

ALGUNOS ASPECTOS DE LA TEORIA DE LA BIFURCACION
Y PROBLEMAS DE AUTOVALORES PARA OPERADORES NO LINEALES

*

José A. Canavati A.

I.- INTRODUCCION.

Entenderemos por un problema de autovalores de un operador no lineal, al problema de encontrar las soluciones apropiadas de una ecuación no lineal de la forma

$$F(\lambda, u) = 0 \quad (1)$$

Aquí $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ es un operador no lineal que depende del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$, donde X y Y son espacios de Banach sobre los reales.

Una de las primeras preguntas que uno se hace es cuando o no (1) tiene alguna solución u para algún valor de λ dado. Si tal solución existe, la segunda pregunta que a uno se le ocurre es cuántas soluciones u hay y finalmente como varían éstas con λ .

De particular interés para nosotros es el proceso de bifurcación, por medio del cual una solución dada de (1) se parte en dos o más soluciones cuando λ pasa a través de un valor crítico λ_0 , el cual se dice que es un punto de bifurcación de (1).

* Investigador del CIMAS

Para ilustrar este fenómeno, consideramos el siguiente problema de autovalores para un operador lineal $L : X \rightarrow X$,

$$Lu = \lambda u. \quad (2)$$

Hacemos $F(\lambda, u) = Lu - \lambda u$, vemos entonces que (2) es equivalente a (1). Notemos que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, una solución de (2) está dada por $u = 0$ i.e., $F(\lambda, 0) = 0$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

Supongamos que se tiene una sucesión de valores propios $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ y la correspondiente sucesión de vectores propios de norma igual a uno: u_1, u_2, u_3, \dots , tales que

$$Lu_i = \lambda_i u_i, \quad \|u_i\| = 1 \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (3)$$

Luego si α es cualquier número real, otras soluciones de (2) están dadas por $u = \alpha u_i$, $i = 1, 2, \dots$. La norma de la solución $u = 0$ es igual a cero, mientras que la norma de la solución $u = \alpha u_i$ es igual a $|\alpha|$. La gráfica de las normas de éstas soluciones está dada en la figura 1., la cual muestra que la curva de las soluciones triviales $\{(\lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times X$ se parte en dos ramas en cada uno de los valores propios λ_i . Luego los puntos de la

forma $(\lambda_i, 0) \in \mathbb{R} \times X$ son puntos de bifurcación del problema (1).

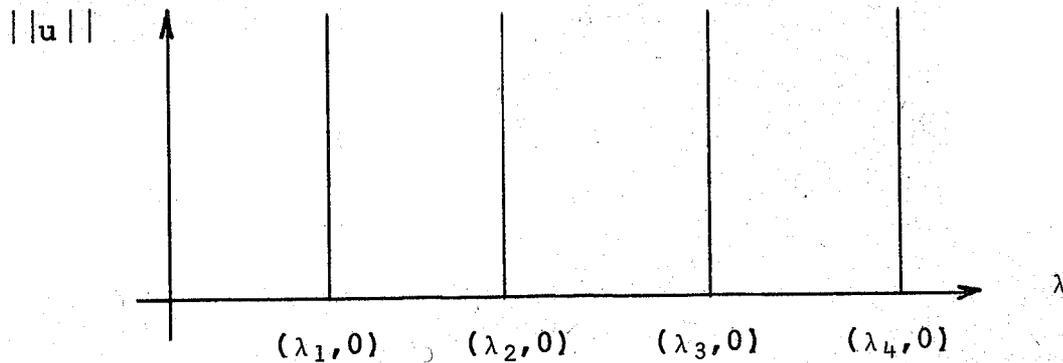


Figura 1.

Supongamos ahora que el problema no lineal (1) satisface $F(\lambda, 0) = 0$ y que tiene a (2) como su linealización. Entonces, bajo ciertas condiciones, se puede demostrar que la curva de las soluciones triviales de (1) se bifurca solamente en los puntos $(\lambda_i, 0)$ y esta manifiesta el comportamiento siguiente:

- i) Las ramas que emanan de los puntos $(\lambda_i, 0)$ son curvas.
- ii) Puede que no exista una rama que emane del punto $(\lambda_i, 0)$ i.e., no hay bifurcación en $(\lambda_i, 0)$.
- iii) Puede suceder que varias ramas emanen de un punto $(\lambda_i, 0)$.
- iv) Es posible que exista bifurcación secundaria.
- v) Las ramas que emanan de distintos puntos $(\lambda_i, 0)$ y $(\lambda_j, 0)$ pueden estar conectadas.

vi) Puede que existan curvas de soluciones de (1) que no emanen de los puntos $(\lambda_i, 0)$, como en las curvas C_1 y C_2 de la figura 2.

