Miscelánea Matemática **61** (2015) 75-85 SMM

Problemas sobre bandas que cubren puntos

Jesús Jerónimo Castro
Universidad Autónoma de Querétaro,
Facultad de Ingeniería
jeronimo@cimat.mx, jesusjero@hotmail.com

1. Bandas que cubren un conjunto de puntos

Supongamos que tenemos una pared en la cual hay muchos agujeros de forma circular y de radios muy pequeños. Tenemos disponible un rollo de cinta de aislar y hemos notado que, para cualesquiera tres de los agujeros, hay una manera de colocar la cinta de manera que los agujeros queden cubiertos. ¿Será posible cubrir todos los agujeros con un solo trozo de esta cinta de aislar? Antes de dar respuesta a esta pregunta plantearemos el problema de una manera distinta. Consideremos un conjunto finito de puntos $\mathcal{P}$, en el plano, el cual tiene la siguiente propiedad: cualesquiera tres de los puntos pueden ser cubiertos con una banda paralela de ancho 1, donde por una banda paralela de ancho 1 nos referimos a la región comprendida entre dos líneas paralelas separadas a una distancia 1, ¿es posible cubrir todos los puntos con una banda de ancho 1? Notemos que la afirmación de que tres puntos pueden ser cubiertos por una banda de ancho 1 es equivalente a que el triángulo, para el cual estos puntos sirven de vértices, tenga una altura menor o igual que 1.

Veamos primero que no siempre es posible cubrir a todos los puntos con una sola banda de ancho 1. Para esto es suficiente con notar que en el cuadrado de lado $\sqrt{2}$, cualquier triángulo con vértices en los vértices de éste, tiene una altura de longitud 1; sin embargo, la banda de menor ancho que cubre al cuadrado tiene ancho $\sqrt{2}$. Entonces, para un conjunto de puntos con la propiedad antes descrita, ¿cuál es la banda de menor ancho que cubre a $\mathcal{P}$? El primer resultado con respecto a este problema fue dado por el matemático alemán Jürgen Eckhoff [1], mostrando que es suficiente con una banda de ancho 2.

Proposición 1.1. *Sea $\mathcal{P}$ un conjunto finito de puntos en el que cada tres de ellos se cubren con alguna banda de ancho 1. Entonces se puede cubrir a $\mathcal{P}$ con una banda de ancho menor que 2.*

Demostración. Como $\mathcal{P}$ es finito debe existir un triángulo de área máxima, de entre todos los triángulos que se pueden formar con vértices en $\mathcal{P}$, digamos $\triangle X_1X_2X_3$. Además, podemos suponer que $|X_1, X_2X_3| \leq 1$, donde $|X_1, X_2X_3|$ denota la distancia desde el punto X_1 a la línea X_2X_3. Consideremos el triángulo $\triangle Y_1Y_2Y_3$ homotético al triángulo $\triangle X_1X_2X_3$, con centro de homotecia en el centroide de $\triangle X_1X_2X_3$, y coeficiente de homotecia -2, es decir, el triángulo cuyos lados son paralelos a los lados del triángulo $\triangle X_1X_2X_3$ y pasan por los vértices de éste (ver Figura 1). Claramente, el triángulo $\triangle Y_1Y_2Y_3$ contiene a $\mathcal{P}$. De no ser así, supongamos por ejemplo que existe un punto X de $\mathcal{P}$ por encima de la recta Y_2Y_3, entonces el triángulo $\triangle XX_2X_3$ tendría área mayor que el área de $\triangle X_1X_2X_3$. Además, para todo punto $X \in \mathcal{P}$ se cumple que $|X, X_2X_3| \leq 1$. Por lo tanto, la banda que tiene como fronteras a la línea Y_2Y_3 y a su paralela por Y_1, tiene ancho menor o igual a 2 y contiene a $\mathcal{P}$.

