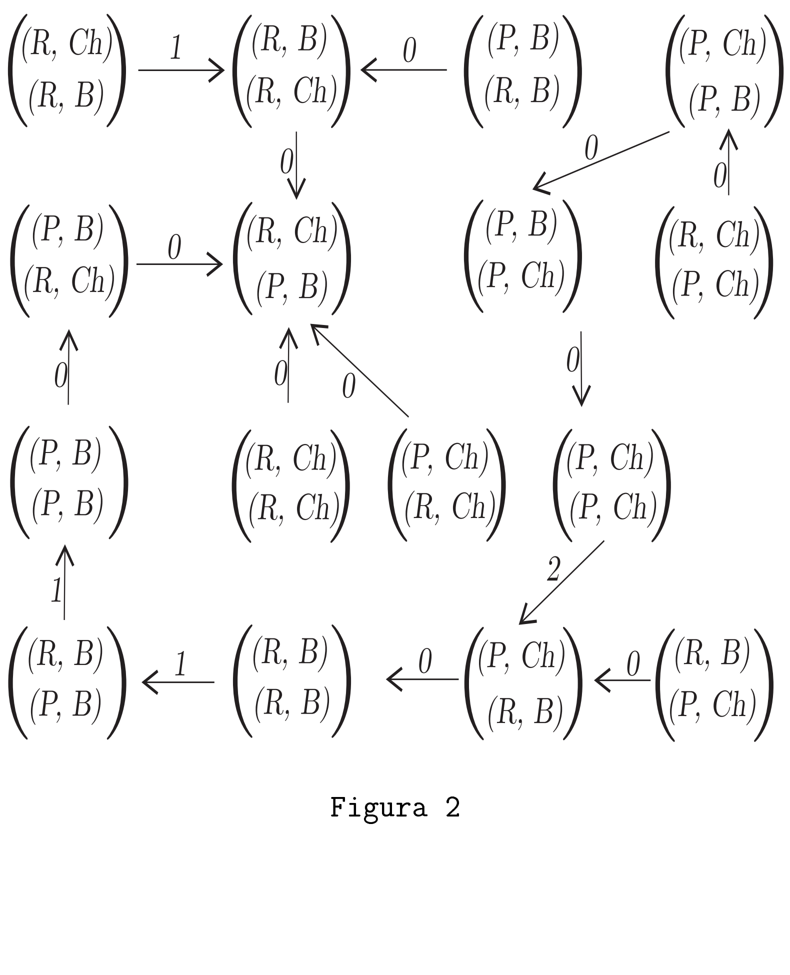

Figura 2

El costo total de dicho árbol es 5, no es el h-árbol de mínimo costo para llegar a $\begin{pmatrix} (R, Ch) \\ (P, B) \end{pmatrix}$. Pensemos por ejemplo, en uno que consista de trayectorias de costo cero que conducan a h_{PCh} o a h_{RB} y además de las trayectorias

$\begin{pmatrix} (R, B) \\ (R, B) \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} (R, B) \\ (R, Ch) \end{pmatrix} \xrightarrow{0} \begin{pmatrix} (R, Ch) \\ (P, B) \end{pmatrix}$ y

$\begin{pmatrix} (P, Ch) \\ (P, Ch) \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} (P, Ch) \\ (R, Ch) \end{pmatrix} \xrightarrow{0} \begin{pmatrix} (R, Ch) \\ (P, B) \end{pmatrix}$.

Este h-árbol tiene costo 2 que es el mínimo para llegar a la historia estudiada. Es claro que las historias que tienen h-árboles de mínimo costo son h_{PCh} y h_{RB}. Por ejemplo para la primera, construimos un árbol con trayectorias de costo cero que lleven hacia h_{PCh} o hacia h_{RB} y después la trayectoria $\begin{pmatrix} (R, B) \\ (R, B) \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} (R, B) \\ (R, Ch) \end{pmatrix}$. Esta última historia está conectada con una trayectoria de costo cero con h_{PCh}. El árbol que acabamos de describir tiene costo 1 que es el mínimo entre los de los $h_{PCh} - \acute{a}rboles$, la situación es análoga para h_{RB}, también el mínimo costo para llegar a h_{RB} desde cualquier historia es 1. En cambio cualquier otra historia, distinta de estas dos, requiere por lo menos de un costo de 2.