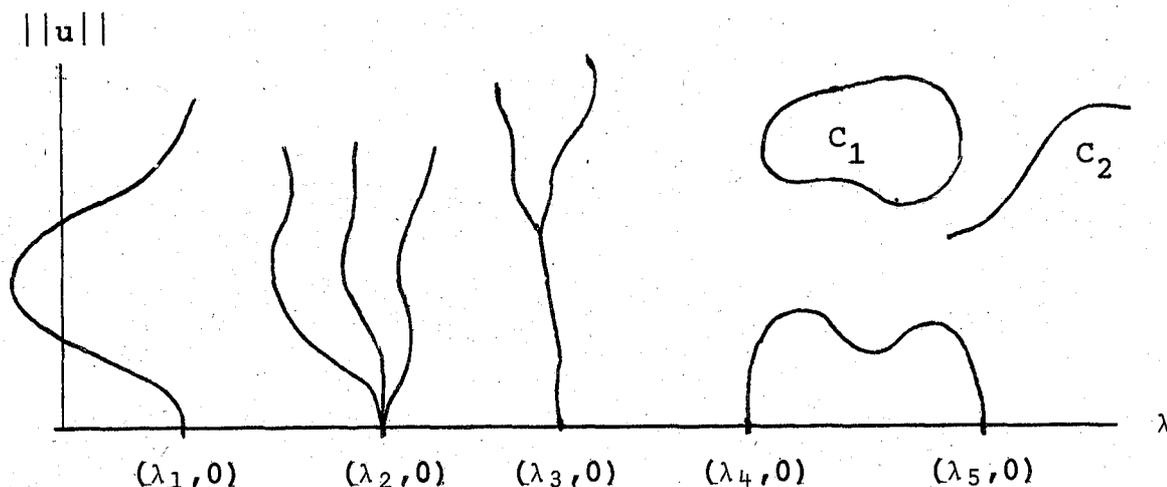


Figura 2.

Mas adelante daremos algunos ejemplos concretos en donde se muestre el comportamiento que acabamos de describir.

Pasaremos ahora a definir el problema general (para nuestros propósitos) de la bifurcación. Supongamos dado un operador no lineal $F(\lambda, u)$ que satisface $F(\lambda, 0) = 0$ para toda $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces se dice que el punto $(\lambda_0, 0) \in \mathbb{R} \times X$ es un punto de bifurcación para la ecuación (1) con respecto a la curva de las soluciones triviales $\{(\lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times X$ de $F(\lambda, u) = 0$, si cada vecindad (en $\mathbb{R} \times X$) del punto $(\lambda_0, 0)$ contiene una solución (λ, u) que no pertenece a la curva de soluciones triviales de (1).

El problema básico de la teoría de la bifurcación es el de encontrar los puntos de bifurcación de (1) y el estudio de la estructura del conjunto $F^{-1}(0)$ en la cercanía de estos puntos. Por ejemplo, es fácil demostrar que si $F_x(\lambda, 0)$, la derivada de Frechet de F con respecto a x evaluada en el punto $(\lambda, 0)$ es un isomorfismo de X sobre Y , entonces $(\lambda, 0)$ no es un punto de bifurcación de (1)

Una de las formas más usuales que toma el operador F (por ejemplo en el estudio de problemas con valores en la frontera) es la siguiente:

$$F(\lambda, u) = \lambda L_1 u - L_2 u + H(\lambda, u), \quad (4)$$

donde L_1 y L_2 son operadores lineales (L_1 o L_2 pueden ser cerrados, continuos, compactos, etc.) y $H(\lambda, u)$ es un operador no lineal y continuo con $H(\lambda, u) = o(\|u\|)$ cuando $u \rightarrow 0$, uniformemente para λ en conjuntos acotados.

