Las particiones y el Teorema de Bolzano

Carlos Bosch Giral
Departamento de Matemáticas
ITAM
Río Hondo # 1
Tizapán, San Angel
01000 México, D.F.
México
bosch@itam.mx

A la memoria de mi amigo Juan José Rivaud Morayta

1. Las integrales

En la teoría de integración de Riemann (1826-1866) se utilizan particiones de un intervalo $[a, b]$ y se define la integral de la siguiente manera: Si $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $A \in \mathbb{R}$, A es la integral de Riemann de la función f si $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que si $n \in \mathbb{N}$ y $t_0, t_1, \ldots, t_n$ y $S_1, S_2, \ldots, S_n$ son números reales tal que $a = t_0 \leq S_1 \leq t_1 \leq S_2 \leq t_2 \ldots \leq t_{n-1} \leq S_n \leq t_n = b$ (los puntos $t_0, t_1, \ldots, t_n$ forman una partición del intervalo $[a, b]$) y $t_i - t_{i-1} < \delta$, $\forall\ i = 1, \ldots, n$ (esto quiere decir la longitud de cada intervalo menor que el número δ que depende de ε).

$$\left| A - \sum_{i=1}^{n} f\left(S_i\right)\left(t_i - t_{i-1}\right) \right| < \varepsilon\,.$$

Es importante observar que los puntos S_i son cualesquiera en cada uno de los intervalo $\left[t_{i-1}, t_i\right]$. Usualmente al número A se le denota como $\displaystyle\int_a^b f\left(t\right) dt$.

Esta definición es sencilla y es la que se utiliza en los cursos de Cálculo. Sin embargo resulta que hay muchas funciones que no tienen integral de Riemann.

Para solventar esta deficiencia Lebesgue (1845-1941) usando otro enfoque y una definición más complicada obtiene una nueva teoría de integración a principios del siglo XX. Esta teoría resulta sumamente útil pues hay una gran cantidad de funciones integrables en el sentido de Lebesgue. Sin embargo la construcción de las antiderivadas no es totalmente satisfactoria.

En 1912 Denjoy y 1914 Perrón independientemente dan una teoría de integración más general que la de Lebesgue en la que la construcción de las antiderivadas se vuelve más satisfactoria. Sin embargo sus definiciones son equivalentes hasta en lo complicado.

Varios años después, a mediados de los años cincuenta el inglés Ralph Henstock (nacido en 1923) y el checo Jaroslav Kurzweil (nacido en 1925) reformulan de manera independiente la teoría propuesta por Denjoy y Perrón con ideas más sencillas que las usadas por Lebesgue. En realidad sólo hay una pequeña diferencia con la integral en el sentido de Riemann.

La definición que dan Henstock y Kurzweil es la siguiente:

Definición 1.1. Sea $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $H \in \mathbb{R}$, H es la integral de Henstock Kurzweil si $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta\colon [a,b] \longrightarrow (0,\infty)$ (esta es la diferencia con la integral de Riemann pues aquí tenemos una función positiva en vez de un número positivo, aunque la función δ depende también de ε), tal que si $n \in \mathbb{N}$ y $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ y $S_1, S_2, \ldots, S_n$ son números reales tales que

$$a \leq t_0 \leq S_1 \leq t_1 \leq S_2 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq S_n \leq t_n = b$$

y

$$t_i - t_{i-1} < \delta\left(S_i\right), \forall\, i = 1, \ldots, n$$

(aquí tenemos que observar que la longitud de cada intervalo está controlada por el valor de la función δ en el punto interior, S_i , del intervalo $[t_{i-1}, t_i]$) entonces

$$\left| H - \sum_{i=1}^{n} f\left(S_i\right)\left(t_i - t_{i-1}\right) \right| < \varepsilon$$

Usualmente el número H se le denota como $HK\int_a^b f\left(t\right)dt$.

La gran diferencia entre la integral de Riemann y la integral de Henstock-Kurzweil está en el tipo de particiones que se usan en un caso la longitud de los intervalos está controlada por una constante y en el otro por una función.

A continuación vamos a introducir distintos tipos de particiones.

