Miscelánea Matemática **78** (2024) 83-95 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7806

Una construcción aleatoria de conjuntos tipo Cantor

Fernando Luque-Vásquez
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
fernando.luque@unison.mx
y
J. Adolfo Minjárez-Sosa
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
adolfo.minjarez@unison.mx

1. Introducción

Desde su publicación en 1883 por Georg Cantor [1], el estudio del conjunto de Cantor ha atraído mucha atención de investigadores de diversas ramas de las matemáticas. Debido a sus propiedades interesantes y sorprendentes, es quizás uno de los objetos matemáticos más estudiados, que ha sido utilizado como ejemplo (o contraejemplo) e influido en el desarrollo de la teoría de conjuntos, la teoría de la medida, la topología, la teoría fractal, entre otros (véase, e.g., [4, 5, 6]).

Existen varias versiones y construcciones del conjunto de Cantor. La más básica y conocida es la construcción del conjunto ternario, que se puede describir en términos generales de la siguiente manera. Considere el intervalo cerrado $I_0 = [0,1]$. Remueva el intervalo abierto correspondiente al tercio central $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y defina

$$I_1 = [0,1] - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

A continuación, a partir de cada intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ y $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, remueva el tercio central correspondiente y defina

$$I_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Palabras clave: Conjunto de Cantor; Proceso aleatorio; Distribución uniforme.

Es decir, en cada paso se remueve el tercio central de cada uno de los intervalos restantes del paso anterior. Este proceso se repite una y otra vez, formando una sucesión de conjuntos $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, donde $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\cup\{0\}$ es el conjunto de números enteros no negativos. Observe que cada I_n es la unión de 2^n intervalos cerrados de longitud $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Entonces, el conjunto de Cantor (ternario) se define como

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n.$$

Una de las propiedades de C es que es un conjunto de medida de Lebesgue cero. Esta propiedad se deduce fácilmente utilizando que $\lambda([0,1]) = 1$, donde λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, y el hecho de que la longitud total de los intervalos removidos es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1.$$

Además, el conjunto C es cerrado, no numerable, perfecto y denso en ninguna parte (véase, e.g., [9] para mas información sobre estos conceptos).

En este artículo presentamos un conjunto similar al de Cantor, basado en el siguiente procedimiento de construcción aleatorio. Primero, se eligen dos puntos al azar del intervalo cerrado $[0,1]$. Luego, identificando el punto más pequeño y el más grande, se remueve el intervalo abierto central. Ahora, a partir de cada uno de los intervalos restantes, se eligen nuevamente dos puntos al azar y se remueven los intervalos abiertos centrales correspondientes. Al igual que en la definición de C, este proceso continúa indefinidamente, obteniendo una sucesión de conjuntos $\left\{\hat{I}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, donde $\hat{I}_n$ es la unión de intervalos cerrados cuyos extremos son aleatorios. Entonces definimos un conjunto similar al de Cantor de manera aleatoria como

$$\hat{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \hat{I}_n.$$

Nuestro objetivo principal es demostrar que $\hat{C}$ es un conjunto de medida de Lebesgue cero en media y casi seguramente. Además, demostramos que $\hat{I}_n \searrow \hat{C}$ y $\lambda(\hat{I}_n) \to \lambda(\hat{C})$, cuando $n \to \infty$. Luego, deducimos que $\hat{C}$ tiene las propiedades clásicas mencionadas anteriormente del conjunto de Cantor.

2. El conjunto aleatorio de Cantor

Supondremos que todas las variables aleatorias y eventos considerados en este trabajo están definidos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, y *c.s.* significa *casi seguramente* con respecto a P. Además denotamos por E al operador esperanza correspondiente.

