Miscelánea Matemática **38** (2003) 15–31 SMM

El teorema de los números primos

Jaime Ramos Gaytan
Instituto de Matemáticas, UNAM-Morelia
Apartado Postal 61-3 (Xangari)
58089, Morelia Michoacán
MÉXICO
jramos@matmor.unam.mx

"*In mathematics, simple ideas usually come last*"
J. Hadamard.

1. Introducción.

El objetivo de este trabajo es probar el teorema de los números primos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1, \tag{$\star$}$$

en donde $\pi(x)$ es el número de primos menores o iguales que x. Más precisamente, se analizará la prueba de D.J. Newman [2] con más detalle que en el artículo original. Para esto, nosotros seguimos la exposición de D. Zagier [4], que resulta ya bastante simple, pero un poco resumida.

2. Antecedentes históricos.

El teorema de los números primos fue enunciado por primera vez por Gauss y Legendre a finales del siglo XVIII. El primero en intentar con algún éxito la demostración de ($\star$) fue P.L. Chebyshev. A mediados del siglo XIX, G.F.B. Riemann introdujo la teoría de funciones de variable compleja en el estudio de los números primos. Riemann hizo una serie de afirmaciones sobre el problema de la demostración de ($\star$) que investigadores posteriores se encargarían de demostrar. En particular, en 1896, J. Hadamard y C.J. de la Valleé-Poussin pudieron probar el teorema de los números primos ($\star$). Para más información histórica, ver [1] y [5].

3. Funciones especiales.

En esta sección se definen y se estudian las funciones especiales que nos ayudarán a probar el teorema de los números primos.

Definición 1. Para el número complejo $s = \sigma + it$ tal que $\sigma > 1$ se define la función zeta de Riemann mediante

$$\zeta(s) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Proposición 2. *La función $\zeta(s)$ converge absoluta y uniformemente en subconjuntos compactos del semiplano $\sigma > 1$. Por lo tanto, $\zeta(s)$ representa una función analítica en $\sigma > 1$.*

Demostración. Por el teorema de convergencia analítica (ver [3, pág. 95]) es suficiente probar que la sucesión de funciones analíticas

$$f_k(s) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^s}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\sigma > 1$. Nosotros demostraremos todavía más, a saber, que la convergencia uniforme se da en semiplanos $\sigma \geq \sigma_0$ en donde $\sigma_0 > 1$. Para $s = \sigma + it$ se tiene

$$|n^s| = |n^{\sigma+it}| = |e^{\sigma \log n} e^{it \log n}| = n^{\sigma}\,.$$

Puesto que $\sigma \geq \sigma_0$ entonces $|1/n^s| \leq 1/n^{\sigma_0}$. Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^s}\right| \ \leq \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}} \ \leq \ 1 + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\sigma_0}} dx \ = \ \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - 1}.$$

Esto prueba la convergencia uniforme en el semiplano $\sigma \geq \sigma_0$ de la serie que define $\zeta(s)$. $\square$

Definición 3. Para $s = \sigma + it$ tal que $\sigma > 1$ se define la función $\Phi(s)$ mediante

$$\Phi(s) = \sum_{p} \frac{\log p}{p^s},$$

en donde la suma es sobre todos los números primos.

Lema 4. *La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\sigma}}$ *converge si* $\sigma > 1$.

Demostración. Supongamos que $\sigma > 1$. Sean ε y δ números positivos tales que $\sigma = 1 + \varepsilon + \delta$. Puesto que

$$\frac{\log n}{n^{\delta}} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad n \to \infty\,,$$

entonces existe M tal que

$$0 \,\leq\, \frac{\log n}{n^{\delta}} \,\leq\, M \quad \text{para toda} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\sigma}} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{1+\varepsilon+\delta}} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\delta}} \cdot \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^{1+\varepsilon}} < \infty$$

$\square$

Proposición 5. *La función* $\Phi(s)$ *converge absoluta y uniformemente en subconjuntos compactos del semiplano* $\sigma > 1$. *Por lo tanto,* $\Phi(s)$ *representa una función analítica en* $\sigma > 1$.