2. Las particiones y el lema de Cousin

Sea $I = [a, b]$, denotamos por $\ell(I) = b - a$. $\overline{P} = \{I\colon\ i = 1, \ldots, n\}$ es una partición de I si $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ para $i = 1, \ldots, n$ y $t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$. A cada intervalo I_i le asignamos un $S_i \in I_i$. Se dice que S_i es la etiqueta de I_i. Ahora, si consideramos a las parejas de intervalos y su etiqueta decimos que tenemos una partición marcada y la denotamos como $P = \{(I_i, S_i) : i = 1, \ldots, n\}$.

Sea $\delta\colon\ [a, b] \longrightarrow (0, \infty)$, una función positiva. Para cada punto $t \in [a, b]$ podemos construir un intervalo controlado por δ alrededor del punto t, $[t - \delta(t), t + \delta(t)]$.

$P = \{(I_i, S_i) : i = 1, \ldots, n\}$ es δ-fina si $I_i \subset [S_i - \delta(S_i), S_i + \delta(S_i)]$, en este caso se dice que cada I_i está en el intervalo controlado por δ, lo cual es equivalente a que $\ell(I_i) \leq 2\delta(S_i)$.

Veamos algunos ejemplos

(a) Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $\delta\colon I \longrightarrow (0, \infty)$ definida por $\delta(t) = \frac{a}{2}$, $\forall\, t \in I$. Si $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ entonces $P = \{(I_i, t_i) : i = 1, \ldots, n\}$ es δ-fina si y sólo si $I_i \subset [t_i - a, t_i + a]$ es decir $[t_{i-1}, t_i] \subset [t_i - a, t_i + a]$ de donde la longitud de cada I_i debe ser menor o igual que el número a o bien la norma de la partición P, $\max\{t_i - t_{i-1} : i = 1, \ldots, n\}$ es menor o igual que a.

(b) Sea $I = [0, 1]$ y $\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si} \quad t = 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{si} \quad 0 < t \leq 1 \end{cases}$

Claramente δ es positiva. Veamos que si $P = \{(I_i, S_i) : i = 1, \ldots, n\}$ es δ-fina entonces 0 debe ser etiqueta de algún intervalo, es decir que $(I_i, 0) \in P$. En efecto para ver esto como P es δ-fina tenemos

$$[0, x_1] = I_1 \subset [S_1 - \delta(S_1), S_1 + \delta(S_1)]$$

para alguna S_1 en el intervalo I_1, así que $S_1 - \delta(S_1) \leq 0$ pues 0 esta en I_1.

Si $S_1 \neq 0$ entonces $S_1 > 0$ de donde $\delta(S_1) = \frac{1}{2}S_1$ por lo tanto $S_1 - \delta(S_1) = S_1 - \frac{1}{2}S_1 = \frac{1}{2}S_1 < 0$ lo cual contradice que $S_1 > 0$. Así que $S_1 = 0$ que es lo que queríamos probar. Así por ejemplo

$$P_1 = \left\{ \left(\left[0, \frac{1}{4} \right], 0 \right), \left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right], \frac{3}{8} \right), \left[\frac{1}{2}, 1 \right], 1 \right\}$$

es δ-fina. Además,

$$P_2 = \left\{ \left(\left[0, \frac{1}{5} \right], 0 \right), \left(\left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right], \frac{2}{5} \right), \left(\left[\frac{2}{5}, \frac{1}{2} \right], \frac{2}{5} \right), \left(\left[\frac{1}{2}, 1 \right], \frac{3}{4} \right) \right\}$$

también es δ-fina. Observe que $\frac{2}{5}$ es etiqueta de dos intervalos.

Sin embargo

$$P_3 = \left\{ \left(\left[0, \frac{1}{4} \right], 0 \right), \left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right], \frac{1}{2} \right), \left(\left[\frac{1}{2}, 1 \right], \frac{1}{2} \right) \right\}$$

no es δ-fina pues $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ no está contenido en $\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{4}\right]$.

Como acabamos de ver hay algunos puntos en el intervalo que controlan intervalos más grandes que otros. Debemos entonces tratar de contestar la siguiente pregunta. ¿Dada $\delta\colon [a,b] \to (0,\infty)$ siempre se podrá construir una partición δ-fina $P = \{(I_i, S_i) : i = 1, \ldots, n\}$ donde cada etiqueta controla al intervalo I_i? Cousin (1867-1933) da una respuesta positiva a esta pregunta, lo cual enunciamos a continuación y demostraremos posteriormente.