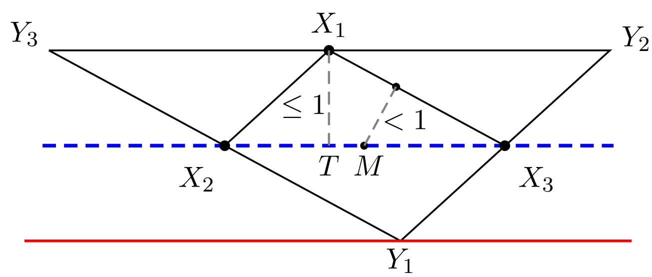

Figura 1. $\mathcal{P}$ está contenido en el triángulo $\triangle Y_1Y_2Y_3$.

Notemos que la única manera en que el ancho de esta banda que cubre a $\mathcal{P}$ sea exactamente 2, es que la altura desde X_1 hasta X_2X_3 sea 1 y que Y_1 sea uno de los puntos de $\mathcal{P}$. En tal caso, como el triángulo $\triangle X_2Y_1X_3$ también es de área máxima, tenemos que $\mathcal{P}$ debe estar contenido en el paralelogramo $X_1X_2Y_1X_3$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $|X_1X_2| \leq |X_1X_3|$, donde por $|AB|$ denotamos la longitud de un segmento AB. Tenemos entonces que el punto medio del segmento X_2X_3 está sobre el segmento TX_3, donde T es a proyección de X_1 sobre X_2X_3. Es claro que la distancia desde M hasta la línea X_1X_3 es menor que la distancia desde X_1 hasta X_2X_3; luego, como la distancia entre las líneas X_1X_3 y X_2Y_1 es el doble de la distancia desde M hasta la línea X_1X_3, se sigue que $\mathcal{P}$ está contenido en la banda paralela acotada por las líneas X_1X_3 y X_2Y_1 cuyo ancho es menor que 2. $\square$

Observación 1.2. Con un poco más de esfuerzo se puede probar que en el caso cuando $\mathcal{P}$ está contenido en el paralelogramo $X_1X_2Y_1X_3$, éste se puede cubrir con una banda de ancho menor o igual que $\sqrt{2}$.

Observación 1.3. Notemos que el triángulo de área máxima $\triangle X_1X_2X_3$, desempeña una papel fundamental en la demostración. Así mismo, el triángulo de área máxima será pieza clave en la demostración de muchos de los resultados y problemas que presentaremos en este trabajo.

Lo que en realidad nos interesa es encontrar un valor universal, para el ancho de una banda, que nos sirva para cubrir cualquier conjunto de puntos con la propiedad que de tres en tres se cubren con una banda de ancho 1. El problema se enuncia como sigue:

Sea $\mathcal{P}$ un conjunto finito de puntos en el plano de tal manera que cualesquiera tres de ellos están contenidos en una banda de ancho 1. *¿Cuál es el menor número positivo, α, tal que cada conjunto $\mathcal{P}$ con la propiedad mencionada está contenido en una banda de ancho α?*

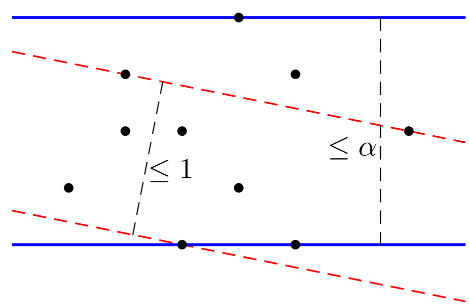

Figura 2. Banda de menor ancho que cubre a $\mathcal{P}$.

De manera independiente, J. Eckhoff [1] y V.L. Dolnikov (1972) conjeturaron que este número mínimo α debería ser igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. De ahora en adelante, si un conjunto $\mathcal{P}$ tiene la propiedad que de k en k de sus puntos se pueden cubrir con una banda de ancho 1, diremos que $\mathcal{P}$ tiene la propiedad $T(k)$. Además, si existe una banda de ancho 1 que cubre a $\mathcal{P}$ diremos que $\mathcal{P}$ tiene la propiedad T. Con esta notación podemos enunciar otra de las conjeturas de Eckhoff y Dolnikov (demostrada en [4]): Si un conjunto $\mathcal{P}$ tiene la propiedad $T(4)$ entonces se puede cubrir con una banda de ancho $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Además, este número no puede ser mejorado, como puede observarse al considerar los vértices de un pentágono regular de lados de longitud $1/\operatorname{sen}(72°)$:

El conjunto de puntos más pequeño para el cual este problema es interesante es para el caso de 4 puntos. En este caso se tiene una mejor cota para el ancho que fue descubierta por J. Eckhoff [2]. Enseguida presentamos la prueba original de Eckhoff, a la cual le hemos agregado algunos detalles para mejorar su comprensión.