La introducción que acabamos de hacer al proceso de adaptación con errores sirve para dar una idea sobre dicho proceso, pero no resuelve el problema que teníamos consistente en decidir cuál de las dos convenciones del conflicto entre los hombres y las mujeres tiene una mayor atracción. Necesitamos para ello un tamaño de muestra y una razón entre el tamaño de memoria y el de muestra mayores que los usados.

Supongamos que estamos en un proceso de adaptación perturbado sobre el juego que hemos estado discutiendo y que los tamaños de memoria y de muestra son m y k, respectivamente. Situémonos en la historia $h_{PCh} = \begin{pmatrix} (P, Ch) \\ (P, Ch) \\ \dots \\ (P, Ch) \end{pmatrix}$. Si las mujeres, a partir de allí, no cometen errores o cometen relativamentemente pocos los hombres seguirán respondiendo con P para cualquier muestra. ¿Cuántos errores de las mujeres provocarían una muestra η, para la que la mejor respuesta de los hombres sea R? Si durante s periodos, $s \leq k$, las mujeres se han rebelado y han escogido B, en lugar de Ch, un hombre que contestara con R, a la muestra que contiene todos los errores, tendría un pago esperado de $\frac{k-s}{k}$, en cambio si escoge P, este pago sería $\frac{-6s+5k}{k}$. El primer pago es mayor o igual que el segundo si y sólo si $s \geqslant \frac{4}{5}k$. Ahora la pregunta es respecto al número mínimo de errores que deben cometer los hombres a partir de la historia h_{PCh}, para que la respuesta óptima de las mujeres a una muestra que incluya dichos errores sea B. Si denotamos con s' al número de errores de los hombres, resulta que si las mujeres escogen B, su pago esperado es $\frac{-10(k-s')+5s'}{k}$ y si escogen Ch es $\frac{2(k-s')+4s'}{k}$. Por lo que el primero es mayor que el segundo si y sólo si $s' \geqslant \frac{12}{13}k$. Entonces el mínimo de errores para pasar de h_{PCh} a h_{RB} es $\frac{4}{5}k$.

Procediendo análogamente, encontramos que para pasar de h_{RB} a h_{PCh}, las mujeres deben cometer por lo menos $\frac{1}{5}k$ de errores y los hombres $\frac{1}{13}k$. Entonces el mínimo de errores para pasar de h_{RB} a h_{PCh} es de $\frac{1}{13}k$. Es decir, el árbol de mínimo costo corresponde a h_{PCh} que representa la convención más atrayente.

Es claro que k y m/k tienen que ser suficientemente grandes, para que estos pasos tengan sentido. En la siguiente sección veremos la teoría que permite estudiar las convenciones en un conflicto cualquiera que se pueda expresar por un juego rectangular finito. Seguiremos un enfoque algo distinto que nos llevará al mismo tipo de ideas que hemos estado utilizando hasta ahora.

3 La Teoría de las Convenciones de Foster-Young.

Consideremos una población F muy grande, cuyos miembros se enfrentan repetidamente en un conflicto. Este conflicto se puede describir por a) el conjunto N de papeles o roles diferentes que hay en él, como el de hombre y mujer en el ejemplo inicial, b) la colección $\{D_j\}_{j\in N}$ de conjuntos de posibilidades de decisión, con que cuenta cada uno de los papeles (los elementos de D_j se llaman las estrategias de j) y c) las utilidades que obtendría cada participante en el conflicto con los diversos resultados provocados por cada eneada de estrategias. Suponemos que estas utilidades las podemos expresar a través de una función φ definida en $D = D_1 x D_2 x ... x D_n$ y que toma valores en R^n, donde $n = |N|$. Estaríamos suponiendo, con ello, que cada persona que puede jugar el papel j tiene la misma utilidad para cada uno de los resultados posibles del conflicto.

