Miscelánea Matemática **61** (2015) 11-20 SMM

Una nota sobre la transformada de Fourier en espacios de Hölder

Duván Cardona
Dep. de Matemáticas,
Universidad de los Andes, Bogotá - Colombia.
duvanc306@gmail.com

Resumen

En esta nota estudiaremos sistemáticamente el comportamiento de la transformada de Fourier sobre los espacios de funciones Hölder continuas. Aplicaremos nuestros resultados para dar estimaciones que involucran operadores pseudo-diferenciales periódicos.

1. Introducción

El interés por el comportamiento de la transformada de Fourier sobre funciones periódicas se debe a la frecuencia de las mismas en diversos fenómenos de la naturaleza (como el movimiento ondulatorio de partículas). Algunos métodos basados en la transformada de Fourier tienen aplicaciones en áreas de la ciencia y la ingeniería, por ejemplo, en espectroscopía, diseño de circuitos, cristalografía, procesamiento de imagenes, procesamiento de señales, comunicación inalámbrica, etc. En matemáticas, el estudio de la transformada de Fourier, sus propiedades en espacios de funciones y aplicaciones, hacen parte del análisis de Fourier. Desde el análisis de Fourier sobre espacios de Hölder se pueden identificar funciones periódicas con transformada de Fourier p-sumable y aplicar estos hechos, tanto en la teoría de operadores pseudo-diferenciales como en el análisis armónico (véase [5, 6]). En este trabajo se estudia el comportamiento de la transformada de Fourier sobre funciones medibles de periodo uno, por lo que consideraremos sólo funciones de valor complejo definidas en el toro unidimensional $\mathbb{T} \simeq [0, 1]$, que es el espacio topológico compacto que se obtiene al identificar $0 \simeq 1$. Aquí, el espacio de funciones periódicas Hölder continuas de orden s, denotado por $\Lambda^s(\mathbb{T})$, está definido para cada $0 < s < 1$ por

$$\Lambda^s(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} : |f|_{\Lambda^s} = \sup_{x,h\in\mathbb{T}} |f(x+h) - f(x)||h|^{-s} < \infty\}.$$

$\Lambda^s(\mathbb{T})$ es un espacio de Banach (véase [10]) dotado de la norma

$$\|f\|_{\Lambda^s(\mathbb{T})} = |f|_{\Lambda^s(\mathbb{T})} + \sup_{x\in\mathbb{T}} |f(x)|.$$

Siendo nuestro objeto principal de estudio, introducimos ahora la transformada de Fourier, que actuando en funciones de $L^1(\mathbb{T})$, es el operador definido por la ecuación:

$$\mathscr{F}f(n) = \widehat{f}(n) := \int_0^1 e^{-i2\pi nx} f(x)dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

El primer resultado matemático conocido por el autor, que versa sobre la acción de la transformada de Fourier sobre espacios de Hölder, se debe a Sergéi Natánovich Bernstéin, quien probó en 1914 el siguiente teorema, conocido ahora como teorema de Bernstein (véase [2]).

Teorema 1.1. *Sea $\frac{1}{2} < s \leq 1$, entonces, existe una constante $C = C_s$ dependiendo únicamente sobre s de modo que*

$$\|\mathscr{F}f\|_{L^1(\mathbb{Z})} \leq C\|f\|_{\Lambda^s(\mathbb{T})}. \tag{2}$$

Siempre que $1 < p \leq \infty$ la función inclusión $i : L^1(\mathbb{Z}) \to L^p(\mathbb{Z})$ es continua. Por tanto, el teorema de Bernstein implica que la transformada de Fourier es un operador continuo de $\Lambda^s(\mathbb{T})$ sobre $L^p(\mathbb{T})$, $1 < p \leq \infty$ y $\frac{1}{2} < s \leq 1$. El teorema de Bernstein garantiza la continuidad de la transformada de Fourier cuando $\frac{1}{2} < s \leq 1$, sin embargo es inoperante para $s = \frac{1}{2}$ debido a la existencia de funciones en $\Lambda^{1/2}(\mathbb{T})$ cuya transformada de Fourier no es absolutamente convergente. Un ejemplo clásico es la función definida por la serie de Hardy-Littlewood (véase [1]),