Teorema 1.4. *Sean A, B, C y D cuatro puntos en el plano tales que cualesquiera tres de ellos pueden ser cubiertos por una banda de ancho*

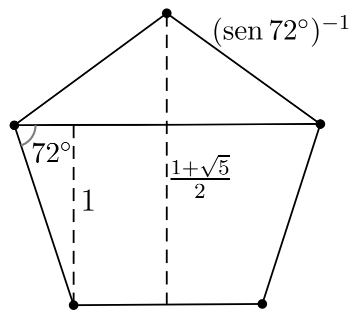

Figura 3. Ejemplo pentagonal.

1. *Entonces existe una banda de ancho $\sqrt{2}$ que cubre los cuatro puntos. Más aún, si no existe una banda de ancho menor que cubra los puntos, entonces A, B, C y D son los vértices de un cuadrado de lado $\sqrt{2}$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\{A, B, C, D\}$ es el conjunto de vértices de un cuadrilátero convexo, como se muestra en la Figura 4, con $|AB|$ siendo el diámetro del conjunto, $|MC| \geq |MD|$ y $0 < \alpha \leq \pi/2$, donde M es la intersección de AB con CD y $\alpha = \angle BMC$. De las suposiciones anteriores se obtiene que $|C, AB| \leq 1$, $|D, AB| \leq 1$ y $|AC| \geq |AD|$. También, se cumple que las proyecciones ortogonales de C y D sobre la línea AB caen en el segmento AB.

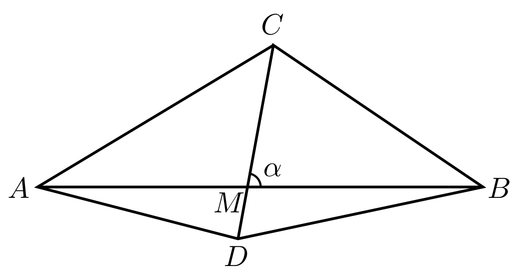

Figura 4.

Distinguimos tres casos, dependiendo de cuál lado del triángulo $\triangle BCD$ tiene mayor longitud:

Caso 1: $|BC| \geq |BD|, |CD|$.

Entonces $|DX| \leq 1$, donde X es la proyección ortogonal de D sobre BC. Definimos los puntos B' sobre MB y N sobre CB' de manera que $|CB'| = |CD|$ y $|CN| = |CM|$, y sea Y la proyección ortogonal de C sobre DN (ver Figura 5). Dado que el triángulo $\triangle CDN$ es simétrico al triángulo $\triangle CB'M$, tenemos que $|CY| = |C, MB|$ y entonces $|CY| \leq 1$. Comparando los triángulos rectángulos $\triangle CXD$ y $\triangle CYD$, encontramos que $|CX| \leq |CY|$. Se sigue que $|CX| \leq 1$, y por el Teorema de Pitágoras en el triángulo $\triangle CDX$, obtenemos que $|CD| \leq \sqrt{2}$. Esto implica que la banda acotada por las líneas paralelas a AB a través de C y D, tiene ancho menor o igual que $\sqrt{2}$ y contiene al cuadrilátero.

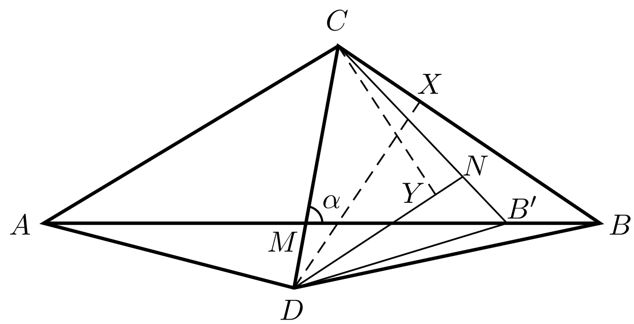

Figura 5.