Supongamos que $L : X \rightarrow X$ es un operador lineal acotado. Decimos que $\mu \in \mathbb{R}$ es un valor característico de L , si existe $u \in X$, $u \neq 0$ tal que $u = \mu Lu$. Definimos la multiplicidad de λ como la dimensión de $\ker (I - \mu L)$ y el índice de λ como la dimensión de $\bigcup_{n=1}^{\infty} \ker (I - \mu L)^n$, donde

$I : X \rightarrow X$ denota la transformación idéntica en X . Con las modificaciones obvias se tienen las mismas definiciones -- para los valores propios. Denotamos por $\pi(L)$ al conjunto de todos los valores propios reales de L y por $\chi(L)$ al -- conjunto de todos los valores característicos reales de L . Notemos que si $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda \in \pi(L)$ si y sólo si $\lambda^{-1} \in \chi(L)$.

Si en (4) se tiene que $L_1 = L$ es un operador compacto y $L_2 = I$, entonces es fácil ver que una condición necesaria para que $(\mu, 0)$ sea un punto de bifurcación para (1) es que $\mu \in \chi(L)$.

II.- ALGUNOS EJEMPLOS ILUSTRATIVOS.

Ejemplo 1.- Consideremos el problema de la flexión de una barra recta de longitud unitaria y con flexibilidad variable $\rho(s)$, dispuesta como en la figura siguiente.



Figura 3.

Es bien sabido que la deflexión $y(s)$ que -- resulta al aplicar una fuerza horizontal P se determina como la solución de la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$y''(s) + P \rho(s) y'(s) \left\{ 1 - [y'(s)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0, \quad (5)$$

con la condiciones en la frontera: $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

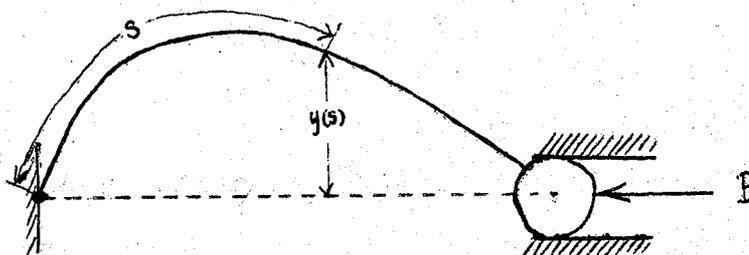


Figura 4.

Si hacemos $-y''(s) = u(s)$ y tomamos en cuenta las condiciones en la frontera, es bien conocido que $y(s)$ se puede expresar en la forma

$$y(s) = \int_0^1 K(s,t)u(t)dt, \quad (6)$$

donde $K(s,t)$ es la función de Green:

$$K(s,t) = \begin{cases} s(1-t), & s \leq t \\ t(1-s), & s \geq t. \end{cases}$$

Si sustituimos (6) en (5), vemos que podemos determinar a la función $u(s)$ como la solución de la ecuación integral no lineal

$$u(s) = P \rho(s) \left\{ 1 - \left[\int_0^1 K_s(s,t)u(t)dt \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \int_0^1 K(s,t)u(t)dt.$$

Si hacemos $P = \lambda$ y definimos $Au(s)$ como lo que queda en el lado derecho de (7) al quitar P , entonces vemos que (7) puede escribirse como

$$u(s) = \lambda Au(s). \quad (8)$$

El operador A tiene como dominio a $X = C(0,1)$ y es fácil ver que $A(X)$ está contenido en X . Además puede comprobarse que A es un operador compacto y continuo. La derivada de Frechet de A evaluada en $u = 0$, la cual denotamos por B , está dada por

$$Bu(s) = \rho(s) \int_0^1 K(s,t)u(t)dt. \quad (9)$$

Todos los valores característicos del operador lineal B coinciden con los valores propios del problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} y''(s) + \lambda \rho(s)y(s) &= 0 \\ y(0) = y(1) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Puesto que todos los valores propios de (10) son simples es posible demostrar, véase la parte III de éste artículo, que ellos dan lugar a puntos de bifurcación para la ecuación integral no lineal (8). La interpretación física de estos resultados es la siguiente: Es fácil ver que si $\lambda > 0$ es suficientemente pequeño, entonces el operador λA es una contracción en la bola unitaria del espacio $C(0,1)$. Luego, si λ es pequeño, entonces la única solución de (8) en la bola unitaria es la solución $u = 0$. Esto significa que para valo

res pequeños de λ la barra no se dobla. Sin embargo, para fuerzas mayores que la "fuerza crítica de Euler" i.e., el primer valor propio de (10), la barra se dobla hacia arriba o hacia abajo.