Lema 2.1 (Cousin). *Si $I = [a,b]$ y $\delta\colon I \longrightarrow (0,\infty)$ entonces existe una partición δ-fina del intervalo $[a,b]$.*

Observe que no hay condiciones de continuidad sobre la función, en particular en el ejemplo (b) la función no es continua en el punto 0.

3. Teorema de Bolzano.

Usaremos el Lema de Cousin para dar una demostración del Teorema del Valor Intermedio o de Bolzano. Este es un teorema que a los estudiantes de cálculo no les causa ninguna sorpresa y en general se preguntan "¿Por qué hay que probar algo tan evidente?". En efecto ellos visualizan el teorema como si hubiese una calle o un río y una persona de cada lado. Para reunirse es evidente que alguna de ellas deberá cruzar la calle o el río.

Teorema 3.1 (Bolzano o del valor intermedio). *Sea* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua y* L *un número entre* $f(a)$ *y* $f(b)$, *entonces existe* $c \in [a,b]$ *tal que* $f(c) = L$.

Demostración: Sin perdida de generalidad supongamos que $f(a) < L < f(b)$. Haremos una demostración por contradicción, es decir que supondremos que $f(x) \neq L$ para todo $x \in [a,b]$. Esto intuitivamente quiere decir que para reunirse las dos personas, no es necesario crucen la calle, lo cual intuitivamente quiere decir que ambas estaban del mismo lado de la calle, lo cual contradice el hecho de que inicialmente estaban en lados distintos de la calle. Esto es lo que haremos en esta demostración.

En efecto si $f(x) \neq L$, $\forall\, x \in [a,b]$ entonces si $x \in [a,b]$ se tiene $f(x) > L$ o bien $f(x) < L$.

1. Si $f(x) > L$ por ser f continua $\exists\, \delta_x > 0$ tal que $f(x) > L$ para $t \in [a,b]$ tal que $|t - x| < \delta_x$.

2. Si $f(x) < L$ por ser f continua $\exists\, \delta_x > 0$ tal que $f(x) < L$ para $t \in [a,b]$ tal que $|t - x| < \delta_x$.

Por lo tanto esto nos define una función $\delta\colon\ [a,b] \longrightarrow (0,\infty)$ como $\delta(x) = \delta_x > 0$. Así por el lema de Cousin existe una partición δ-fina

$$P = \{([x_{i-1}, x_i], c_i) \;:\;\; i = 1, \ldots, n\}$$

donde para cada i, $f(t) > L$ en todo el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ o bien $f(t) < L$ en todo el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Como $f(a) = f(x_0) < L$ entonces en todo el intervalo $[x_0, x_1]$, f es menor que L en particular en x_1, $f(x_1) < L$.

Como $f(x_1) < L$, f es menor que L en todo el intervalo $[x_1, x_2]$ así $f(x_2) < L$ y seguimos de manera análoga hasta llegar al intervalo $[x_{n-1}, x_n]$ donde $f[x_{n-1}] < L$ así que $f(x_n) < L$ pero $x_n = b$ de modo que $f(b) < L$ lo cual contradice la hipótesis. Podemos entonces concluir que existe c en $[a,b]$ tal que $f(c) = L$. $\square$

4. La importancia del Lema de Cousin

¿Qué tiene el lema de Cousin que permita probar un teorema tan básico como el teorema del valor intermedio? Hagamos una demostración del lema primero. Consideramos el conjunto

$$S = \{x \in [a,b] :\ \text{existe una partición } \delta - \text{fina en } [a,x]\}.$$

Es claro que $S \neq \phi$ pues $a \in S$ y además está acotado por arriba por b. Así que por el axioma del Supremo existe $x^* = \sup S$, además $x^* \in [a,b]$. Al ser x^* el supremo de S se tiene que el intervalo $[a, x^*]$ tiene una partición $\delta-$fina. De manera que el intervalo más grande contenido en $[a,b]$ para el cual se tiene una partición P que es $\delta-$fina es $[a, x^*]$.