Demostración. Sea $\sigma \geq \sigma_0$, en donde $\sigma_0 > 1$. Puesto que cada número primo p es un número natural n, entonces

$$\sum_{p} \left| \frac{\log p}{p^{s}} \right| \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\sigma_0}}.$$

Por el Lema 4 la serie de la derecha es convergente. Por lo tanto, la serie que define a $\Phi(s)$ converge uniformemente en el semiplano $\sigma \geq \sigma_0$ para cada $\sigma_0 > 1$. Por el teorema de convergencia analítica $\Phi(s)$ es una función analítica en $\sigma > 1$. $\square$

Proposición 6. *Para* $\sigma > 1$ *se cumple que* $\displaystyle\zeta(s) \;=\; \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$

Esta proposición es llamada usualmente el producto de Euler para la función zeta de Riemann, en donde se representa a dicha función por medio de un producto infinito extendido sobre todos los números primos.

Demostración. Sea p_k el k-ésimo número primo. Ahora consideremos el producto parcial

$$Q_N = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-p_k^{-s}}.$$

Probaremos que $Q_N \to \zeta(s)$ cuando $N \to \infty$ para cada s tal que $\sigma > 1$. Tenemos entonces que $|1/p^s| = 1/p^\sigma < 1$ para todo p y $\sigma > 1$. Por lo tanto

$$Q_N = \prod_{k=1}^{N} \Big(1 + \frac{1}{p_k^s} + \frac{1}{p_k^{2s}} + \frac{1}{p_k^{3s}} + \cdots\Big)$$

con lo que Q_N queda expresado como un producto finito de series absolutamente convergentes. Esto es, hemos logrado escribir cada uno de los factores como una serie geométrica. Ahora, si multiplicamos todas estas series y reordenamos los términos de acuerdo con el crecimiento de los denominadores, entonces obtenemos otra serie absolutamente convergente, cuyo término general es de la forma

$$\Big(\frac{1}{p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_N^{a_N}}\Big)^s = \frac{1}{n^s} \quad \text{y cada} \quad a_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Por consiguiente tenemos

$$Q_N = \sum{}' \frac{1}{n^s}$$

en donde $\sum'$ está extendida a aquellos n cuyos factores primos son todos menores o iguales que p_N. En otras palabras, $\sum'$ es la suma de los $1/n^s$, en donde n tiene descomposición en factores primos menores o iguales que p_N. Por el teorema fundamental de la aritmética se deduce que cada una de estas n^s aparece en $\sum'$ una y sólo una vez.

Restando Q_N de $\zeta(s)$ obtenemos

$$\zeta(s) - Q_N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum{}' \frac{1}{n^s} = \sum{}'' \frac{1}{n^s}$$

en donde $\sum''$ está extendida a aquellos n que poseen por lo menos un divisor primo mayor que p_N. En otras palabras $\sum''$ es la suma de todos los $1/n^s$ en donde n tiene en su descomposición de factores primos almenos un factor mayor que p_N. Puesto que estos n se hallan entre los enteros mayores que p_N entonces tenemos

$$|\zeta(s) - Q_N| \leq \sum_{n>p_N} \Big|\frac{1}{n^s}\Big| = \sum_{n>p_N} \frac{1}{n^\sigma}.$$

Cuando $N \to \infty$ la última suma tiende a 0. Por lo tanto $Q_N \to \zeta(s)$ cuando $N \to \infty$. $\square$

Proposición 7. *La función*

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

admite una extensión analítica al semiplano $\sigma > 0$.