Ahora, de entre los ángulos formados por las líneas AC, BC, AD y BD con respecto a la línea AB, consideremos el menor de éstos. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que tal ángulo menor es $\measuredangle ABD$. En tal caso, tenemos que $|C, BD| < \sqrt{2}$; además, la banda acotada por la línea BD y su paralela a través de C tiene ancho menor que $\sqrt{2}$ y contiene al cuadrilátero.

Caso 2: $|BD| \geq |BC|, |CD|$.
En este caso, $|C, BD| \leq 1$. Escogemos el punto A' sobre la línea AB de tal manera que $A'C$ y BD son paralelas. Si A está entre A' y M, entonces $\{A, B, C, D\}$ se cubre por la banda de ancho a lo más 1 acotada por las líneas $A'C$ y BD, respectivamente. Si A está fuera del segmento $A'M$, entonces $|AC| > |A'C|$, además, como los triángulos $\triangle CA'M$ y $\triangle DBM$ son semejantes y $|CM| \geq |MD|$, tenemos que $|A'C| \geq |BD| \geq |CD|$ (ver la Figura 6). Se sigue entonces que AC es el lado mayor en el triángulo $\triangle ACD$ (recordemos que $|AC| \geq |AD|$). Obtenemos que $|D, AC| \leq 1$ y $\{A, B, C, D\}$ está contenido en la banda de ancho menor o igual a 1, acotada por AC y su paralela a través de D.

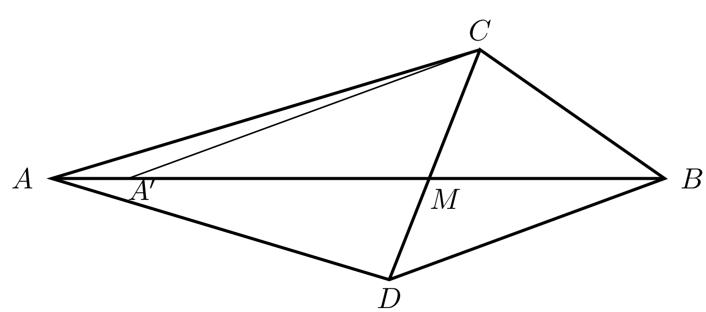

Figura 6.

Caso 3: $|CD| \geq |BC|, |BD|$.
Entonces $|CP| \leq 1$ y $|BQ| \leq 1$, donde P y Q son las proyecciones ortogonales de C sobre AB y B sobre CD, respectivamente (ver la Figura 7). Como $\alpha \leq \pi/2$, tenemos que el segmento BQ intersecta al segmento CP, es decir, se cumple que $\measuredangle QCB > \measuredangle PCB$ lo que a su vez implica que $|BP| \leq |BQ|$. Se sigue que $|BP| \leq |BQ| \leq 1$, y por el Teorema de Pitágoras en el triángulo $\triangle BCP$, obtenemos que $|BC| \leq \sqrt{2}$.

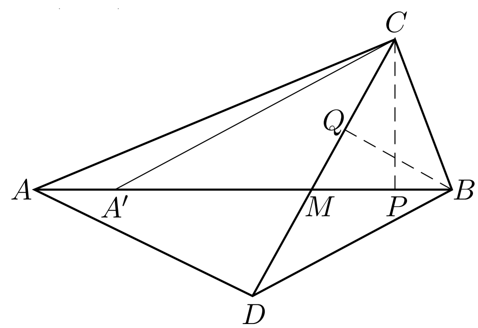

Figura 7.

Si CD es también el lado más grande del triángulo $\triangle ACD$, entonces tenemos que $|AS| \leq |AR| \leq 1$, con S y R las proyecciones de D y A sobre AM y MD, respectivamente (ver Figura 8). Como $|DS| \leq 1$, tenemos entonces, por el Teorema de Pitágoras en el triángulo $\triangle ASD$, que $|AD| \leq \sqrt{2}$. Si $|D, AC| \geq |B, AC|$, tenemos que la banda acotada por la línea AC y su paralela a través de D tiene ancho menor o igual a $\sqrt{2}$ y cubre a $\{A, B, C, D\}$. Si $|B, AC| \geq |D, AC|$, entonces la banda acotada por la línea AC y su paralela a través de B tiene ancho menor o igual a $\sqrt{2}$ y cubre al cuadrilátero.