Definimos la sucesión de intervalos aleatorios $\left\{\hat{I}_n\right\}$ de la siguiente manera. Sea $\hat{I}_0 = [0,1]$. Luego, se eligen aleatoriamente dos puntos W_{11} y Z_{11} de $\hat{I}_0$. Definimos

$$X_{11} = \min\{W_{11}, Z_{11}\} \quad \text{y} \quad Y_{11} = \max\{W_{11}, Z_{11}\}.$$

Removemos el intervalo abierto $B_1 := (X_{11}, Y_{11})$ y definimos

$$\hat{I}_1 = [0,1] - B_1 = [0, X_{11}] \cup [Y_{11}, 1].$$

Después, de cada intervalo $[0, X_{11}]$ y $[Y_{11}, 1]$, se eligen aleatoriamente dos puntos: W_{21} y Z_{21} de $[0, X_{11}]$; W_{22} y Z_{22} de $[Y_{11}, 1]$. Definimos

$$X_{21} = \min\{W_{21}, Z_{21}\}, \quad Y_{21} = \max\{W_{21}, Z_{21}\},$$
$$X_{22} = \min\{W_{22}, Z_{22}\}, \quad Y_{22} = \max\{W_{22}, Z_{22}\}.$$

Removemos $B_2 := (X_{21}, Y_{21}) \cup (X_{22}, Y_{22})$ y definimos

$$\hat{I}_2 = \hat{I}_1 - B_2 = [0,1] - (B_1 \cup B_2)$$

Similar a la construcción usual del conjunto de Cantor, si continuamos con este procedimiento obtenemos la sucesión de conjuntos $\left\{\hat{I}_n\right\}$ y $\{B_n\}$ definidos como $\hat{I}_0 = [0,1]$, y para $n \in \mathbb{N}$,

$$\hat{I}_n = \hat{I}_{n-1} - B_n = [0,1] - (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n), \tag{1a}$$

$$B_n = (X_{n1}, Y_{n1}) \cup (X_{n2}, Y_{n2}) \cup \cdots \cup (X_{n2^{n-1}}, Y_{n2^{n-1}}), \tag{1b}$$

donde $X_{nk} = \min\{W_{nk}, Z_{nk}\}$, $Y_{nk} = \max\{W_{nk}, Z_{nk}\}$, y W_{nk}, Z_{nk} representan los dos puntos elegidos aleatoriamente en el $n-$ésimo paso del procedimiento previo. Por lo tanto, definimos el conjunto aleatorio tipo Cantor como

$$\hat{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \hat{I}_n = [0,1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n. \tag{2}$$

Observe que tanto $\hat{I}_n$ como B_n son elementos aleatorios en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, y por consecuencia también el conjunto $\hat{C}$. Entonces, en un sentido estricto, debemos escribir $\hat{I}_n(\omega)$, $B_n(\omega)$ y $\hat{C}(\omega)$, $\omega \in \Omega$, pero con el fin de simplificar la notación evitaremos especificar la dependencia en $\omega \in \Omega$.

El resultado principal lo podemos establecer de la siguiente manera.

Teorema 1. *Sea λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Entonces:*

(a) $E\left[\lambda(\hat{C})\right] = 0$. Por lo tanto, como $\lambda(\hat{C})$ es una variable aleatoria no negativa, se cumple $\lambda(\hat{C}) = 0$ c.s.

(b) $\hat{I}_n(\omega) \searrow \hat{C}(\omega)$ para toda $\omega \in \Omega$, cuando $n \to \infty$. Además,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(\hat{I}_n(\omega)) = \lambda(\hat{C}(\omega)), \quad \forall\omega \in \Omega.$$

3. Demostración del teorema 1

La demostración del teorema 1 se obtiene aplicando herramientas básicas de la teoría de la probabilidad como por ejemplo, continuidad de las medidas de probabilidad, propiedades de la esperanza condicional, así como el teorema de convergencia monótona para garantizar el intercambio de límites y esperanzas. Además usaremos propiedades sobre variables aleatorias uniformes. A continuación presentamos un resumen de estos resultados para una rápida referencia. Todos estos temas pueden ser consultados en cualquier libro de texto sobre probabilidad (e.g., [7]).