Demostración. Otra vez la idea es usar el teorema de convergencia analítica. Como antes, es suficiente si probamos convergencia uniforme en subconjuntos compactos del semiplano $\sigma > 0$. Sea K un subconjunto compacto contenido en $\sigma > 0$. Sea $\sigma_0 = \min\{\sigma : \sigma + it \in K\}$. Sea $M = \max\{|s| : s \in K\}$. Si $\sigma > 1$ entonces

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \zeta(s) - \frac{1}{s-1} &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} - \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s} \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \int_n^{n+1} dx - \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s} = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \Big(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\Big) dx \end{aligned}$$

Esta última serie converge absolutamente en $\sigma \geq \sigma_0$. En efecto,

$$\begin{aligned} \Big|\int_n^{n+1} \Big(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\Big) dx\Big| &= \Big|-s \int_n^{n+1} \int_n^x \frac{du}{u^{s+1}} dx\Big| \\ &\leq |s| \int_n^{n+1} \int_n^x \Big|\frac{du}{u^{s+1}}\Big| dx = |s| \int_n^{n+1} \int_n^x \frac{du}{u^{\sigma+1}} dx\,. \end{aligned}$$

Puesto que $1/u^{\sigma+1} \leq 1/n^{\sigma_0+1}$ para cada $n \leq u \leq x \leq n+1$ entonces

$$\Big|\int_n^{n+1} \Big(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\Big) dx\Big| \leq \frac{|s|}{n^{\sigma_0+1}} \int_n^{n+1} \int_n^{n+1} du\ dx = \frac{|s|}{n^{\sigma_0+1}}.$$

De esta manera, si $s \in K$ entonces $|s| \leq M$ y por lo tanto tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\int_{n}^{n+1}\Big(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\Big)dx\Big| \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n^{\sigma_0+1}} < \infty$$

y por lo tanto la convergencia es uniforme en K. $\square$

Definición 8. Para $x \in \mathbb{R}$ se define la función $\vartheta(x)$ mediante

$$\vartheta(x) \;=\; \sum_{p\leq x}\log p,$$

en donde la suma es sobre todos los primos menores o iguales que x.

Para enunciar el siguiente resultado, recordemos que si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones definidas en $\mathbb{R}$ y $g(x) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$ entonces la notación $f(x) = O\big(g(x)\big)$ significa que existen dos constantes $A > 0$ y x_0 tales que $|f(x)| \leq A\, g(x)$ siempre que $x \geq x_0$.

Proposición 9. *La función $\vartheta(x)$ satisface $\vartheta(x) \;=\; O(x)$.*

Demostración. Probaremos que existe $A > 0$ tal que

$$\vartheta(x) \;\leq\; Ax \quad \text{para } x \geq 1.$$

Por la expansión binomial tenemos que

$$2^{2n} \;=\; (1+1)^{2n} \;=\; \binom{2n}{0} + \cdots + \binom{2n}{2n} \;\geq\; \binom{2n}{n} \;\geq\; \prod_{n<p\leq 2n} p.$$

Esto último es cierto ya que

$$\binom{2n}{n} \;=\; \frac{(2n)!}{(n!)^2} \;=\; \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n!} \;\geq\; \prod_{n<p\leq 2n} p$$

puesto que si $n < p \leq 2n$ entonces p aparece en la descomposición del entero $(n+1)\cdots(2n)/n!$ por lo menos una vez. Así

$$2^{2n} \;\geq\; \prod_{n<p\leq 2n} p \;=\; \exp\Big\{\log \prod_{n<p\leq 2n} p\Big\} \;=\; \exp\Big\{\sum_{n<p\leq 2n}\log p\Big\}$$

$$=\; \exp\{\vartheta(2n) - \vartheta(n)\}.$$

Por otra parte, si $a < b$ y f es una función creciente entonces se cumple que $f(a) < f(b)$. En particular la función logaritmo es una función creciente. De la desigualdad $\exp\big\{\vartheta(2n) - \vartheta(n)\big\} \leq 2^{2n}$ tenemos que

$$\vartheta(2n) - \vartheta(n) \ \leq\ 2n \log 2.$$

Por lo tanto, para todo $x \geq 1$ se cumple que

$$\vartheta(2x) - \vartheta(x) \ \leq\ Mx$$

en donde $M \ = \ 2(\log 2 + 1)$. De esta manera se obtiene

$$\begin{aligned}
\vartheta(x) - \vartheta(\frac{x}{2}) &\leq \frac{M}{2}x, \\
\vartheta(\frac{x}{2}) - \vartheta(\frac{x}{4}) &\leq \frac{M}{4}x, \\
\vartheta(\frac{x}{4}) - \vartheta(\frac{x}{8}) &\leq \frac{M}{8}x, \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Sumando verticalmente nos queda

$$\vartheta(x) \ \leq\ xM \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \ = \ Mx\,.$$