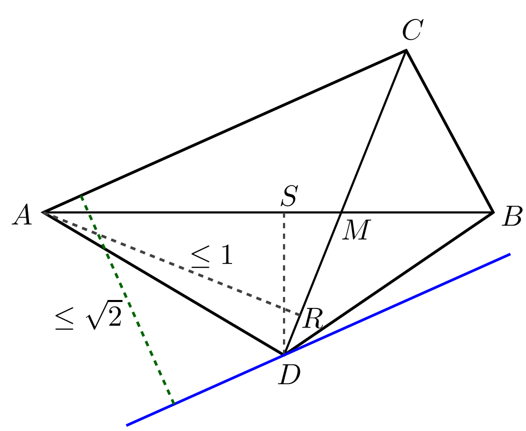

Figura 8.

Si ahora tenemos que AC es el lado más grande del triángulo $\triangle ACD$, entonces $|D, AC| \leq 1$. Definimos el punto A' como en el Caso 2. Si A está entre A' y M, entonces $\{A, B, C, D\}$ es cubierto por una banda de ancho a lo más $\sqrt{2}$, es decir, la banda acotada por las líneas $A'C$ y BD, respectivamente. Si A está fuera del segmento $A'M$, entonces el conjunto es cubierto por una banda de ancho a lo más 1 determinado por AC y su paralela por D, como en el Caso 2.

Ahora, ¿qué sucede si no hay una banda de ancho menor que $\sqrt{2}$ que cubra al conjunto? Entonces estamos en el Caso 3 y debemos tener que $|BC| = |AD| = \sqrt{2}$. Tenemos que $|BC| = \sqrt{2}$ implica que $|BP| = |CP| = 1$ y entonces $|BQ| = 1$. En particular, $\alpha = \pi/2$ y $P = Q = M$. De manera similar, $|AD| = \sqrt{2}$ implica que $|AM| = |DM| = 1$. Por lo tanto, A, B, C y D forman un cuadrado de lado $\sqrt{2}$. $\square$

Utilizando una técnica distinta, con la cual de hecho puede darse otra demostración del Teorema 1.1, demostraremos el siguiente resultado para hexágonos que tienen centro de simetría.

Proposición 1.5. *Sea $ABCDEF$ un hexágono en el cual cada par de lados opuestos son paralelos y de la misma longitud. Supongamos que cada tres de sus vértices pueden ser cubiertos por una banda de ancho 1. Entonces, el hexágono puede ser cubierto por una banda de ancho $\sqrt{2}$.*

Demostración. Si alguna de las longitudes $|AC|, |CE|$ o $|EA|$ es menor o igual que $\sqrt{2}$ entonces la conclusión se sigue fácilmente. Por ejemplo, si $|AC| \leq \sqrt{2}$, entonces la banda acotada por las líneas AF y CD tiene ancho menor o igual que $\sqrt{2}$ y contiene al hexágono. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $|EA| \geq |AC| \geq |CE| > \sqrt{2}$. Dado que los puntos A, C, E pueden ser cubiertos por una banda de ancho 1 y $|C, AE| \leq |E, AC| \leq |A, CE|$, tenemos que la banda acotada por la línea AE y su paralela a través de C, contiene a $\{A, C, E\}$. Más aún, dado que $|EA| \geq |AC| \geq |CE| > \sqrt{2}$, tenemos que $\measuredangle ACE > 90°$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\alpha = \measuredangle FCE \geq \measuredangle ACF$ entonces $\measuredangle FCE > 45°$. Ahora, si $|C, FE| > \sqrt{2}$ entonces $|F, CE| = |FC| \cdot \operatorname{sen} \alpha > \sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} 45° = 1$. De manera semejante obtenemos que $|E, FC| > 1$. Se sigue que el conjunto $\{C, E, F\}$ no puede ser cubierto por una banda de ancho 1, lo cual contradice la hipótesis de que cada tres vértices del hexágono pueden ser cubiertos por una banda de ancho 1. Por lo tanto, $|C, FE| \leq \sqrt{2}$, es decir, la banda acotada por las líneas FE y BC tiene ancho $\leq \sqrt{2}$ y contiene al hexágono.