Ejemplo 2.- Aquí estudiaremos una ecuación de la forma

$$\lambda u = Lu + N(u). \quad (11)$$

Donde $x \in \mathbb{R}^2$, $u = (x, y)^t$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $N(u) = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix}$.

Notemos que (11) es equivalente a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda x &= x + x^3 \\ \lambda y &= -y + y^3. \end{aligned} \quad (11')$$

Resolvemos (11') y obtenemos

$$\begin{aligned} x &= 0 \text{ o } x = \pm \sqrt{\lambda - 1} \\ y &= 0 \text{ o } y = \pm \sqrt{1 - \lambda} \end{aligned} \quad (11'')$$

Demostraremos que si $\lambda \in \pi(L)$, entonces $(\lambda, (0, 0)^t)$ es un punto de bifurcación para (11). Es fácil ver que $\pi(L) = \{-1, +1\}$. Analizamos (11'') para λ cercano a 1 (el caso $\lambda = -1$ se trata de manera análoga) y vemos que:

a.-) Si $\lambda > 1$, entonces una familia de soluciones de (11) está dada por $(\lambda, (\pm \sqrt{\lambda - 1}, 0)^t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

b.-) Si $\lambda < 1$, entonces otra familia de soluciones de (11) está dada por $(\lambda, (0, \pm \sqrt{1 - \lambda})^t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

La geometría de las soluciones está dada en la figura 5.

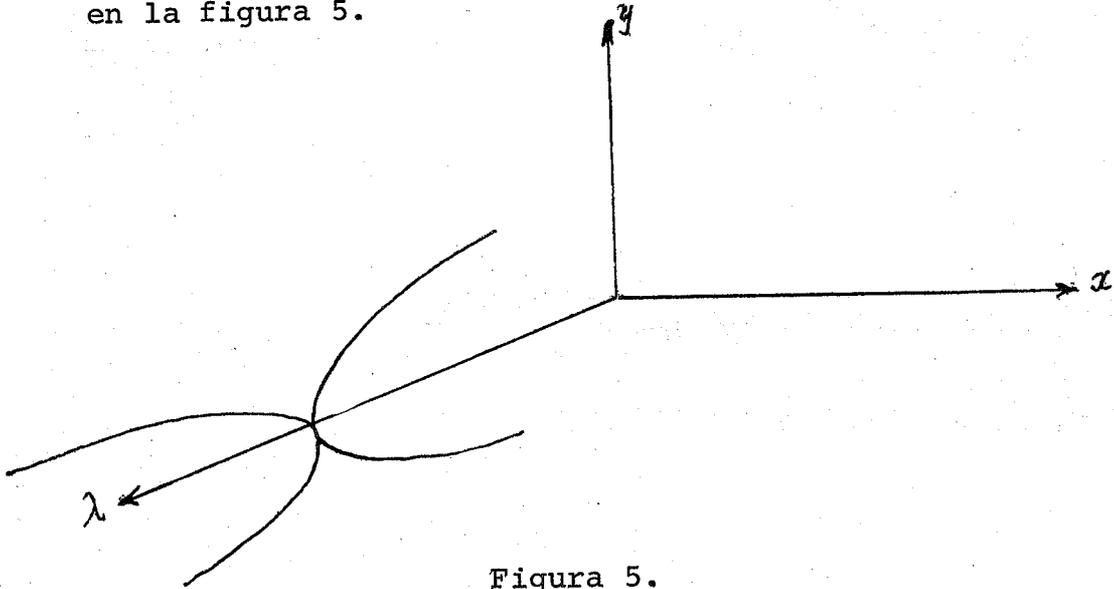


Figura 5.