□

Proposición 10. *Si $\sigma \geq 1$ entonces $\zeta(s) \neq 0$ y además*

$$\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$$

es analítica en el semiplano $\sigma \geq 1$.

Demostración. Probemos primero que si $\sigma > 1$ entonces $\zeta(s) \neq 0$. Por la Proposición 6 tenemos que

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{1}{\zeta(s)}\Big| \ &= \ \prod_p \Big|1 - \frac{1}{p^s}\Big| \leq \prod_p \Big(1 + \frac{1}{p^\sigma}\Big) \\
&\leq \prod_p \Big(1 + \frac{1}{p^\sigma} + \frac{1}{p^{2\sigma}} + \cdots\Big) = \zeta(\sigma) < \infty\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\zeta(s) \neq 0$ para $\sigma > 1$. Tomando logaritmo a $\zeta(s)$, tenemos

$$\log \zeta(s) = \log \prod_p \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)^{-1} = -\sum_p \log\Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)\,.$$

Derivando término a término obtenemos

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \frac{d}{ds}\log\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big) = \sum_p \frac{\log p}{p^s-1}\,.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\sum_p \frac{\log p}{p^s-1} &= \sum_p \frac{p^s\log p}{p^s(p^s-1)}\\ &= \sum_p \frac{p^s\log p - \log p + \log p}{p^s(p^s-1)}\\ &= \sum_p \frac{(p^s-1)\log p + \log p}{p^s(p^s-1)}\\ &= \sum_p \Big[\frac{\log p}{p^s} + \frac{\log p}{p^s(p^s-1)}\Big]\end{aligned}$$

de donde

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \frac{\log p}{p^s-1} = \Phi(s) + \sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s-1)}\,.$$

Afirmamos ahora que

$$\sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s-1)}$$

converge absolutamente para $\sigma > 1/2$. Para probar nuestra afirmación veamos primero algunas acotaciones. Tomando $|p^s-1|$ tenemos que

$$|p^s-1| \geq |p^s| - 1 = p^\sigma - 1 > \frac{p^\sigma}{10}$$

y tomando inversos

$$\frac{1}{|p^s-1|} < \frac{10}{p^\sigma}.$$

De esta manera

$$\sum_p \Big|\frac{\log p}{p^s(p^s-1)}\Big| = \sum_p \frac{\log p}{|p^s||p^s-1|} \leq 10 \sum_p \frac{\log p}{p^{2\sigma}}\,.$$

Esta última serie converge por el Lema 4 y puesto que $2\sigma > 1$. Por el teorema de convergencia analítica, la serie

$$F(s) \;:=\; \sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s-1)}$$

representa una función analítica en el semiplano $\sigma > \frac{1}{2}$.

Tenemos entonces que

$$\Phi(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s-1)} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - F(s).$$

Examinemos ahora la analiticidad de $\Phi(s)$. Por la Proposición 7, tenemos que $h(s) := \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ es analítica en $\sigma > 0$. Despejando $\zeta(s)$

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + h(s)$$

y reescribiendo a $h(s)$ de la siguiente forma

$$h(s) = \frac{(s-1)h(s)}{s-1} = \frac{H(s)}{s-1} \quad \text{con} \quad H(s) = (s-1)h(s),$$

tenemos

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1}(1 + H(s)).$$

Haciendo $G(s) = 1 + H(s)$

$$\zeta(s) = \frac{G(s)}{s-1}$$

con lo que $\zeta(s)$ queda expresada como producto de dos funciones. Ahora tomamos la derivada logarítmica para obtener