Notemos que en un conjunto finito de puntos lo siguiente es cierto: si cada tres puntos están alineados, entonces todos ellos están sobre una misma línea. Surge entonces la siguiente pregunta: si cada par de

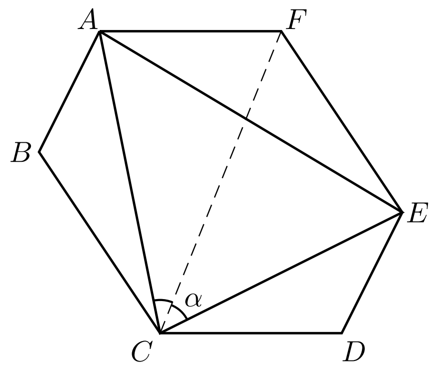

Figura 9.

puntos están suficientemente alejados y sabemos que el conjunto de puntos tiene la propiedad $T(3)$, ¿existirá una banda de ancho 1 que cubra a todos los puntos al mismo tiempo? pero, ¿qué tan alejados deben estar para asegurar que esto pase?

La respuesta fue dada por B. Grünbaum en [3], demostrando lo siguiente:

Teorema 1.6. *Sea $\mathcal{P}$ un conjunto finito de puntos con la propiedad $T(3)$ y en el que cualesquiera dos de sus puntos están a distancia mayor que $\sqrt{2}$. Entonces $\mathcal{P}$ tiene la propiedad T, es decir, se puede cubrir con una banda de ancho 1.*

Demostración. Primero demostraremos que cualesquiera cuatro puntos se pueden cubrir con una banda de ancho 1, es decir, que $\mathcal{P}$ posee la propiedad $T(4)$. Sea $\{A, B, C, D\}$ un subconjunto de cuatro puntos de $\mathcal{P}$ y supongamos que entre los triángulos con vértices en $\{A, B, C, D\}$, el triángulo $\triangle ABC$ tiene área máxima. Notemos que es posible que haya más de un triángulo con área máxima, sin embargo, esto no afecta el argumento de demostración que daremos adelante. Tenemos entonces que D debe estar contenido en el triángulo $\triangle A'B'C'$, homotético a $\triangle ABC$ con razón -2 y centro de homotecia en el centroide de $\triangle ABC$ (ver Figura 10).

Por hipótesis, podemos suponer que la altura desde A hacia BC tiene longitud menor o igual a 1. Aquí distinguimos dos casos:

(1) D está en el cuadrilátero $BCB'C'$. Este caso es muy sencillo ya que la banda acotada por BC y $C'B'$ tiene ancho menor o igual a 1 y cubre a los cuatro puntos.
(2) D está en el triángulo $\triangle BCA'$. Observemos lo siguiente: Si en un triángulo $\triangle XYZ$ se tiene que todos sus lados tienen longitud mayor que $\sqrt{2}$ y su altura menor tiene longitud menor o igual a 1, entonces uno de sus ángulos es mayor que $90°$. Supongamos que

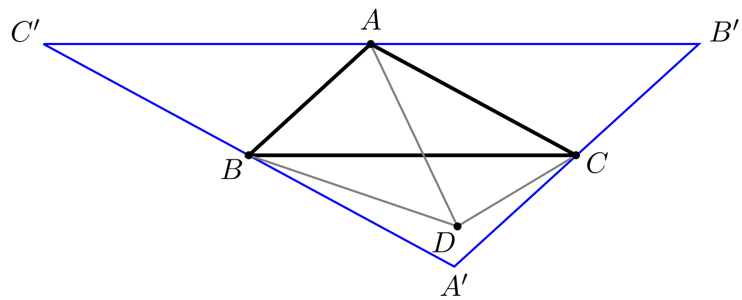

Figura 10.

$|YZ| \geq |XZ| \geq |XY|$ y sea W la proyección de X sobre YZ. Como $|XW| \leq 1$ y $|XY| > \sqrt{2}$ tenemos que $\alpha = \measuredangle XYW < 45°$ (ver Figura 11). De manera análoga, tenemos que $\beta = \measuredangle XZW < 45°$. Se sigue que $\measuredangle YXZ > 90°$.