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{in\log n}}{n} e^{inx}. \tag{3}$$

Queda claro así que existen funciones, incluso continuas cuya transformada de Fourier no está en ningún L^p con $p \geq 1$. Esto pone en evidencia la importancia del teorema de Bernstein al establecer la p-sumabilidad de la transformada de Fourier de funciones con poco grado de regularidad (mayor que 1/2). Aunque diversos autores han generalizado el teorema de Bernstein y lo han llevado a diferentes escenarios, por ejemplo, grupos localmente compactos (véase [4, 3, 9]), en el caso periódico las mayores contribuciones se deben a Otto Száz y E. C. Titchmarsh (véase [11, 12, 13, 14, 15]) quienes investigan la transformada de Fourier de funciones Hölder continuas de $\Lambda^{s,r}(\mathbb{T})$ en los espacios $L^p(\mathbb{Z})$,

$1 \leq p < \infty$. Otros trabajos en esta dirección pueden encontrarse en [8, 7]. El siguiente teorema es un resultado clásico y se debe a Otto Szász.

Teorema 1.2. *Si $f \in \Lambda^{s,r}$, entonces $\mathscr{F} f \in L^p(\mathbb{Z})$, $p \geq 1$, donde $s > 1/r + 1/p - 1$ si $1 < r \leq 2$ y $s > 1/p - 1/2$ si $r > 2$.*

O. Szász también proporciona ejemplos que muestran que los límites inferiores de s en su teorema no pueden ser mejorados.

Los espacios de Lebesgue $L^p(\Omega, \mu)$ con $1 \leq p < \infty$ tienen buenas propiedades, son espacios completos (véase [10]) con la topología inducida por la norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x))^{1/p}.$$

Una versión similar para $0 < p < 1$ hace de cada $L^p(\Omega, \mu)$ un espacio completo pero la función $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ no es una norma. Motivados por ese obstáculo, en esta nota queremos estudiar la acción de la transformada de Fourier de funciones en espacios Hölder y que tienen transformada de Fourier en los espacios $L^p(\mathbb{T})$ para $p_0 < p < \infty$ con $p_0 < 1$. A continuación presentamos nuestros resultados. En ellos vemos que una cota inferior para p_0 es $\frac{2}{3}$.

Teorema 1.3. *Sea $\frac{2}{3} < p \leq 2$ y sea $s_p = 1/p - 1/2$. Entonces, la transformada de Fourier $f \mapsto \mathscr{F} f$ de $\Lambda^s(\mathbb{T})$ sobre $L^p(\mathbb{T})$ es un operador continuo siempre que $s_p < s < 1$. En particular, si $p = 1$ obtenemos el teorema de Bernstein.*

Nosotros observamos que la función $p \mapsto s_p$ de $(2/3, 2)$ sobre $(0, 1)$ es biyectiva. Por lo que cada parámetro $p \in (2/3, 2]$ tiene reservado un valor $s_p \in (0, 1)$ para el cual la transformada de funciones en Λ^s es L^p-sumable con $s_p < s < 1$. Como veremos en el siguiente teorema, para $p \geq 2$ todos los valores de s en $(0, 1/2]$ son admisibles.

Teorema 1.4. *Sea $0 < s \leq \frac{1}{2}$. Entonces la transformada de Fourier $\mathscr{F} : \Lambda^s(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$, es un operador continuo para $2 \leq p < \infty$. Es decir, existe una constante $C > 0$ que satisface $\|\mathscr{F} f\|_{L^p(\mathbb{Z})} \leq C\|f\|_{\Lambda^s(\mathbb{T})}$.*

El teorema anterior es óptimo en el siguiente sentido: si $\Lambda^0(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T})$ es el conjunto de las funciones continuas de valor complejo definidas en $\mathbb{T}$, entonces toda función en $\Lambda^0(\mathbb{T})$ satisface la condición:

$$\sup_{x,h \in \mathbb{T}} |f(x + h) - f(x)| < \infty.$$

Sin embargo, existen funciones en $\Lambda^0(\mathbb{T})$ cuya transformada de Fourier no pertenece a $L^p(\mathbb{T})$ para $1 \leq p < 2$. Es decir, las cotas inferiores para s y p en el teorema anterior no pueden mejorarse. Una de tales funciones es, por ejemplo (véase [6, 1]),

$$f(t) = \sum_{n\geq 2} \frac{e^{in\log n}}{\sqrt{n}(\log n)^2} e^{int}. \tag{4}$$

El motivo por el que no se mejora la cota inferior 2 para p en el resultado previo se debe a que este es consecuencia de la desigualdad de Hausdorff-Young (HY): para $1 < q < 2$, $\|\mathscr{F} f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^q}$ donde $1/p + 1/q = 1$. De hecho, la función definida por la ecuación (4) es suficiente para ver que (HY) falla en el caso $p < 2$.