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} - \frac{G'(s)}{G(s)}.$$

Por lo tanto tenemos que

$$\Phi(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - F(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{G'(s)}{G(s)} - F(s).$$

De esta manera $\Phi(s)$ se extiende meromórficamente a $\sigma > 1/2$. Esto es, $\Phi(s)$ es analítica en $\sigma > 1/2$ excepto en $s = 1$ y también en aquellos puntos en donde $\zeta(s)$ se anula, pues estos puntos son polos para $\Phi(s)$. Recuerde que $s = 1$ es precisamente en donde $\zeta(s)$ tiene su polo.

Probemos por último que $\zeta(1 + i\,\alpha) \neq 0$ para todo $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Por el principio de reflexión de Schwarz $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$, ver [3, pág. 155].

Por lo tanto, si ρ es un cero de $\zeta(s)$ entonces su conjugado $\bar{\rho}$ también es un cero. Supongamos que $\zeta(s)$ tiene un cero de orden μ en $s = 1 \pm i\alpha$ y un cero de orden ν en $s = 1 \pm 2i\alpha$. Como

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = h(s)$$

es analítica en $\sigma > 0$, entonces μ, ν son enteros no negativos. Por tanto

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\, \Phi(1+\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon-1} - \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\, \frac{G'(1+\varepsilon)}{G(1+\varepsilon)} \\ &\quad - \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\ F(1+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1 \end{aligned}$$

pues el segundo y tercer límites se anulan ya que $G(1) = 1$ y $F(s)$ es analítica en $\sigma > 1/2$. Además

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\, \Phi(1+\varepsilon \pm i\,\alpha) = -\mu,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\, \Phi(1+\varepsilon \pm 2i\,\alpha) = -\nu.$$

Por la Definión 3, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{r=-2}^{2} \binom{4}{2+r} \Phi(1+\varepsilon+ir\alpha) &= \sum_{r=-2}^{2} \binom{4}{2+r} \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon+ir\alpha}} \\ &= \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} \sum_{r=-2}^{2} \binom{4}{2+r} \frac{1}{p^{ir\alpha}} \\ &= \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} \left(6 + 4\Big(\frac{1}{p^{i\alpha}} + \frac{1}{p^{-i\alpha}}\Big) + \Big(\frac{1}{p^{2i\alpha}} + \frac{1}{p^{-2i\alpha}}\Big)\right) \\ &= 2\sum_p \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} \left(3 + 4\cos(\alpha \log p) + \cos(2\alpha \log p)\right) \\ &= 4\sum_p \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} \left(1 + \cos(\alpha \log p)\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

ya que

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 3 + 4\cos\theta + 2\cos^2\theta - 1 = 2(1+\cos\theta)^2 \geq 0\,.$$

En resumen

$$\sum_{r=-2}^{2} \binom{4}{2+r} \Phi(1+\varepsilon+ir\alpha) \geq 0.$$

Multiplicando por ε y tomando el límite cuando $\varepsilon \to 0$ se obtiene

$$-\nu - 4\mu + 6 - 4\mu - \nu = \sum_{r=-2}^{2} \binom{4}{2+r} \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\, \Phi(1+\varepsilon+ir\alpha) \geq 0\,.$$

De donde $6 \geq 8\mu + 2\nu \geq 8\mu$. Puesto que μ es un entero no negativo entonces $\mu = 0$. Por lo tanto $\zeta(1+i\alpha) \neq 0$. □

4. El teorema de los números primos.

En esta sección se usarán las propiedades de la función $\Phi(s)$, que se obtuvieron en la sección anterior, para finalmente demostrar el teorema de los números primos.

Proposición 11. *Se cumple que la integral* $\int_1^\infty \frac{\vartheta(x)-x}{x^2}dx$ *es convergente.*

Para la prueba de la Proposición 11 será necesario el siguiente resultado, cuya demostración se dará al final de este trabajo.