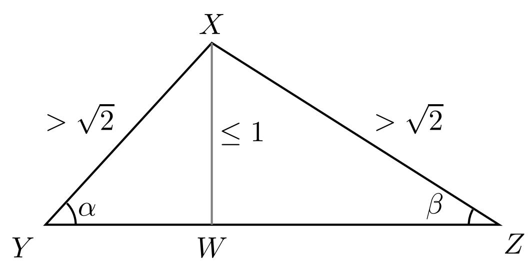

Figura 11. El ángulo $\measuredangle YXZ$ es obtuso.

Por esta observación y dado que todos los lados de $\triangle ABC$ tienen longitud mayor que $\sqrt{2}$ y $|A, BC| \leq 1$, tenemos que $\measuredangle BAC > 90°$. Tenemos que $\measuredangle ABD < 90°$ y $\measuredangle ACD < 90°$, además, de nuevo por la obervación anterior, tenemos que cada uno de los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$ tiene un ángulo obtuso y los ángulos $\measuredangle BDA$ y $\measuredangle CDA$ no pueden ser ambos mayores que $90°$. De lo anterior se sigue que alguno de los ángulos $\measuredangle BAD$ o $\measuredangle CAD$ es mayor que $90°$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\measuredangle BAD > 90°$. Se sigue que $|A, BD| \leq 1$ y entonces la banda acotada por BD y su paralela a través de A tiene ancho menor o igual a 1 y contiene a los puntos A, B, C y D.

Como el conjunto $\{A, B, C, D\}$ es arbitrario, tenemos que $\mathcal{P}$ tiene la propiedad $T(4)$. De entre todos los cuadriláteros que se pueden formar con vértices en $\mathcal{P}$, consideremos aquel que tiene el mayor ancho. Recordemos que el ancho de una figura es la distancia más pequeña entre los pares de líneas paralelas que la atrapan, además, para el caso de polígonos, no es difícil ver que las líneas mediante las cuales se obtiene el ancho son de alguna de las dos formas siguientes:

(a) Las dos líneas contienen un par de lados paralelos del polígono.

(b) Una de las líneas contiene un lado del polígono y su paralela pasa por un vértice del polígono.

Es fácil ver que las dos líneas no pueden pasar solamente por un vértice del polígono cada una de ellas. De ser así, ambas se pueden rotar un ángulo suficientemente pequeño (en la misma dirección) a través de los vértices por los que éstas pasan para producir dos líneas paralelas que atrapan al polígono y que están a menor distancia. Esto puede hacerse hasta que una de las líneas pase por uno de los lados del polígono. Volviendo ahora a la demostración del teorema, supongamos que tal cuadrilátero de ancho máximo es $ABCD$ y que el ancho se obtiene a través de la línea BC y su paralela ℓ por A, como se muestra en la Figura 12.

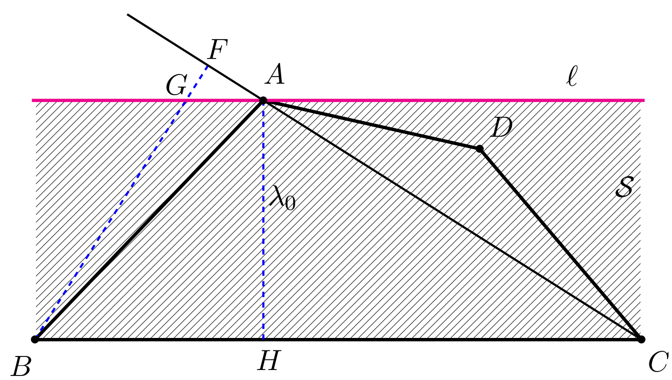

Figura 12.