2. Prueba de los resultados principales

Iniciamos esta sección con un resultado que se sigue del teorema de Bernstein:

Teorema 2.1. *Si* $1/2 < s \leq 1$ *entonces la transformada de Fourier* $\mathscr{F} : \Lambda^s(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$, *es un operador continuo para* $1 < p \leq \infty$.

Demostración. Si $p > 1$, $L^1(\mathbb{Z}) \subset L^p(\mathbb{Z})$ con inclusión continua dada por la desigualdad entre normas $\|a\|_{L^p(\mathbb{Z})} \leq \|a\|_{L^1(\mathbb{Z})}$. En virtud del teorema de Bernstein podemos concluir la prueba a causa de la desigualdad

$$\|\mathscr{F} f\|_{L^p(\mathbb{Z})} \leq \|\mathscr{F} f\|_{L^1(\mathbb{Z})} \leq C_s \|f\|_{\Lambda^s}. \qquad \square$$

Teorema 2.2. *Sea* $0 < s \leq \frac{1}{2}$. *Entonces la transformada de Fourier* $\mathscr{F} : \Lambda^s(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$, *es un operador continuo para* $2 \leq p < \infty$. *Es decir, existe una constante* $C > 0$ *que satisface* $\|\mathscr{F} f\|_{L^p(\mathbb{Z})} \leq C\|f\|_{\Lambda^s(\mathbb{T})}$.

Demostración. Considere $1 < q \leq 2$ el exponente conjugado de p, es decir, el único número real en función de p que satisface $1/p + 1/q = 1$. En virtud de la desigualdad de Hausdorff-Young se tiene: $\|\widehat{f}\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^q(\mathbb{T})}$. Más precisamente,

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f}\|_{L^p(\mathbb{T})} &\leq \|f\|_{L^q(\mathbb{T})}\\
&= (\int_0^1 |f(x)|^q)^{1/q}dx\\
&\leq (\int_0^1 |f(x)-f(0)|^q dx)^{1/q} + |f(0)|\\
&= (\int_0^1 \frac{|f(x)-f(0)|^q}{|x-0|^{qs}}|x|^{qs}dx)^{1/q} + |f(0)|\\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{T}} \frac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|^s}(\int_0^1 x^{sq}dx)^{1/q} + \sup_{x\in\mathbb{T}}|f(x)|\\
&\leq C\|f\|_{\Lambda^s(\mathbb{T})}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Teorema 2.3. *Sea $\frac{2}{3} < p \leq 2$ y sea $s_p = 1/p - 1/2$. Entonces, la transformada de Fourier $f \mapsto \mathscr{F} f$ desde $\Lambda^s(\mathbb{T})$ sobre $L^p(\mathbb{T})$ es un operador continuo siempre que $s_p < s < 1$. En particular, si $p = 1$ obtenemos el teorema de Bernstein.*

Demostración. Esta prueba es una adaptación de la demostración que se presenta en [6] del teorema de Bernstein, por lo que consideramos $\mathbb{T} \simeq [0, 2\pi]$ y la transformada de Fourier definida por

$$(\mathscr{F} f)(n) := \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(\theta)d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Con la transformada definida por la ecuación (5), la fórmula de inversión de Fourier viene dada por:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{in\theta}(\mathscr{F} f)(n), \quad x \in \mathbb{T}. \tag{6}$$

Iniciemos considerando $t, h \in \mathbb{T}$, y una función medible $f \in \Lambda^s(\mathbb{T})$ para algún $0 < s < 1$. La fórmula de Inversión de Fourier garantiza que

$$f(t-h) - f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (e^{-inh} - 1)\widehat{f}(n)e^{int}. \tag{7}$$