Teorema 12 (Teorema Analítico)**.** *Sea* $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ *una función integrable en cada intervalo finito* $[a,b] \subset [1,\infty)$ *y tal que* $f(x) = O(x)$. *Sea* $s = \sigma + it$. *Para* $\sigma > 1$ *sea*

$$g(s) \;=\; \int_1^\infty \frac{f(x)}{x^{s+1}}\, dx.$$

Supongamos que en $\sigma > 1$ *la función* $g(s)$ *es analítica. Si* $g(s)$ *admite una prolongación analítica al semiplano cerrado* $\sigma \geq 1$ *entonces*

$$\lim_{X\to\infty} \int_1^X \frac{f(x)}{x^2}dx = g(1)\,.$$

Demostración de la Proposición 11. Por la Definición 3 y por la fórmula de adición por partes, tenemos que para $\sigma > 1$

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \sum_p \frac{\log p}{p^s} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s}(\vartheta(n) - \vartheta(n-1)) \\ &= -\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n-1)^s}\Big)\vartheta(n-1) = s\sum_{n=2}^{\infty}\vartheta(n-1)\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^{s+1}} \\ &= s\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}}dx = s\int_1^{\infty}\frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}}dx\,.\end{aligned}$$

En resumen

$$\frac{1}{s}\,\Phi(s) = \int_1^{\infty}\frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}}dx.$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{s}\,\Phi(s) - \frac{1}{s-1} = \int_1^{\infty}\frac{\vartheta(x)-x}{x^{s+1}}dx.$$

Puesto que la función

$$\frac{1}{s}\,\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$$

es analítica en el semiplano cerrado $\sigma \geq 1$, entonces el teorema analítico implica que la siguiente integral converge

$$\int_1^{\infty}\frac{\vartheta(x)-x}{x^2}dx],.$$

$\square$

Proposición 13. *La función $\vartheta(x)$ satisface*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\vartheta(x)}{x} = 1.$$

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir que existe un $\lambda > 1$ tal que $\vartheta(x)/x \geq \lambda$ para x arbitrariamente grandes. Puesto que $\vartheta(x)$ es no decreciente, entonces $\vartheta(t) \geq \vartheta(x) \geq \lambda x$ siempre que $x \leq t \leq \lambda x$. Por lo tanto

$$\int_x^{\lambda x}\frac{\vartheta(t)-t}{t^2}dt \geq \int_x^{\lambda x}\frac{\lambda x - t}{t^2}dt.$$

Haciendo el cambio de variable $t = xu$ tenemos

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt \;\geq\; \int_1^{\lambda} \frac{\lambda - u}{u^2} du > 0.$$

Pero esto contradice el criterio de Cauchy para la convergencia de integrales impropias. Por lo tanto no existe λ tal que $\vartheta(x)/x \geq \lambda$ para x arbitrariamente grande.

De manera similar, si $\vartheta(x) \leq \lambda x$, para valores arbitrariamente grandes de x y $\lambda < 1$ entonces

$$\int_{\lambda x}^{x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt \;\leq\; \int_{\lambda x}^{x} \frac{\lambda x - t}{t^2} dt \;=\; \int_{\lambda}^{1} \frac{\lambda - t}{t^2} dt < 0$$

lo cual también contradice el criterio de Cauchy. □

Ahora podemos usar la Proposición 13 para demostrar el teorema de los números primos. Primero nótese que

$$\vartheta(x) \;=\; \sum_{p \leq x} \log p \;\leq\; \sum_{p \leq x} \log x \;=\; \pi(x) \log x.$$

Por otra parte tenemos que para toda $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \vartheta(x) \;&\geq\; \sum_{x^{1-\varepsilon} \leq p \leq x} \log p \geq \sum_{x^{1-\varepsilon} \leq p \leq x} (1 - \varepsilon) \log x \\ &=\; (1 - \varepsilon) \log x \left[\pi(x) + O(x^{1-\varepsilon})\right]. \end{aligned}$$