Continuidad de la medida de probabilidad. Sea $\{D_n\}$ una sucesión de eventos. Se dice que $\{D_n\}$ converge crecientemente a D ($D_n \nearrow D$), si $D_n \subset D_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$. Similarmente, se dice que $\{D_n\}$ converge decrecientemente a D ($D_n \searrow D$), si $D_n \supset D_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = D$.

Proposición 2. *Si $\{D_n\}$ es una sucesión creciente o decreciente de eventos que converge a D, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} P(D_n) = P(D).$$

Esperanza condicional. Dentro del contexto más básico, específicamente cuando las variables aleatorias X y Y son discretas o absolutamente continuas, la definición de esperanza condicional resulta sencilla y fácil de entender. Por ejemplo, en el caso de nuestro interés donde las variables aleatorias son absolutamente continuas, la definición es la siguiente.

Definición 3. (a) Sean X y Y variables aleatorias absolutamente continuas con densidad conjunta f y densidades marginales f_X y f_Y. La esperanza condicional de X dado $Y = y$ es

$$E\left[X|Y = y\right] = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x|y)dx,$$

donde $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$, $f_Y(y) > 0$.

(b) Definiendo $h(y) := E\left[X|Y = y\right]$, la esperanza condicional de X dado Y es la variable aleatoria $h(Y) = E\left[X|Y\right]$.

Observe que $E\left[X|Y = y\right]$ es una función de y mientras que $E\left[X|Y\right]$ es una variable aleatoria cuya aleatoriedad es heredada de Y, no de X. De hecho es fácil demostrar la llamada Ley de las Esperanzas Iteradas

$$E(X) = E_Y\left[E\left[X|Y\right]\right]. \tag{3}$$

Intercambio de límite y esperanza. Existen varias condiciones que garantizan el intercambio de límite y esperanza en sucesiones de variables aleatorias. De acuerdo a nuestros objetivos, solo establecerenos el bien conocido Teorema de la Convergencia Monótona.

Teorema 4. *Sea* $\{X_n\}$ *una sucesión de variables aleatorias tal que* $X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\omega \in \Omega$. *Entonces*

$$X = \lim_{n\to\infty} X_n$$

existe y $E(X_n) \nearrow E(X)$ *cuando* $n \to \infty$.

Como consecuencia del teorema 4, si las variables aleatorias $\{X_n\}$ son no negativas, tenemos

$$E\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n). \tag{4}$$

Variables aleatorias uniformes. Sean W y Z variables aleatorias que representan dos puntos elegidos al azar de forma independiente del intervalo $[a, b]$ con $0 \leq a < b < \infty$. En este caso, W y Z pueden ser consideradas variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución uniforme:

$$F(s) = F_W(s) = F_Z(s) = \frac{s-a}{b-a}, \quad a \leq s < b, \tag{5}$$

$F(s) = 0$ para $s < a$, $F(s) = 1$ para $s \geq b$; y función de densidad

$$f(s) = f_W(s) = f_Z(s) = \frac{1}{b-a}, \; a < s < b; \tag{6}$$

y $f(s) = 0$ en otro caso. Definimos las variables aleatorias

$$X = \min\{W, Z\} \quad \text{y} \quad Y = \max\{W, Z\}.$$

Es fácil ver que las funciones de distribución de X y Y son:

$$F_X(x) = P\left[X \leq x\right] = 1 - P\left[W > x\right] P\left[Z > x\right] = 1 - (1 - F(x))^2$$

y

$$F_Y(y) = P\left[Y \leq y\right] = P\left[W \leq y\right] P\left[Z \leq y\right] = \left[F(y)\right]^2.$$