Si tomamos $h = 2\pi/3 \cdot 2^m$ and $2^m \leq n \leq 2^{m+1}$ entonces

$$|e^{-inh} - 1| \geq \sqrt{3}. \tag{8}$$

En virtud de (8) y la fórmula de Plancherel, obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{2^m\leq n<2^{m+1}}|\widehat{f}(n)|^2 &\leq \sum_{2^m\leq n<2^{m+1}}|e^{-inh}-1|^2|\widehat{f}(n)|^2\\ &=\|f(\cdot-h)-f(\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{T})}\\ &\leq \|f(\cdot-h)-f(\cdot)\|^2_{L^\infty(\mathbb{T})}\\ &\leq \left[\frac{2\pi}{3\cdot 2^m}\right]^{2s}|f|^2_{\Lambda^s(\mathbb{T})}.\end{aligned}$$

Ahora consideraremos el caso de la continuidad de $\mathscr{F}$ desde Λ^s hacia L^p para $2/3<p<2$, y $s_p<s<1$. Sea $\varepsilon>0$ tales que $p=2-\varepsilon$. En ese caso, $0<\varepsilon<\frac{4}{3}$ y $s_p=\frac{1}{2}\varepsilon(2-\varepsilon)^{-1}<s<1$. Si $r=2(2-\varepsilon)^{-1}$ se tiene que $r>1$. Por uso de la desigualdad de Hölder escribimos,

$$\begin{aligned}\sum_{2^m\leq n<2^{m+1}}|\widehat{f}(n)|^{2-\varepsilon} &\leq \left(\sum_{2^m\leq n<2^{m+1}}|\widehat{f}(n)|^{(2-\varepsilon)r}\right)^{\frac{1}{r}}\cdot\left(\sum_{2^m\leq n<2^{m+1}}1\right)^{\frac{1}{r'}}\\ &\leq \left(\sum_{2^m\leq n<2^{m+1}}|\widehat{f}(n)|^2\right)^{\frac{1}{r}}\cdot 2^{(m+1)/r'}\\ &\leq\ [2\pi/3\cdot 2^m]^{2s/r}\cdot 2^{(m+1)/r'}|f|^{2/r}_{\Lambda^s(\mathbb{T})}\\ &=[2\pi/3]^{2s/r}\,2^{(m+1)/r'-2ms/r}|f|^{2/r}_{\Lambda^s(\mathbb{T})}.\end{aligned}$$

Primero nótese que

$$\frac{m+1}{r'}-\frac{2ms}{r}=m(\frac{\varepsilon}{2}+s\varepsilon-2s)+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

Desde las condiciones $0<\varepsilon<4/3$ y $\frac{\varepsilon}{2}(2-\varepsilon)^{-1}<s<1$ obtenemos la relación $\frac{\varepsilon}{2}+s\varepsilon-2s<0$, por lo cual,

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}|\widehat{f}(n)|^{2-\varepsilon} &=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{2^m\leq n<2^{m+1}}|\widehat{f}(n)|^{2-\varepsilon}\\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty}2^{m(\frac{\varepsilon}{2}+s\varepsilon-2s)}\cdot 2^{\varepsilon/2}\,[2\pi/3]^{2s/r}\,|f|^{2/r}_{\Lambda^s(\mathbb{T})}\\ &\leq C|f|^{2/r}_{\Lambda^s(\mathbb{T})}.\end{aligned}$$

De otro lado, para $n \leq -1$ es fácil comprobar la fórmula: $\overline{\widehat{f}(-n)} = \widehat{\overline{f}}(n)$. Así obtenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq -1} |\widehat{f}(n)|^{2-\varepsilon} = \sum_{n\geq 1} |\widehat{f}(-n)|^{2-\varepsilon} \leq C|\overline{f}|^{2/r}_{\Lambda^s(\mathbb{T})} = C|f|^{2/r}_{\Lambda^s(\mathbb{T})} \\ \leq C\|f\|^{2/r}_{\Lambda^s(\mathbb{T})}.\end{aligned}$$