Si $x^* < b$, tenemos que $\delta(x^*) > 0$ así que si a P le podemos unir el elemento $\left(\left[x^*, x^* + \frac{\delta(x^*)}{2}\right], x^*\right)$ y así obtenemos una partición $\delta-$fina del intervalo $\left[a, x^* + \frac{\delta(x^*)}{2}\right]$ donde $x^* < x^* + \frac{\delta(x^*)}{2}$ lo cual contradice que $x^* = \sup\ S$, así que $x^* = b$, con lo cual terminamos la prueba.

Ahora podemos ver la importancia del lema de Cousin pues tenemos que el Axioma del Supremo implica el lema de Cousin que a su vez implica el teorema de Bolzano. Como el Teorema de Bolzano es equivalente al axioma del supremo, el lema de Cousin también lo es, es decir que el lema de Cousin es equivalente a propiedades como la de Bolzano-Weierstrass: "Todo conjunto infinito acotado en $\mathbb{R}$ tiene un punto de acumulación" o la propiedad de las sucesiones monótonas: "Toda sucesión monótona acotada es convergente" o la propiedad de los intervalos anidados: "Si $I_n = [a_n, b_n]$ para $n = 1, 2, \ldots$ y

$$\ldots \subset I_n \subset \ldots \subset I_2 \subset I,$$

entonces $\cap_n I_n \neq \phi$", todos ellos teoremas fundamentales en análisis.

5. La integral de Lebesgue.

Para terminar veremos como se expresa la integral de Lebesgue utilizando particiones. Para eso tenemos que introducir un "nuevo tipo" de particiones, las particiones semimarcadas.

Una partición de $[a,b]$ es semimarcada si la etiqueta del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, S_i puede estar fuera del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Sea $\delta : [a,b] \to (0, \infty)$, definimos un intervalo semimarcado subordinado a δ como un intervalo $[c,d]$ con etiqueta S tal que $[c,d] \subset (S - \delta(S), S + \delta(S))$. Entonces

$$PS = \{([x_{i-1}, x_i], S_i) : \ i = 1, \ldots, n\}$$

es una partición semimarcada $\delta-$fina si cada intervalo semimarcado está subordinado a δ.

Estamos ahora listos para dar la definición de lo que se conoce como la integral de Henstock-Kurzweil-MacShane.

Definición 5.1. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, y $B \in \mathbb{R}$, B es la integral de Henstock-Kurzweil-MacShane si, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta\colon [a,b] \longrightarrow (0,\infty)$ tal que si $PS = \{([x_{i-1}, x_i], S_i) \,:\, i = 1,\ldots,n\}$ es una partición semimarcada $\delta-$fina entonces

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(S_i)\,(x_{i-1}, x_i) - B\right| < \varepsilon$$

Al número B se le denota como $HMS\displaystyle\int_a^b f$.

Se puede probar que $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable en $[a,b]$ si y sólo si es Henstock-Kurzweil-MacShane integrable.

También se puede probar que a toda partición semimarcada $\delta-$fina de $[a,b]$ le corresponde una partición $\delta-$fina de $[a,b]$, con lo cual la integral de Henstock-Kurzweil-MacShane, y por lo tanto la integral de Lebesgue resultan ser del tipo de la integral de Henstock-Kurzweil. Esta última integral es entonces mas general que la de Lebesgue.

Referencias

[1] G.R. Bartle, A modern theory of integration, Grad. Studies Math., **32**, American Math. Soc. 2001.

[2] G.R. Bartle, *Return to the Riemann integral*, AMM **103**, No. 8 (1996), 625–632.

[3] C. Bosch, *El teorema de Bolzano o un teorema que no debe pasar inadvertido*, Educación Matemática **5**, No. 3 (1993), 6–19.

[4] C. Bosch, J. Kucera, *De una integral a otra ¿cuál escoger?*, Miscelánea Matemática, Soc. Mat. Mexicana **28** (1999), 1–10.

[5] J. Lepree, C. Swartz, Introduction to Real Analysis (1988), John Wiley & Sons.

[6] R.. Gordon, *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstocks*, Grad. Studies Math. **4**, American Math. Soc., 1994.

[7] C. Imaz, J.J. Rivaud, *¿Substituir la integral de Riemann?* Miscelánea Matemática, Soc. Mat. Mexicana **29**, (1999), 1–4.

[8] E. Schechter, An introduction to the gauge integral, (1998). http://atlas.math.vanderbilt.edu/schectex/ccc/gauge/