Por lo tanto, de (5), $F_X(x) = 0$, $x < a$; $F_X(x) = 1$ $x \geq b$,

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2, \quad a \leq x < b;$$

y $F_Y(y) = 0$, $y < a$; $F_Y(y) = 1$ $y \geq b$, y

$$F_Y(y) = \left(\frac{y-a}{b-a}\right)^2, \quad a \leq y < b.$$

Mas aún, las funciones de densidad correspondientes son:

$$f_X(x) = \frac{2\,(b-x)}{(b-a)^2}, \quad a < x < b; \quad f_Y(y) = \frac{2(y-a)}{(b-a)^2}, \quad a < y < b,$$

y $f_X = f_Y = 0$ en otro caso. Ahora, mediante cálculos directos, podemos obtener las esperanzas correspondientes:

$$E(X) = \int_a^b x f_X(x)dx = \int_a^b \frac{2x(b-x)}{(b-a)^2}dx = a + \frac{b-a}{3} \tag{7}$$

y

$$E(Y) = \int_a^b y f_Y(y)dy = \int_a^b \frac{2y(y-a)}{(b-a)^2}dy = a + \frac{2}{3}(b-a). \tag{8}$$

Por lo tanto

$$E(Y-X) = \frac{b-a}{3}. \tag{9}$$

La demostración del teorema 1 se basa, principalmente, en aplicar estas herramientas básicas de probabilidad. En particular, usaremos repetidamente las relaciones (7)-(9) en los intervalos involucrados en la construcción del conjunto $\hat{C}$.

Demostración del teorema 1. Tomando en cuenta que $\{B_n\}$ es una familia de conjuntos ajenos, de (2) y (1b) tenemos

$$\lambda(\hat{C}) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (Y_{nk} - X_{nk}),$$

lo cual implica, tomando esperanza y aplicando el teorema de convergencia monótona (véase (4)),

$$E(\lambda(\hat{C})) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} E(Y_{nk} - X_{nk}) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\lambda(B_n)\right]. \tag{10}$$

Por lo tanto, para demostrar la parte (a) del teorema, es suficiente mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left[\lambda(B_n)\right] = 1. \tag{11}$$

Para $n = 1$, de (9) se tiene

$$E(\lambda(B_1)) = E(Y_{11} - X_{11}) = \frac{1}{3}.$$

Para $n = 2$, observe que el comportamiento de las variables aleatorias $Y_{21} - X_{21}$ y $Y_{22} - X_{22}$ depende de las variables aleatorias X_{11} y Y_{11}. Esto mismo sucede en los pasos subsecuentes, es decir, el comportamiento de variables aleatorias correspondientes a un paso depende de las variables aleatorias del paso anterior. En este sentido, en los siguientes cálculos estaremos usando recurrentemente la propiedad (3). En efecto, para $n = 2$, observemos que de (3) se cumple

$$\begin{aligned} E(Y_{21} - X_{21}) &= E(E(Y_{21} - X_{21}) \mid X_{11})) \\ &= \int_0^1 E((Y_{21} - X_{21}) \mid X_{11} = x) f_{X_{11}}(x)dx \\ &= \int_0^1 \frac{x}{3} f_{X_{11}}(x)dx = \frac{1}{3}E(X_{11}) = \frac{1}{9}. \quad \text{(por (7))} \end{aligned} \tag{12}$$

También se cumple

$$\begin{aligned} E(Y_{22} - X_{22}) &= E(E(Y_{22} - X_{22}) \mid Y_{11})) \\ &= \int_0^1 E((Y_{22} - X_{22}) \mid Y_{11} = y) f_{Y_{11}}(y)dy \\ &= \int_0^1 \frac{1-y}{3} f_{Y_{11}}(x)dx = \frac{1}{3}E(1 - Y_{11}) = \frac{1}{3}(1 - E(Y_{11})) \\ &= \frac{1}{3}(1 - \frac{2}{3}) = \frac{1}{9}. \quad \text{(por (8))} \end{aligned} \tag{13}$$