$(N, \{D_j\}_{j\in N}, \varphi)$ es lo que se llama *un juego rectangular n-personal.*

Si entre todos los jugadores han elegido una eneada de estrategias

σ^*, decimos que $\widehat{\sigma}^i$ es *una mejor respuesta de* i a σ^*, si se cumple que $\max\limits_{\sigma^i \in D_i} \varphi_i(\sigma^{*1}, \sigma^{*2}, ..., \sigma^i, ..., \sigma^{*n}) = \varphi_i(\sigma^{*1}, \sigma^{*2}, ..., \widehat{\sigma}^i, ..., \sigma^{*n})$ y decimos que $\widehat{\sigma}^i$ es *una mejor respuesta estricta de* i a σ^*, si $\widehat{\sigma}^i$ es una mejor respuesta de i a σ^* y además $\varphi_i(\sigma^{*1}, \sigma^{*2}, ..., \widehat{\sigma}^i, ..., \sigma^{*n}) > \varphi_i(\sigma^{*1}, \sigma^{*2}, ..., \sigma^i, ..., \sigma^{*n})$, para toda $\sigma^i \neq \widehat{\sigma}^i$. Denotemos como $R_i(\sigma^*)$ al conjunto de mejores respuestas de i a σ^* y como $R(\sigma^*)$ al conjunto de eneadas de estrategias σ tales que cada σ^i es mejor respuesta de i a σ^*. Análogamente en cuanto a las mejores respuestas estrictas, usaremos $\overline{R_i(\sigma^*)}$ y $\overline{R(\sigma^*)}$.

Los *Equilibrios de Nash* son eneadas de estrategias σ^* tales que, para todo $i \in N, \sigma^{*i}$ está en $R_i(\sigma^*)$, es decir $\sigma^* \in R(\sigma^*)$. Los *Equilibrios de Nash estrictos* son equilibrios de Nash σ^*, tales que están en $\overline{R(\sigma^*)}$. Por ejemplo, en el juego de los hombres y las mujeres, (P, Ch) y (R, B) son equilibrios de Nash estrictos.

Estos equilibrios que acabamos de definir son lo que en la teoría se llaman equilibrios de Nash en Estrategias Puras, pero como son los únicos que aparecerán en este trabajo, nos referiremos a ellos simplemente como equilibrios de Nash.

La población F, envuelta en un conflicto representado por un juego n-personal, estará partida en n subconjuntos, los miembros de F_j son los que pueden representar el papel j en el conflicto. En cada periodo t (tiempo discreto), tiene lugar, en una sola ocasión, el mencionado conflicto y, para ello, se elige un representante al azar de cada F_j. La población completa F, como en el ejemplo estudiado, guarda memoria de lo que ha ocurrido en m periodos, después del enfrentamiento de cualquier periodo t (consideramos siempre que $t > m$), recuerda la historia del comportamiento de los participantes en los periodos t,$t-1$,...,$t-m+1$. Cuando el conflicto del periodo $t+1$ ha transcurrido, la sociedad olvida lo que pasó en $t-m+1$ y agrega a su memoria las acciones del periodo $t+1$. Entonces, en cada periodo, la sociedad puede recordar una historia h que es un elemento de D^m.

Si en un momento dado, la sociedad recuerda una historia h de tamaño m, los individuos no son capaces de asimilar toda esa información, sino que sólo pueden obtener y manejar una "muestra de h" de tamaño $k \leq m$. No es necesario exigir que cada colección de elementos de h, de tamaño k, sea igualmente probable de ser tomado como muestra, por un miembro de F, basta que cada una de estas colecciones tenga probabilidad positiva.