Vemos entonces que la curva de las soluciones triviales

$$\{ (\lambda, (0,0)^t) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

de (11), se bifurca en el punto $(1, (0,0)^t)$ en cuatro ramas distintas. En el plano $\lambda - \|u\|$, las soluciones de (11) se ven como en la figura 6.

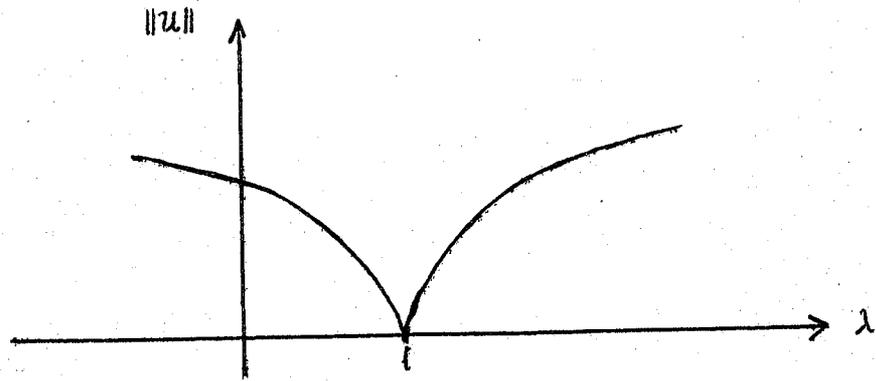


Figura 6.

A continuación damos dos ejemplos que muestran que no todos los $\mu \in \chi(L)$ ($\lambda \in \pi(L)$) corresponden a puntos de bifurcación $(\mu, 0)$ ($(\lambda, 0)$).

Ejemplo 2a.- Sea $X = \mathbb{R}^2$, $u = (x, y)^t$, $L = I$ y $H(\lambda, u) = (-y^3, x^3)^t$.

Entonces (1) se convierte en

$$(x, y)^t = \lambda(x, y)^t + (-y^3, x^3)^t. \quad (12)$$

Si multiplicamos la primera ecuación de (12) por y y la segunda por x y restamos la primera de la segunda, vemos que $\mu = 1$, $u = 0$ no es un punto de bifurcación.

Ejemplo 2b.- " Un problema con valores en la frontera en el cual no existe bifurcación de cada valor propio del problema linealizado ". Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$u'' + \lambda[u + v(u^2 + v^2)] = 0 \quad (13.a)$$

$$v'' + \lambda[v - u(u^2 + v^2)] = 0 \quad (13.b)$$

$$u(0) = u(a) = v(0) = v(a) = 0 \quad (13.c)$$

El problema linealizado

$$u'' + \lambda u = 0 \quad (13.a')$$

$$v'' + \lambda v = 0, \quad (13.b')$$

junto con (13.c) posee un conjunto numerable de valores propios $\lambda_n = -n^2 \pi^2/a^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$, de multiplicidad dos.

Por otra parte, para cualquier solución real $(u,v)^t$ de (13.a,b,c) se tiene que

$$\lambda \int_0^a (u^2 + v^2)^2 dx = 0. \quad (14)$$

Esta identidad se obtiene al multiplicar (13.a) por v , (13.b) por u , integrando por partes sobre el intervalo $[0,a]$ las ecuaciones que resultan, haciendo uso de (13.c) y finalmente restando la segunda integral de la primera. Es claro que la identidad (14) implica que $u = 0$ y $v = 0$, luego no existe bifurcación. Notemos de paso que el sistema (13.a,b) no es variacional i.e., el vector $(u + v(u^2 + v^2), v - u(u^2 + v^2))^t$ no es el gradiente de alguna función escalar $f(u,v)$. Puede demostrarse que si el sistema (13.a,b) hubiera sido variacional, entonces forzosamente se tendría bifurcación en cada punto $(\lambda_n, 0)$.

El ejemplo siguiente muestra que la teoría de la bifurcación es solamente una primera aproximación a una teoría de ecuaciones no lineales. Mas específicamente, las soluciones de una ecuación no lineal pueden formar ramas aisladas que no emanan de los valores propios del problema linealizado.

Ejemplo 3.- Considerése la ecuación diferencial.

$$u'' + \lambda u^2 = 0 \quad (14.a)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (14.b)$$

Todas las soluciones de (14.a,b,) son no negativas o no positivas ya que u'' es no negativa o no positiva, dependiendo del signo de λ . La figura 7 muestra a las soluciones en el plano $\lambda - ||u||$ y el fenómeno de las soluciones aisladas.