Combinando (12) y (13)

$$E(\lambda(B_2)) = \frac{2}{3^2}.$$

Ahora, para $n = 3$, observe que

$$\begin{aligned} E(Y_{31} - X_{31}) &= E(E(Y_{31} - X_{31}) \mid X_{21}) \\ &= \int_0^1 E(Y_{31} - X_{31} \mid X_{21} = x) f_{X_{21}}(x)dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 x f_{X_{21}}(x)dx = \frac{1}{3}E(X_{21}) = \frac{1}{3}E(E(X_{21} \mid X_{11})) \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 E(X_{21} \mid X_{11} = y) f_{X_{11}}(y)dy = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{y}{3} f_{X_{11}}(y)dy \\ &= \frac{1}{9}E(X_{11}) = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
E(Y_{32}-X_{32}) &= E(E(Y_{32}-X_{32}) \mid X_{11}, Y_{21}) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 E((Y_{32}-X_{32}) \mid X_{11}=x, Y_{21}=y) \\
&= \int_0^1 \int_0^x \frac{x-y}{3} f_{Y_{21}|X_{11}}(y \mid x) f_{X_{11}}(x) dy dx \\
&= \frac{1}{3}\left\{ \int_0^1 x f_{X_{11}}(x) dx \int_0^x f_{Y_{21}|X_{11}}(y \mid x) dy \right. \\
&\qquad \left. - \int_0^1 \int_0^x y f_{Y_{21}|X_{11}}(y \mid x) f_{X_{11}}(x) dy dx \right\} \\
&= \frac{1}{3}\left\{ \int_0^1 x f_{X_{11}}(x) dx - \int_0^1 E(Y_{21} \mid X_{11}=x) f_{X_{11}}(x) dx \right\} \\
&= \frac{1}{3}\left\{ E(X_{11}) - \int_0^1 \frac{2x}{3} f_{X_{11}}(x) dx \right\} = \frac{1}{3}\left\{ E(X_{11}) - \frac{2}{3} E(X_{11}) \right\} \\
&= \frac{1}{3}\left\{ \frac{1}{3} - \frac{2}{9} \right\} = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}.
\end{aligned}$$

Similarmente obtenemos

$$E(Y_{33}-X_{33}) = E(E(Y_{33}-X_{33}) \mid X_{22}, Y_{11}) = 1/3^3$$

y

$$E(Y_{34}-X_{34}) = E(E(Y_{34}-X_{34}) \mid Y_{22}) = 1/3^3.$$

Entonces

$$E(\lambda(B_3))) = \frac{4}{3^3} = \frac{2^2}{3^3}.$$

En general podemos aplicar el siguiente proceso recursivo. Definimos la familia de intervalos cerrados $\{J_{kl}\}$ como

$$\begin{array}{llll}
J_{11} = [0, X_{11}], & J_{12} = [Y_{11}, 1], & & \\
J_{21} = [0, X_{21}], & J_{22} = [Y_{21}, X_{11}], & J_{23} = [Y_{11}, X_{22}], & J_{24} = [Y_{22}, 1], \\
\vdots & & & \\
J_{n1} = [0, X_{n1}], & J_{n2} = [Y_{n1}, X_{(n-1)1}], & \cdots & J_{n2^n} = [Y_{n2^{n-1}}, 1], \\
\cdots & \cdots & &
\end{array}$$

Entonces, de (7) y (8),

$$E(\lambda(J_{11})) = E(\lambda(J_{12})) = \frac{1}{3}.$$

Supongamos que $E(\lambda(J_{(n-1)i})) = 1/3^{n-1}$ para $i = 1, \ldots, 2^{n-1},\ n \geq 2$. Sea $J_{(n-1)i} = [Y^{(n-1)m}, X^{(n-1)l}]$, para algún m y l, el intervalo sobre el cual son elegidos los puntos W_{nk} y Z_{nk}, $n \geq 2$ y $k = 1, \ldots, 2^n$. Entonces, para $X_{nk} = \text{mín}\{W_{nk}, Z_{nk}\}$ y $Y_{nk} = \text{máx}\{W_{nk}, Z_{nk}\}$, tenemos

$$\begin{aligned}
E(Y_{nk} - X_{nk}) &= E(E((Y_{nk} - X_{nk}) \mid Y^{(n-1)m}, X^{(n-1)l})) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 E((Y_{nk} - X_{nk}) \mid Y^{(n-1)m} = y, X^{(n-1)l} = x) dydx \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 \int_0^1 (x - y) f_{Y^{(n-1)m}, X^{(n-1)l}}(x, y) dydx \\
&= \frac{1}{3} E(\lambda(J_{(n-1)i})) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3^{n-1}}\right) = \frac{1}{3^n}.
\end{aligned}$$