Después de obtener una muestra η de información accesible, cada i en F_i escoge $\widetilde{\sigma}^i$ en D_i que maximice

$$\sum_{\sigma|\sigma^i \in D} \left(\prod_{j\in N} \frac{\eta^j_{\sigma^j}}{k} \varphi_i \left(\sigma \left| \sigma^i \right. \right) \right) ,$$

donde $\eta^j_{\sigma^j}$ es el número de veces que los miembros de F_j escogieron la estrategia $\sigma^j \in D_j$ en η. $\widetilde{\sigma}^i$ es una *mejor respuesta de i a η.*

Si h es una historia de tamaño m, una distribución P_i $(\ |h)$ en D_i es de *mejor respuesta relativa a h*, si $P_i(\sigma^i, h) > 0$, únicamente cuando existe η, una muestra de tamaño k de h, tal que σ^i es una mejor respuesta de i a η. $P_i(\sigma^i, h)$ es independiente del tiempo.

Dados h y h' en D^m, h' es un *sucesor de* h, si $h'_t = h_{t+1}$, para $t = 1, ..., m-1$.

Para $\{P_i(\ |h)\}_{i\in N}$ de mejor respuesta, definimos P^0, como el proceso de Markov siguiente:

$$P^0_{hh'} = \begin{cases} \prod\limits_{i\in N} P_i(\sigma^i, h), \text{ si } h' \text{ es un sucesor de } h \text{ y } h'_m = \sigma \\ 0, \qquad\qquad\quad \text{si } h' \text{ no es un sucesor de } h \text{ o } h'_m \neq \sigma \end{cases}$$

P^0 es el proceso estocástico que Young considera como un *Proceso de Adaptación sobre* $(N, \{D_j\}_{j\in N}, \varphi)$, *con memoria m y tamaño de muestra k.*

Si S es el simplejo unitario de $R^{|D^m|}$, es decir

$$S = \left\{ \mu \in R^{|D^m|} \left| \, \mu_h \geq 0 \text{ y } \sum_{h\in D^m} \mu_h = 1 \right. \right\} ,$$

entonces se puede considerar a P^0 como una función de S en S, es decir, una dinámica que, a cada distribución de probabilidad en el conjunto de historias de tamaño m, le asigna otra distribución de probabilidad en ese mismo conjunto.

Definición. μ^0 en S es una *distribución estacionaria* de P^0, si μ^0 $P^0 = \mu^0$.

Los conocidos resultados de matrices no negativas asociados a los nombres de Perron y Frobenius y el hecho de que los términos de cada renglón P^0 suman 1 garantizan que siempre existen distribuciones estacionarias de P^0.

Para cualquier proceso de adaptación sobre un juego, h es un *estado absorbente de* P^0, si existe una distribución estacionaria μ^0 de P^0 tal que $\mu_h^0 = 1$. h es una *convención* de P^0, si h es un estado absorbente tal que $h_k = \sigma$, para toda $k = 1, 2, ..., m$.

Es claro que todos los estados absorbente de P^0 son convenciones y que h es una convención, si y sólo si $h_k = \sigma$ es un equilibrio de Nash estricto.

No todas las distribuciones estacionarias de un proceso de adaptación son vectores canónicos, por lo que no siempre corresponden a estados absorbentes.

En un proceso de adaptación sobre un juego, dependiendo de las características de éste y del tamaño de k y de m/k, puede haber varias convenciones y, existir, además de convenciones, otros subconjuntos de historias en los que, al llegar a ellos, el proceso permanecerá moviéndose de una historia a otra, dentro de dicho subconjunto, llegando a una repetición cíclica de tales historias. Es interesante detectar, si existen patrones de conducta, sean convenciones o ciclos, que de alguna manera dominan a los otros. Para obtener la respuesta, Young vuelve a introducir ruido estocástico al proceso, considerando que *errar es de humanos.*

Errores y Experimentos. Consideremos un proceso de adaptación P^0 sobre un juego $\left(N, \{D_j\}_{j \in N}, \varphi\right)$, con tamaños de memoria m y k, respectivamente. Recurramos a la suposición, por demás realista, de que los miembros de la población experimentan y, con ello, pueden cometer errores.