Recordando que $|\widehat{f}(0)| \leq \|f\|_{\Lambda^s(\mathbb{T})}$ se obtiene lo siguiente:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^{2-\varepsilon} \leq C'\|f\|^{2/r}_{\Lambda^s(\mathbb{T})}. \tag{10}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\|\mathscr{F}f\|_{L^p(\mathbb{Z})} &= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^{2-\varepsilon}\right)^{(2-\varepsilon)^{-1}} \\ &\leq C^{(2-\varepsilon)^{-1}}\|f\|^{\frac{2}{r}(2-\varepsilon)^{-1}}_{\Lambda^s(\mathbb{T})} = C^{(2-\varepsilon)^{-1}}\|f\|_{\Lambda^s(\mathbb{T})}.\end{aligned}$$

Finalmente, la continuidad de $\mathscr{F}$ cuando $p = 2$ se sigue del teorema anterior. □

3. Aplicaciones

Dejamos claro que una estimación es cualquier desigualdad entre normas que verifica la continuidad de un operador entre ciertos espacios de funciones. En Cardona[5], el autor ha establecido entre otras cosas, algunas estimaciones que versan sobre el comportamiento de operadores pseudo-diferenciales en espacios Hölder empleando el teorema de Bernstein. En esta sección obtenemos resultados en la dirección de los propuestos por el autor en [5]. A continuación definimos los tales operadores pseudo-diferenciales.

Dada una función medible ϕ sobre $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}$, el operador pseudo-diferencial T_ϕ asociado a ϕ está definido sobre $C^\infty(\mathbb{T})$ por la fórmula

$$(T_\phi f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i2\pi nx}\phi(x,n)\widehat{f}(n). \tag{11}$$

Usualmente se llama a la función ϕ el símbolo del operador T_ϕ. Este tipo de operadores surge como generalización en términos de la transformada de Fourier de operadores diferenciales definidos en el toro $\mathbb{T}$ como variedad, es decir operadores diferenciales clásicos que actuando sobre una función suave f tienen la forma:

$$p(x,\partial_x)f(x) = \sum_{0\leq k\leq m} a_k(x)(\partial_x^k f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i2\pi nx}\phi(x,n)\widehat{f}(n),$$

donde
$$\phi(x,n)=\sum_{0\leq k\leq m}a_k(x)(i2\pi)^k n^k.$$
Se establecen los siguientes hechos como aplicación de nuestros resultados:

Teorema 3.1. *Una condición suficiente para que el operador* $T_\phi:\Lambda^s(\mathbb{T})\to L^\infty(\mathbb{T})$, $0<s\leq 1/2$, *sea acotado, es que la función* ϕ *definida sobre* $\mathbb{T}\times\mathbb{Z}$ *tenga la siguiente propiedad:*
$$\sup_{x\in\mathbb{T}}\|\phi(x,\cdot)\|\in L^p(\mathbb{Z}),\ 2\leq p<\infty. \tag{12}$$

Demostración. Sean $x\in\mathbb{T}$ y $f\in\Lambda_s(\mathbb{T})$ fijos. Denotando por q el exponente conjugado de p, a causa de la desigualdad de Hölder y el teorema 1.4 se tiene que,
$$\begin{aligned}|T_\phi f(x)|&=\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{i2\pi nx}\phi(x,n)\widehat{f}(n)\right|\\&\leq\sum_n|\phi(x,n)||\widehat{f}(n)|\\&\leq\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\phi(x,n)|^q\right)^{1/q}\|\widehat{f}\|_{L^p(\mathbb{Z})}\\&\leq\sup_{x\in\mathbb{T}}\|\phi(x,\cdot)\|_{L^q}\|\widehat{f}\|_{L^p(\mathbb{Z})}.\end{aligned}$$
Finalmente, alguna constante C dependiendo sólo de p y de s satisface
$$\|T_\phi f\|_{L^\infty}\leq C_s\|f\|_{\Lambda^s}.$$
□

Observación 3.2. Si tomamos $\phi(x,\cdot)=\phi(\cdot)$ una función medible independiente de la variable $x\in\mathbb{T}$, el correspondiente operador T_ϕ es un multiplicador de Fourier, es decir verifica la relación $\mathscr{F}(T_\phi f)=\phi(\cdot)(\mathscr{F}f)$. En este caso, se deduce del teorema anterior la continuidad de $T_\phi:\Lambda^s(\mathbb{T})\to L^\infty(\mathbb{T})$ al tomar $\phi\in L^p(\mathbb{Z})$, con $2\leq p<\infty$.