Además,

$$E(X_{nk} - Y^{(n-1)m}) = E(E((X_{nk} - Y^{(n-1)m}) \mid Y^{(n-1)m}, X^{(n-1)l})) = \frac{1}{3^n}$$

y

$$E(X^{(n-1)l} - Y_{nk}) = E(E(X^{(n-1)l} - Y_{nk}) \mid Y^{(n-1)m}, X^{(n-1)l}) = \frac{1}{3^n}.$$

Por lo tanto

$$E(\lambda(B_n) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} E(Y_{nk} - X_{nk}) = \frac{2^{n-1}}{3^n},$$

lo cual a su vez implica

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left[\lambda(B_n)\right] = 1.$$

Es decir, (11) se cumple, y por lo tanto la parte (a) del teorema queda demostrada.

La parte (b) se obtiene observando que para toda $\omega \in \Omega$, $\left\{\hat{I}_n\right\}$ es una sucesión decreciente a $\hat{C}(\omega) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \hat{I}_n(\omega)$ (ver (2)). De aquí, por las propiedades de continuidad de la medida de Lebesgue podemos concluir

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(\hat{I}_n(\omega)) = \lambda(\hat{C}(\omega)), \qquad \text{para todo } \omega \in \Omega,$$

lo cual demuestra la parte (b).

Observación 5. De acuerdo con los procesos que se siguen en la construcción del conjunto $\hat{C}$ y del conjunto de Cantor estándar C, podemos adaptar los argumentos sobre C al escenario aleatorio para deducir las siguientes propiedades (recordemos que *c.s.* significa *casi seguramente* con respecto a P):

(a) Para toda $\omega \in \Omega$, $\hat{C}(\omega)$ es *cerrado* porque es la intersección de conjuntos cerrados. De aquí, como $\hat{C}$ es acotado, por el teorema de Heine-Borel concluimos que es un conjunto *compacto* (véase [9]).

(b) Casi seguramente, cada punto x de $\hat{C}$ es el límite de una sucesión (x_n), donde x_n es un extremo de un intervalo J_{nk_n}. Como $x_n \in \hat{C}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces x es un punto de acumulación de $\hat{C}$, lo cual, junto con (a) implica que $\hat{C}$ es, c.s. un conjunto *perfecto.*

(c) Ahora, como $\hat{C}$ es c.s. perfecto, tenemos que $\hat{C}$ es c.s. un conjunto no numerable (véase [9, teo. 2.43]).

(d) Finalmente, usando que $\hat{C}$ es cerrado y $\lambda(\hat{C}) = 0$ c.s., tenemos que $int(cl(\hat{C})) = \emptyset$, es decir, $\hat{C}$ es c.s. un conjunto *denso en ninguna parte*, donde $int(A)$ y $cl(A)$ representan el interior y la cerradura de un conjunto A, respectivamente.

4. Otras construcciones aleatorias de conjuntos tipo Cantor

En términos generales, la construcción de conjuntos tipo Cantor radica en llevar a cabo un proceso recursivo que consiste en la remoción apropiada de subintervalos, partiendo del intervalo $[0,1]$. Cuando este proceso se realiza de manera aleatoria, resulta en la generación de un conjunto aleatorio tipo Cantor. En este contexto, a continuación presentamos otras formas de generar conjuntos aleatorios de Cantor (véase [4]).