Recordemos que una persona, situada en una historia h, que toma una muestra η y elige σ^j está *experimentando* si σ^j no es una mejor respuesta a η, pero existe η' para la que σ^j es una mejor respuesta. Dicha persona está cometiendo un *error*, si σ^j no es mejor repuesta para ninguna muestra posible de tamaño k de h. En otras palabras, para equivocarse hay que experimentar, pero no todo experimento es un error.

Cada miembro de la clase F_j experimenta, desviándose del proceso de adaptación con probabilidad $\varepsilon\ \lambda_j > 0$. Todos los miembros de F_j experimentarán con la misma probabilidad, pero no tendrán la misma propensión a hacerlo los de una clase que los de otra, ese es el papel de las λ_j. La probabilidad con que experimenta cada individuo, en cada periodo, es independiente del periodo y de los demás individuos.

Además, si un personaje de F_j se propone experimentar y si, en el juego, el jugador j tiene más de dos estrategias, también habrá que describir como se desviará hacia cada una de las estrategias que tiene a su disposición. Denotemos como $q_j\ (\quad |h)$ a la distribución en D_j con que los de F_j experimentan hacia sus diversas estrategias, cuando parten de la historia h. Supondremos que $q_j(\sigma^j\,|h) > 0$, para toda j, σ^j y h.

A este proceso que se obtiene al perturbar P^0, con $\varepsilon \in (0,1)$ y las distribuciones $\{\lambda_j\}_{j\in N}$ y $\{q_j\}_{j\in N}$, se le llama el *proceso de adaptación con errores o proceso perturbado* y se denota como P^ε. Precisemos en que consiste.

Consideremos $J \subseteq N$, entonces la probabilidad de que estando en h, en el periodo t, experimenten exclusivamente los miembros de J es igual a

$$\varepsilon^j \left(\prod_{j\in J}\lambda_j\right)\left(\prod_{j\notin J}(1-\varepsilon\lambda_j)\right).$$

La probabilidad de que nadie experimente es

$$\prod_{i=1}^{n}(1-\varepsilon\lambda_i)\ .$$

Además, la probabilidad de transición de h a h' en t, bajo el supuesto de que sólo los miembros de J experimentan y $\sigma = h'_m$, es

$$Q_{hh'} = \begin{cases} \prod\limits_{j\in J} q_j\left(\sigma^j\,|h\right)\prod\limits_{j\notin J} P_j\left(\sigma^j\,|h\right) & \text{si } h' \text{ es sucesor de } h \\ 0 & \text{de otra manera.}\end{cases}$$

Si ninguna persona se desvía del proceso de adaptación, la probabilidad de pasar de h a h' es $P^0_{hh'}$. Entonces

$$P^\varepsilon_{hh'} = \left(\prod_{i=1}^{n}(1-\varepsilon\lambda_i)\right)P^0_{hh'} + \sum_{J\subseteq N, J\neq\emptyset}\varepsilon^{|J|}\left(\prod_{j\in J}\lambda_j\right)\left(\prod_{j\notin J}(1-\varepsilon\lambda_j)\right)Q_{hh'} \qquad (A)$$

En este proceso de adaptación con errores, para cualesquiera h y h' hay una probabilidad positiva de que en un número finito de periodos se llegue de h a h', pues el representante de cualquier F_j, en cada periodo, puede experimentar hacia cualquiera de sus estrategias, con probabilidad positiva. Es decir, P^ε es irreducible. Más aún, se puede llegar de h a h' en cualquier número de periodos mayor o igual que m. Es decir, P^ε es primitiva. Por ello, tenemos,

Proposición 1. *Existe $\mu^\varepsilon \in S$ única, tal que $\mu^\varepsilon P^\varepsilon = \mu^\varepsilon$, $\mu^\varepsilon > 0$. Además, para cada $\mu \in S$, existe $l(\mu)$, entero positivo, tal que $\mu(P^\varepsilon)^{l(\mu)} = \mu^\varepsilon$.*

μ_h^ε representa la probabilidad de que la historia o estado h sea observado durante el proceso perturbado, en cualquier tiempo t.