Tenemos entonces que $\lambda_0 = |A, BC| \leq 1$, además, dado que λ_0 es el máximo de los anchos de entre todos los cuadriláteros, tenemos que toda cuarteta de puntos de $\mathcal{P}$ se puede cubrir con alguna banda de ancho menor o igual que λ_0. Por otro lado, como $|AB|$, $|AC|$, $|BC| > \sqrt{2}$, tenemos que $\measuredangle BAC > 90°$, lo que implica que la proyección F de B sobre la línea AC cae fuera del segmento AC. Sea G el punto donde el segmento BF intersecta a la línea ℓ. Como $|BF| > |BG| > |AH| = \lambda_0$ (donde H es la proyección de A sobre BC) tenemos que $|B, AC| > \lambda_0$. De manera análoga se obtiene que $|C, AB| > \lambda_0$. De todo esto se sigue que la única banda de ancho menor o igual que λ_0 que cubre a los puntos A, B y C es la acotada por BC y ℓ, la cual denotaremos como $\mathcal{S}$. Sea $X \in \mathcal{P}$ un punto arbitrario, distinto de A, B y C, dado que cualesquiera cuatro puntos de $\mathcal{P}$ se cubren con una banda de ancho λ_0 y la única banda de ancho menor o igual que λ_0 que cubre a $\triangle ABC$ es $\mathcal{S}$, tenemos que $\mathcal{S}$ cubre al conjunto $\{A, B, C, X\}$. Por lo tanto, $\mathcal{S}$ cubre a $\mathcal{P}$. $\square$

Observación 1.7. En el teorema es necesaria la hipótesis de que la distancia entre cualesquiera dos puntos sea estrictamente mayor que $\sqrt{2}$.

Por ejemplo, en los vértices de un cuadrado de lado $\sqrt{2}$, cualesquiera dos puntos están a distancia mayor o igual a $\sqrt{2}$, cada tres de ellos se cubren con una banda de ancho 1, pero no es posible cubrir los cuatro vértices con una banda de ancho 1.

2. Problemas propuestos

Finalmente, proponemos los siguientes problemas para aquel lector que esté interesado en intentar problemas similares a los que hemos mostrado en este trabajo.

Problema 2.1. Sea $\mathcal{F}$ un conjunto de cinco puntos con la propiedad $T(3)$. Demuestra que existe una banda de ancho $(\operatorname{Sen} 36°)^{-1}$ que cubre a $\mathcal{F}$.

Problema 2.2. Sea $\mathcal{F}$ un conjunto finito de puntos con la propiedad $T(5)$. Demuestra que existe una banda de ancho $\sqrt{2}$ que cubre a $\mathcal{F}$.

Problema 2.3. Sea $\mathcal{F}$ un conjunto finito de puntos con la propiedad $T(4)$, además, supongamos que la distancia entre cualesquiera dos puntos de $\mathcal{F}$ es mayor que $2/\sqrt{3}$. Demuestra que existe una banda de ancho 1 que cubre a $\mathcal{F}$.

Problema 2.4. Sea $\mathcal{F}$ un conjunto finito de puntos en el que todo triángulo con vértices en los puntos de $\mathcal{F}$ tiene al menos dos alturas de longitud menor o igual a 1. Demuestra que existe una banda de ancho $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que cubre a $\mathcal{F}$.

Problema 2.5. Sea $\mathcal{P}$ un octágono convexo en el que cada par de lados opuestos son de la misma longitud, la distancia entre cualesquiera dos puntos es mayor que 1 y el conjunto de vértices tiene la propiedad $T(3)$. Demuestra que existe una banda de ancho $\sqrt{2}$ que cubre a $\mathcal{P}$.

Problema 2.6. Sea $\mathcal{F}$ un conjunto finito de puntos el cual tiene la propiedad que cualesquiera dos de sus puntos se pueden cubrir con una banda de ancho 1 centrada en el origen. Demuestra que existe una banda de ancho $\sqrt{3}$ que cubre a $\mathcal{F}$.

Bibliografía

[1] J. Eckhoff, «Transversalenprobleme vom Gallai'schen typ», 1969, Dissertation, Göttingen.
[2] ______, «Problem 11247», *Amer. Math. Monthly*, vol. 113, 2006, 760.
[3] B. Grünbaum, «On common transversals», *Arch. Math.*, vol. 9, 1958, 465–469.
[4] J. Jerónimo, «Line transversals to translates of unit discs», *Discrete. Comput. Geom.*, vol. 37, 2007, 409–417.