El siguiente teorema es una estimación que generaliza el teorema 4 propuesto en [5]. De hecho, tal teorema se deduce del siguiente resultado al tomar $p=1$.

Teorema 3.3. *Sean* $2/3<p<\infty$, q *el exponente conjugado de* p, $s_p=1/p-1/2<s<1$ *y* ϕ *una función medible que satisface*
$$|\partial_x^k\phi(x,n)|\leq C(1+|n|)^{-m},\ k=0,1$$
para algún $m>1$ *con* $(m-1)q>1$. *Entonces existe* $M>0$ *tal que* $|T_\phi f|_{\Lambda^s(\mathbb{T})}\leq M\|f\|_{\Lambda^s(\mathbb{T})}$.

Demostración. Si empleamos el teorema del valor medio, garantizamos la existencia de $x_h \in \mathbb{T}$ de modo que

$$e^{12\pi(x+h)n}\phi(x+h,\xi) - e^{i2\pi xn}\phi(x,n) = he^{i2\pi x_h n}\left(\partial_x\phi(x_h,n) + i2\pi xn\phi(x,n)\right).$$

Por uso del teorema 1.3, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{|T_\phi f(x+h) - T_\phi f(x)|}{|h|^s} &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |h|^{1-s}|\partial_x\phi(x_h,n) + i2\pi xn\phi(x,n)||\widehat{f}(n)| \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} C(\langle n\rangle^{-m} + \langle n\rangle^{-m+1})|\widehat{f}(n)| \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2C\langle n\rangle^{-(m-1)}|\widehat{f}(\xi)| \\ &\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{-(m-1)q}\right)^{1/q}\left(\sum_n |\widehat{f}(n)|^p\right)^{1/p} 2C \\ &\leq 2C\|f\|_{\Lambda^s}.\end{aligned}$$

Así, $|T_\phi f|_{\Lambda^s} \leq 2C\|f\|_{\Lambda^s}$. □

Agradecimientos: El autor agradece al revisor por sus importantes comentarios los cuales permitieron mejorar el contenido y la forma de este artículo.

Bibliografía

[1] A.Zygmund, *Trigonometric series*, 2.ª ed., Cambridge University Press, 1959.

[2] S. Bernstein, «Sur la convergence absolue des séries trigonométriques», *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris*, vol. 158, 1914, 1661–1663.

[3] W. R. Bloom, «Bernstein's inequality for locally compact Abelian groups», *Journal the Australian mathematical society*, vol. 17, 1974, 88–101.

[4] D. Cardona, «A note on the Fourier transform in Hölder spaces», preprint.

[5] ———, «Hölder estimates for pseudo-differential operators on $\mathbb{T}^1$», *J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.*, vol. 5, 2014, 517–525.

[6] Y. Katznelson, *An introduction to Harmonic Analysis*, Cambridge University Press, 2004.

[7] L. Leinder, «Comments on the absolute convergence of Fourier series», *Hokkaido Mathematical Journal*, vol. 30, 2001, 221–230.

[8] N. Ogata, «On the absolute convergence of Lacunary Fourier Series», *Scientiae Mathematicae*, vol. 2(3), 1949, 337–343.

[9] C. W. Onnewer, «Absolute convergence of Fourier series on certain groups», *Duke Mathematical Journal*, vol. 39, 1972, 599–609.

[10] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3.ª ed., Mc. Graw Hill Co., 1976.

[11] O. Szász, «über den Konvergenzexponenten der Fouriersohen Reihen gewisser Funktionenklassen», *Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften Mathematisch-physikalische Klasse*, 1922, 135–150.

[12] ______, «über die Fourierschen gewiser Funktionenklassen», *Mathematische Annalen*, 1928, 530–536.

[13] ______, «Zur Konvergenztheorie der Fourierschen Reihen. (german)», *Acta Math.*, vol. 61, núm. 1, 1933, 185–201.

[14] ______, «Fourier series and mean moduli of continuity», *Trans. American Math. Soc.*, vol. 42, 1937, 366–395.

[15] E. C. Titchmarsh, «A note on the Fourier transform», *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 2, 1963, 148–150.