¿Qué ocurre cuando la propensión a que la gente experimente es muy pequeña?

Por lo pronto, de la expresión A se desprende la afirmación siguiente.

Proposición 2. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} P_{hh'}^{\varepsilon} = P_{hh'}^{0}$, *para toda pareja de historias h y h'. Además, si $P_{hh'}^{\varepsilon} > 0$ y $r(h,h')$ es el número menor de personas que tienen que experimentar, para pasar de h a h', en un sólo periodo, entonces $r(h,h')$ es el menor entero no negativo tal que el $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-r(h,h')} P_{hh'}^{\varepsilon}$ existe y es positivo.*

También nos importa el comportamiento de μ^ε¿Existe el límite de μ^ε cuando ε tiende a cero? Y si esto es así, ¿cuáles de sus coordenadas siguen siendo positivas en dicho límite?

Dejando a un lado, por un momento, estas preguntas, procedamos como en la primera sección. Es decir, asociemos a P^ε la digráfica $\left(V, \overrightarrow{A}\right)$, con $V = D^m$ (el conjunto de historias con memoria de tamaño m), y $\overrightarrow{A} = \{(h,h') \in VxV \,|P_{hh'}^{\varepsilon} > 0\}$, además a cada flecha (h,h') le asignamos $r(h,h')$ como costo. Esta es una idea de Freidlin y Wentzell [2] que permite transformar un problema planteado a traves de un proceso de Markov que sufre perturbaciones en un problema de teoría de redes.

Se puede medir la atracción de cada historia h dentro del proceso de adaptación perturbado, calculando el costo de llegar a h desde cualquier otra historia, a la manera de la sección 2. Para cada h, se consideran los h-árboles, es decir las subdigráficas de $\left(V, \overrightarrow{A}\right)$ que contienen, para cada h', una trayectoria dirigida única que conecta a h' con h. Las flechas conservan el costo que tenían, el costo de τ, un h-árbol, es $r(\tau) = \sum\limits_{\left(\widehat{h},\widetilde{h}\right)\in\tau} r\left(\widehat{h},\widetilde{h}\right)$. El *potencial estocástico de h* es el mínimo de los costos de los h-árboles.

El siguiente teorema de Young es un caso especial de un teorema de Freidlin y Wentzell [2] sobre procesos de Markov perturbados y justifica el procedimiento que seguimos en la sección anterior para detectar la historia que ocurriría tan frecuentemente, en el conflicto de los hombres contra las mujeres, que se convertiría en una convención. La demostración del teorema se puede consultar en el apéndice del artículo de Young [6] .

Teorema 3. *Sea P^{ε} un proceso de adaptación perturbado sobre un juego rectangular finito Γ con tamaños de memoria y de muestra m y k, tales que k y $\frac{m}{k}$ son suficientemente grandes. Entonces existe μ^*, el límite de μ^{ε} cuando ε tiende a cero. μ^* es una distribución estacionaria de P^0 y es independiente de $P_i(\ |h)$, $\{\lambda_j\}_{j\in N}$ y $\{q_j\}_{j\in N}$. $\mu_h^* > 0$ si y solo si h es una historia de mínimo potencial estocástico.*

Llamamos a μ^* *la distribución límite* y a h, tal que $\mu_h^* > 0$, un *equilibrio estocásticamente estable.*

μ^* nos dice con que probabilidad se presentará cada historia a lo largo del tiempo. En el juego de los hombres y las mujeres, si m y k son adecuadas el equilibrio estocásticamente estable es la repetición de (P, Ch)

Las historias de mínimo potencial estocástico corresponden a las coordenadas positivas de distribuciones estacionarias de P^0 especiales. Para encontrarlas se considera una gráfica dirigida, tal que cada vértice es una convención o un ciclo del proceso y hay una flecha para cada pareja ordenada de vértices. Los costos asignados a las flechas son los mínimos costos para pasar, dentro de la digráfica asociada a P^{ε}, de la convención o ciclo representado por el vértice inicial, a la convención o ciclo representado por el vértice final. Por último se encuentran los vértices de mínimo potencial estocástico dentro de esta nueva gráfica dirigida.