Esto es

$$\frac{\vartheta(x)}{\log x} \;\leq\; \pi(x) \;\leq\; \frac{\vartheta(x)}{(1 - \varepsilon) \log x} + O(x^{1-\varepsilon}).$$

Multiplicando por $\log x$ y dividiendo entre x obtenemos

$$\frac{\vartheta(x)}{x} \;\leq\; \frac{\pi(x) \log x}{x} \;\leq\; \frac{\vartheta(x)}{x} \frac{1}{(1 - \varepsilon)} + O\Big(\frac{\log x}{x^{\varepsilon}}\Big).$$

Tomando límite inferior en la primera desigualdad y límite superior en la segunda desigualdad se obtiene que

$$1 \;\leq\; \liminf_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} \;\leq\; \limsup_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} \;\leq\; \frac{1}{1 - \varepsilon}.$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$ vemos que

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x}.$$

Por lo tanto el siguiente límite existe y es igual a 1, es decir,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Esto termina la demostración del teorema de los números primos.

5. Demostración del teorema analítico.

Sea $\sigma > 1$. Por definición, tenemos que

$$g(s) = \int_1^\infty \frac{f(x)}{x^{s+1}}\,dx = \int_0^\infty \left\{\frac{f(e^x)}{e^x}\right\} e^{-x(s-1)}\,dx.$$

Por lo tanto basta probar la siguiente versión del teorema analítico.

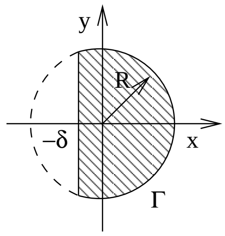
Teorema. *Sea $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función acotada e integrable en cada intervalo finito $[a,b] \subset [0,\infty)$. Sea $z = x + iy$. Para $x > 0$ sea*

$$g(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt.$$

Si $g(z)$ se extiende analíticamente al semiplano cerrado $x \geq 0$ entonces

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T f(t)\,dt = g(0).$$

Demostración. Para $T > 0$ la función $g_T(z) = \int_0^T f(t)e^{-zt}dt$ es entera. Sea R un número real grande y sea Γ la frontera de la región $\{z = x+iy : |z| \leq R,\ x \geq -\delta\}$, en donde $\delta > 0$ es un número suficientemente pequeño (que depende de R). Puesto que $g(z)$ es analítica en $x \geq 0$ entonces $g(z)$ es analítica en el segmento de recta que une $-Ri$ con Ri. Para cada punto z de este segmento existe una vecindad V_z en donde $g(z)$ es analítica. Por lo tanto, tenemos una cubierta abierta del conjunto compacto $\{iy : -R \leq y \leq R\}$. Extrayendo una subcubierta finita vemos que existe $\delta > 0$ tal que $g(z)$ es analítica dentro y sobre el contorno Γ.



Por el teorema integral de Cauchy tenemos

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (g(z) - g_T(z))\ e^{zt}\Big(1 + \frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{dz}{z}.$$

Sobre el semicírculo $C_+ = \Gamma \cap \{x > 0\}$ el integrando está acotado por $2B\big/R^2$, en donde $B = \max\{|f(t)| : t \geq 0\}$, porque si $z = x + iy$ entonces

$$\begin{aligned} |g(z) - g_T(z)| &= \Big|\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt - \int_0^T f(t)e^{-zt}dt\Big| \\ &= \Big|\int_T^\infty f(t)e^{-zt}dt\Big| \leq B\int_T^\infty |e^{-zt}|dt \\ &= B\int_T^\infty e^{-xt}dt \\ &= B\,\frac{e^{-Tx}}{x} \qquad\qquad \text{(recuerde que } x > 0)\,. \end{aligned}$$

Por otro lado $z = x + iy = Re^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\Big|e^{zT}\Big(1 + \frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{1}{z}\Big| = e^{xT}\Big|\Big(1 + \frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{1}{z}\Big| = e^{xT}\Big|\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\Big|.$$