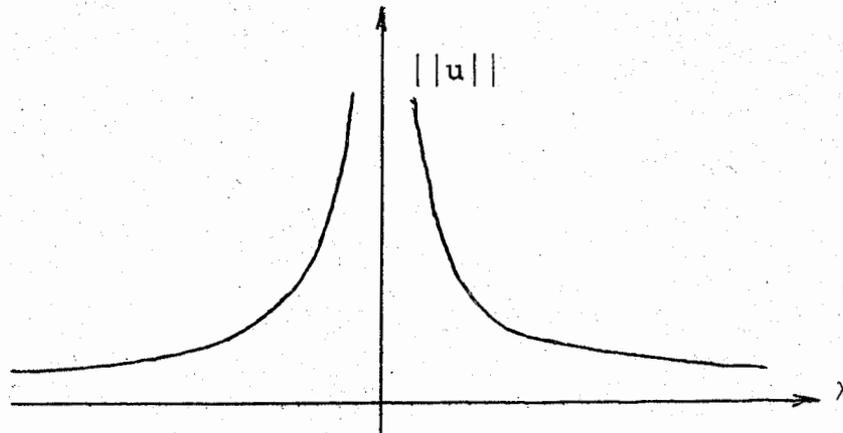


Figura 7.

III.- UN RESULTADO DE LA TEORIA DE LA BIFURCACION.

A continuación enunciamos un resultado de P. Rabinowitz el cual es una generalización de un teorema debido a M. A. Krasnoselski. No daremos su demostración - aquí, solamente mencionaremos que la herramienta que se utiliza para su demostración es la teoría del grado de Leray-Schauder.

Consideremos la ecuación (1) con $F(\lambda, u) = \lambda Lu - u - H(\lambda, u)$.

Aquí L es un operador lineal compacto y H un operador no lineal compacto y continuo con $H(\lambda, u) = o(\|u\|)$ cuando $u \rightarrow 0$, uniformemente para λ en conjuntos acotados. Sea S la cerradura en $R \times X$ del conjunto de todas las soluciones no triviales de (1), entonces S es un subespacio localmente compacto de $R \times X$. Un subcontinuo de S es un subconjunto cerrado y conexo de S y una componente de S es un subcontinuo maximal de S .

Teorema. (Krasnoselski-Rabinowitz). Si $\mu \in \chi(L)$ es de índice impar, entonces S contiene una componente C_μ que contiene a $(\mu, 0)$. Además una de las condiciones siguientes se cumple:

i) C_μ no es acotada,

ii) C_μ contiene a $(\hat{\mu}, 0)$, donde $\hat{\mu} \in \chi(L)$ y $\hat{\mu} \neq \mu$

Este resultado es lo suficientemente general para que pueda ser aplicado a una gran variedad de problemas con valores en la frontera. Por ejemplo, si usamos este resultado junto con otras técnicas relacionadas con la teoría del grado de Leray-Schawder, es posible establecer la existencia de un continuo de soluciones que emanan de los valores propios de las linealizaciones de problemas como:

1.- El problema de Sturm-Liouville no lineal:

$$-(p(x)u')' + q(x)u = F(x, u, u', \lambda), \quad 0 < x < \pi \quad (16)$$

$$a_0 u(0) + b_0 u'(0) = 0$$

$$a_1 u(\pi) + b_1 u'(\pi) = 0$$

Donde $(a_0^2 + b_0^2)(a_1^2 + b_1^2) \neq 0$ y $F(x, \xi, \eta, \lambda) = \lambda a(x) \xi + H(x, \xi, \eta, \lambda)$ con $H(x, \xi, \eta, \lambda) = o((\xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}})$ cuando $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$, uniformemente para λ en conjuntos acotados.

2.- Problemas de ecuaciones diferenciales parciales elípticas cuasilineales: Sea D una superficie " suave " y acotada en R^n .

Consideremos el problema

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, Du) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, u, Du) u_{x_i} + c(x, u, Du) u = \lambda(a(x)u + F(x, u, Du, \lambda)), \quad \text{para } x \in D, \text{ y } u = 0 \text{ para } x \in \partial D. \quad (17)$$

Aquí Du denota cualquier derivada parcial de u de primer orden.