Veamos, para finalizar, la distribución límite y los equilibrios estocásticamente estables en el proceso de adaptación sobre un juego de más de dos jugadores.

4 Nostalgia por el dinosaurio.

No hablaremos del cuento de Monterroso (¿o era novela?), sino de un tipo de situación muy familiar a todos. Nos referimos a los procesos electorales mexicanos, tan llenos de convenciones con nombres pintorescos que marcan el lenguaje del país. Dejando a un lado las elecciones mismas, tan ricas en éstas, y reduciéndonos a los procesos donde se nombraban candidatos dentro del partido al que se vincula la formación de casi todas estas convenciones, tenemos, por mencionar algunas, al "Dedazo", al "Tapado", a la "Cargada", a aquello de que "El que se mueve no sale en la foto".

Sentimos que el fenómeno del "Dedazo" es análogo al de las autoridades que mencionábamos al principio del artículo, es decir, Carreño, La Real Academia de la Lengua, etc. En el fondo, los electores de los candidatos eran otros. Como sucede en todo el mundo y en todas las épocas, dichos electores eran fuertes grupos de poder económico, político y militar, entre los que, en ocasiones, podían contarse las grandes centrales sindicales y organizaciones semejantes. La correlación entre estas fuerzas y la relación de los diversos aspirantes a "tapado" con ellas, daban la capacidad a los precandidatos de otorgar prebendas a los que los apoyaran para conseguir ser el "bueno". Y también les daban el poder de propinar diversos castigos, al que apoyara a otros, desde desaparecerlos de la escena política por 6 años, enviarlos a alguna embajada o a una larga estancia en la cárcel, después de "descubrir" algún ilícito cometido. No todos los candidatos podían dar los mismos premios y castigos.

Esquematizando al extremo este complicado conflicto, supongamos que los electores eran simétricos. Es decir, con igual poder todos ellos, por lo cual, obtenían los mismos beneficios y castigos, para las mismas eneadas de acciones. Además, parte de ese mismo supuesto de simetría de los electores es que cada uno de ellos carecía de ataduras o enemistades con uno u otro de los candidatos. Podemos, entonces, construir un juego, en donde los jugadores son n electores, con el mismo conjunto de estrategias. Estas consisten en apoyar a uno de los precandidatos posibles C_1, C_2, ..., C_r o bien abstenerse. La utilidad que recibe un elector j cualquiera, para cada eneada de estrategias, está dada por la función siguiente:

$$\varphi_j\left(\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^n\right) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } \sigma^j = \text{ abstención o no hay mayoría,} \\ p_k > 0 \quad \text{si } \sigma^j = C_k \text{ y } C_k \text{ tiene mayoría,} \\ q_k < 0 \text{ si } \sigma^j = C_k \text{ y } C_s \neq C_k \text{ tiene mayoría.} \end{cases}$$

Los equilibrios de este juego son r y son de la forma $(C_k, C_k, ..., C_k)$, para $k = 1, 2, ..., r$, es decir, cada equilibrio de Nash es una "Cargada" hacia uno de los precandidatos.

Podemos observar que, si hubiéramos exigido que para que un C_k ganara la candidatura necesitaba tener el apoyo de al menos dos electores, entonces tambien (*abstención*, *abstención*, ..., *abstención*), "El que se mueve no sale en la foto", sería un equilibrio de Nash.