Pero como $\cos\theta = \dfrac{x}{R}$ entonces

$$\begin{aligned} \Big|\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\Big| &= \Big|\frac{R}{z} + \frac{z}{R}\Big| \cdot \frac{1}{R} = \Big|e^{-i\theta} + e^{i\theta}\Big| \cdot \frac{1}{R} \\ &= |2 \cdot \cos\theta| \cdot \frac{1}{R} = \frac{2x}{R^2}\,. \end{aligned}$$

De esta manera tenemos

$$\Big|e^{zT}\Big(1 + \frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{1}{z}\Big| = \frac{2x}{R^2}\,e^{xT}.$$

Por lo tanto la contribución a $g(0) - g_T(0)$ que proviene de la integral sobre C_+ está acotada en valor absoluto por B/R. En efecto

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_+}(g(z)-g_T(z))e^{zT}\Big(1+\frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{dz}{z}\Big| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\frac{Be^{-xT}}{x}\cdot\frac{e^{xT}2x}{R^2}\cdot\pi R \\ &= \frac{B}{R}\,.\end{aligned}$$

Para la integral sobre $C_- = \Gamma \cap \{z = x + iy : x < 0\}$ tomaremos a $g(z)$ y $g_T(z)$ separadamente. Puesto que g_T es entera, entonces el contorno de integración C_- para la integral que involucra a g_T puede ser reemplazado por el semicírculo $C^* = \{z = x + iy : |z| = R, x < 0\}$. Entonces tenemos que analizar las dos integrales siguientes;

$$\begin{aligned}I_1(T,R) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} g_T(z)\,e^{zT}\Big(1+\frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{dz}{z},\\ I_2(T,R) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_-} g(z)\,e^{zT}\Big(1+\frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{dz}{z}\,.\end{aligned}$$

Para analizar I_1, nótese primero que

$$\begin{aligned}|g_T(z)| &= \Big|\int_0^T f(t)e^{-zt}dt\Big| \;\leq\; B\int_0^T |e^{-zt}|dt\\ &\leq B\int_{-\infty}^T e^{-xt}dt \qquad\qquad \text{(recuerde que } x<0)\\ &= B\,\frac{e^{-xT}}{|x|}\,.\end{aligned}$$

Puesto que para $z \in C^*$ se cumple que

$$\Big|e^{zT}\Big(1+\frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{1}{z}\Big| = \frac{2|x|}{R^2}\,e^{xT},$$

en donde $x < 0$, entonces

$$|I_1(T,R)| \;\leq\; \frac{1}{2\pi}\frac{B}{|x|}e^{-xT}\cdot\frac{2|x|}{R^2}\,e^{xT}\cdot\pi R \;=\; \frac{B}{R.}$$

Finalmente la integral restante sobre C_- tiende a cero cuando $T \to \infty$, pues el integrando es el producto de la función $g(z)\Big(1+\dfrac{z^2}{R^2}\Big)\dfrac{1}{z}$, que es independiente de T, mientras que la función e^{zT} tiende a cero rápidamente y uniformemente en conjuntos compactos del semiplano $x < 0$. Por lo tanto

$$\lim_{T\to\infty} |I_2(T,R)| \;=\; 0.$$

Se concluye entonces que

$$\limsup_{T\to\infty} |g(0) - g_T(0)| \leq 2\frac{B}{R}.$$

Como R es arbitrario, esto prueba el teorema. □

Referencias

[1] P. T. Bateman. y H. G. Diamond, *A hundred years of prime numbers*, Amer. Math. Monthly **103** (9), (1996), 729–741.

[2] D. J. Newman, *Simple analytic proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **87** (9), (1980), 693–696.

[3] E. C. Titchmarsh, The theory of functions, Second edition. Oxford Univ. Press, London, 1991.

[4] D. Zagier, *Newman's short proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **104** (8), (1997), 705–708.

[5] F. Zaldívar, *La función zeta de Riemann*, Miscelánea Matemática **36** (2002), 63–82.