Las funciones a_{ij} , b_i , c , a y F son de clase C^1 . Además $c \geq 0$, $a \geq a_0 > 0$, $F \geq 0$, $F(x, u, p, \lambda) = o((u^2 + ||p||^2)^{\frac{1}{2}})$ cuando $(u, p) \rightarrow (0, 0)$ ($p \in R^n$), uniformemente para λ en conjuntos acotados. Finalmente suponemos que (17) es uniformemente elíptica, i.e.,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, n, p) \xi_i \xi_j \geq \beta \|\xi\|^2, \text{ para } x \in D, n \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

con $\beta > 0$ fija.

El espacio de Banach adecuado para este problema es el siguiente:

Sea $0 < \alpha < 1$ y sea

$$X = \{ u \in C^{1+\alpha}(\bar{D}) \mid u = 0 \text{ en } \partial D \}.$$

Aquí $C^{1+\alpha}(\bar{D})$ es el espacio de Banach de todas las funciones en $C^1(\bar{D})$ que son continuas en el sentido de Hölder en \bar{D} con exponente α , i.e., todas las $u \in C^1(\bar{D})$ con

$$\begin{aligned} \|u\|_{1+\alpha} &= \max_{x \in D} |u(x)| + \max_{1 \leq i \leq n} \max_{x \in D} |u_{x_i}(x)| + \\ &+ \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{x, y \in D} \frac{|u_{x_i}(x) - u_{x_i}(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty. \end{aligned}$$

Volvamos ahora al Teorema. Hemos visto anteriormente ejemplos en los cuales la alternativa (i) del Teorema se cumple. A continuación daremos un ejemplo en el que la alternativa (ii) del Teorema se cumpla. Es claro que una condición suficiente para que (ii) se cumpla es que C_μ sea acotado. El ejemplo siguiente explota esta propiedad.

Ejemplo 4.- Sea $X = \mathbb{R}^2$, $u = (x, y)^t$.

Consideramos la ecuación

$$Au = \lambda(u - B(u)u), \quad (18)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B(u) = \begin{pmatrix} 4x^2 + 6y^2 & -2xy \\ -2xy & 6x^2 + 4y^2 \end{pmatrix}$$

Si invertimos A vemos que la ecuación (18) puede ponerse en la forma (1) con F como en el Teorema y $L = A^{-1}$, la cual tiene como valores característicos a $1/2$ y 1 . De (18) obtenemos las desigualdades

$$(x^2 + y^2)^2 \leq (B(u)u, u) \leq x^2 + y^2, \quad (19)$$

donde $(,)$ denota el producto escalar en \mathbb{R}^2 .

Esta desigualdad implica que $\|u\| \leq 1$ para toda solución (λ, u) de (18). Luego la proyección de $C_{1/2}$ y C_1 en X es acotada. Si la primera alternativa del Teorema se cumpliera, entonces existiría una sucesión (λ_n, u_n) de soluciones de (18) con $\lambda_n \geq n$. Dividimos (18) por λ_n , hacemos tender n a infinito y usamos las cotas para $\|u_n\|$ y vemos que podemos encontrar una subsucesión de las $\{u_n\}$ que converge a una solución v de la ecuación límite

$$B(u)u = u \quad (20)$$

Además $v \neq 0$, ya que de otra forma al dividir (18) por $\|u_n\|$ y al hacer tender n a infinito, obtendríamos una contradicción.

La matriz $B(u)$ puede escribirse como $B(u) = T^{-1}(\theta)D(r)T(\theta)$, donde $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ y

$$D(r) = \begin{pmatrix} 4r^2 & 0 \\ 0 & 6r^2 \end{pmatrix} \text{ y } T(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \pi/4) & \sin(\theta + \pi/4) \\ -\sin(\theta + \pi/4) & \cos(\theta + \pi/4) \end{pmatrix}$$

Reescribimos (20) como $D(r)T(\theta)u = T(\theta)u$ y vemos que $1 = 4r^2 = 6r^2$, lo cual es imposible. Luego pues to que (i) del Teorema no se cumple concluimos que (ii) debe cumplirse.