Sea $\tilde{E}_0 = [0,1]$. Se remueve un subintervalo abierto O_1 de longitud aleatoria, quedando 2 subintervalos $\tilde{J}_1$ y $\tilde{J}_2$, i.e.,

$$\tilde{J}_1 \cup \tilde{J}_2 = \tilde{E}_0 - O_1.$$

Definimos el conjunto $\tilde{E}_1 = \tilde{J}_1 \cup \tilde{J}_2$. Ahora, de los subintervalos $\tilde{J}_1$ y $\tilde{J}_2$ se remueven los subintervalos abiertos O_{21} y O_{22}, respectivamente, de longitud aleatoria, quedando, en este caso, 4 subintervalos: $\tilde{J}_{11}$ y $\tilde{J}_{12}$ correspondientes a $\tilde{J}_1$; $\tilde{J}_{21}$ y $\tilde{J}_{22}$ correspondientes a $\tilde{J}_2$. Entonces definimos el conjunto

$$\tilde{E}_2 = \tilde{J}_{11} \cup \tilde{J}_{12} \cup \tilde{J}_{21} \cup \tilde{J}_{22}.$$

De nuevo se repite el proceso, es decir, de cada subintervalo se remueve un intervalo abierto de longitud aleatoria quedando 8 subintervalos: $\tilde{J}_{111}$ y $\tilde{J}_{112}$; $\tilde{J}_{121}$ y $\tilde{J}_{122}$; $\tilde{J}_{211}$ y $\tilde{J}_{212}$; $\tilde{J}_{221}$ y $\tilde{J}_{222}$, cada par correspondiente a los intervalos $\tilde{J}_{11}, \tilde{J}_{12}, \tilde{J}_{21}$ y $\tilde{J}_{22}$, respectivamente. Entonces definimos

$$\tilde{E}_3 = \tilde{J}_{111} \cup \tilde{J}_{112} \cup \tilde{J}_{121} \cup \tilde{J}_{122} \cup \tilde{J}_{211} \cup \tilde{J}_{212} \cup \tilde{J}_{221} \cup \tilde{J}_{222}.$$

Este proceso se repite una y otra vez para formar una sucesión de conjuntos $\left\{\tilde{E}_k\right\}$ cuyas longitudes son aleatorias. Bajo este escenario, el conjunto aleatorio tipo Cantor se define como

$$\tilde{C} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \tilde{E}_k.$$

Otra forma de obtener un conjunto aleatorio tipo Cantor es cuando se aplica el siguiente proceso aleatorio. En un primer paso se divide el intervalo $[0,1]$ en 3 subintervalos de la misma longitud y se elige al azar uno de ellos para ser removido. Luego, cada uno de los dos subintervalos que quedan se divide en 3 subintervalos de la misma longitud, y de nuevo, de cada uno de esos 3 subintervalos, se elige al azar uno de ellos para ser removido, quedando cuatro subintervalos. Este proceso se repite recursivamente, es decir, en cada paso se divide en 3 partes iguales cada uno de los intervalos que quedan del paso anterior, y de cada bloque de subintervalos se elige uno al azar para ser removido. En este caso, si denotamos por $\breve{E}_k$ el conjunto correspondiente al k-ésimo paso, como es usual, el conjunto aleatorio de Cantor se define como $\breve{C} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \breve{E}_k$.

Construcciones similares de conjuntos aletorios tipo Cantor se pueden encontrar, por ejemplo, en [2, 5] y sus referencias.

De las contrucciones previas, la del conjunto $\tilde{C}$ es semejante a la nuestra dada en (2). Sin embargo, el hecho de que en ambas no se siga la idea de Cantor, es decir, que no consideren explicitamente la elección de puntos al azar, como en nuestro caso, no permite obtener propiedades análogas al conjunto clásico de Cantor, es decir cerrado, compacto, perfecto y denso en ninguna parte, como se establece en la Observación 5. De hecho, las construcciones de los conjuntos $\tilde{C}$ y $\breve{C}$, así como las que se presentan en [2, 5], están escencialmente enfocadas a estudiar otras propiedades relacionadas con la dimensión fractal.