Para construir un proceso de adaptación sobre este juego, se puede considerar, por un lado, la repetición de éste en los momentos de nombrar candidatos a presidente, gobernadores, presidentes municipales, senadores, diputados federales y locales. Pero, por otro lado, también podemos considerar repeticiones del juego a los reacomodos entre las fuerzas que se producían, una y otra vez, durante los años que separaban estos procesos de elección. Tendríamos, entonces, una población partida en las diversas fuerzas que son los electores y que pueden tener distintos representantes, en cada periodo de repetición del juego.

Para concretar, supongamos que los precandidatos eran los ocupantes de 5 puestos claves, en relación al puesto de elección. Digamos que SG, ST, SD, SH y SC, y además, $p_{SG} = 3$, $q_{SG} = -1$, $p_{ST} = 5$, $q_{ST} = -3$, $p_{SD} = 8$, $q_{SD} = -10$, $p_{SH} = 4$, $q_{SH} = -2$ y $p_{SC} = 6$, $q_{SC} = -5$.

Las 5 convenciones del proceso, para cualquier m y k, son de la forma h_{C_k}, con $h_{C_k} = (C_k, C_k, ..., C_k)$, para $C_k = SG$, ST, SD, SH, SC.

Si k y m/k son suficientementemente grandes, para que los pasos tengan sentido, sabemos que entre las historias h_{C_k} están los posibles vértices de menor potencial estocástico, es decir los equilibrios estocásticamente estables. Para encontrarlos, se puede considerar la digráfica cuyos vértices son las 5 convenciones y cuyas flechas son todas las parejas $\left(h_{C_j}, h_{Cs}\right)$. Además el costo de la flecha $\left(h_{Cj}, h_{Cs}\right)$ es igual al mínimo costo entre los de todas las trayectorias que unen un vértice de h_{C_j} con otro de h_{Cs}. Dicha digráfica aparece en la figura 3.

Resolviendo un problema de arborescencia, se encuentra que la historia de mínimo potencial es aquella en la que todos apoyan a SG, durante los m periodos que recuerda la sociedad, éste es el equilibrio estocásticamente estable. Nótese que SG no es el precandidato que ofrece un premio mayor. En la selección pesan también los castigos. Hay un problema de riesgo involucrado. El equilibrio de Nash $(SG, SG, ..., SG)$ que se repite en el equilibrio estocásticamente estable es el único que es dominante por riesgo del juego.

Referencias

[1] K. Binmore (1993), *Teoría de Juegos*, McGraw-Hill

[2] M. Freidlin y A. Wentzell (1984), *Random Perturbations of Dynamical Systems*, Springer-Verlag.

[3] J Maynard Smith (1982), *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press.

[4] J. Nash (1985), *Non-cooperative games*, Ann. Math. **54**, 286–295.

[5] G. Owen (1968), *Game Theory*, W. B. Sauders Co.

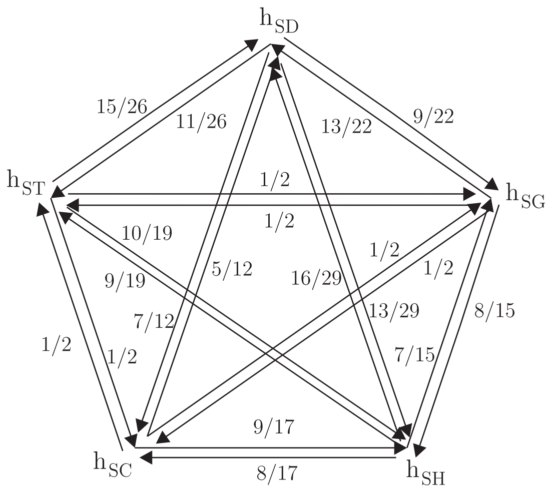

Figura 3

[6] F. Vega Redondo (1997), *Evolution, Games and Economic Behaviour*, Oxford University Press.

[7] H. P. Young (1993), *The Evolution of Conventions*, Econometrica **61**, 57–84.