5. Comentarios finales

Observe que la convergencia establecida en la parte (b) del teorema 1 proporciona un esquema de aproximación por trayectorias al conjunto aleatorio de Cantor $\hat{C}$. Este hecho constituye la base fundamental para implementar procesos de simulación estocástica para el conjunto de Cantor. Otros procedimientos de simulación por medio de sucesiones aleatorias se pueden encontrar en [8].

Finalmente, vale la pena destacar que aunque solo se utilicen herramientas básicas de probabilidad en la construcción de $\hat{C}$, existe un aspecto teórico importante que no debe pasarse por alto. En efecto, observe que en la definición de $\hat{C}$ están involucradas sucesiones infinitas de elementos aleatorios. Por lo tanto, el espacio de probabilidad correspondiente a estas sucesiones de elementos aleatorios debe estar bien definido. La construcción de este tipo de espacios de probabilidad es un tema estudiado en libros avanzados sobre procesos estocásticos. En particular, el teorema de C. Iounescu-Tulcea (véase, por ejemplo, [3]) proporciona una manera de definir adecuadamente el espacio de probabilidad correspondiente. A continuación presentamos una idea general de la contrucción del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Sean $\Psi_n := [0,1]^{2n}$, $\Omega_n := \Psi_1 \times \Psi_2 \times \cdots \Psi_n$, $n \in \mathbb{N}$, y $\Omega := \Psi_1 \times \Psi_2 \times \cdots$. Entonces, un elemento $\omega \in \Omega$ es una sucesión de la forma

$$\omega = \{(w_{11}, z_{11}), [(w_{21}, z_{21}), (w_{22}, z_{22})], \ldots$$
$$\ldots, [(w_{n1}, z_{n1}), (w_{n2}, z_{n2}), \ldots, (w_{n2^{n-1}}, z_{n2^{n-1}})], \ldots\}$$

Las variables aleatorias $W_{nk}, Z_{nk}, X_{nk}, Y_{nk} : \Omega \to \mathbb{R}$, definidas en la sección 2, se definen de manera natural por

$$W_{nk}(\omega) = w_{nk}, \; Z_{nk}(\omega) = z_{nk},$$

y

$$X_{nk}(\omega) = \text{mín}\{w_{nk}, z_{nk}\}, \; Y_{nk}(\omega) = \text{máx}\{w_{nk}, z_{nk}\}.$$

El teorema de C. Iounescu-Tulcea garantiza la existencia de una única medida de probabilidad P en la $\sigma-$álgebra producto $\mathcal{F}$ de Ω tal que las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias W_{nk}, Z_{nk}, X_{nk} y Y_{nk}, consideradas en la demostración del teorema 1 son las correspondientes distribuciones marginales de P.

Por lo tanto, el espacio de probabilidad donde estaría definido el conjunto aleatorio de Cantor es $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ donde $\mathcal{F}$ es la correspondiente $\sigma-$álgebra producto.

Bibliografía

[1] G. Cantor, «Über unendliche, lineare punktmannigfaltigkeiten v.», *Mathematische Annalen*, vol. 21, 1883, 545–591.

[2] M. Dekking, «Random Cantor Sets and Their Projections», en *Fractal Geometry and Stochastics IV. Progress in Probability*, eds. C. Bandt *et al.*, Birkhäuser Basel, 2009.

[3] E. Dynkin y A. Yushkevich, *Controlled Markov Processes*, Springer-Verlag, 1979.

[4] K. Falconer, *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications*, 2.ª ed., John Wiley & Sons, 2003.

[5] K. Falconer y G. Grimmett, «On the geometry of random Cantor sets and fractal percolation», *J Theor Probab*, vol. 5, 1992, 465–485.

[6] J. Galavíz-Casas, «El conjunto de Cantor», *Miscelanea Matemática*, vol. 24, 1996, 23–37.

[7] G. Grimmett y D. Stirzaker, *Probability and random processes*, 3.ª ed., Oxford University Press, 2001.

[8] J. Halton, «Random sequences in generalized Cantor sets», *J Sci Comput*, vol. 6, 1991, 415–423.
[9] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3.ª ed., McGraw-Hill, 1964.