

## INTRODUCCION A LA MECANICA CELESTE

Alejandro López-Yáñez\*

Supongamos que tenemos  $n$  partículas puntuales  $q_1, q_2, \dots, q_n$  en  $R^3$  con masas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  respectivamente. Pensemos que estas partículas interactúan entre sí, siguiendo la Ley de la Gravitación Universal, en otras palabras, las partículas se atraen mutuamente con una fuerza de intensidad directamente proporcional al producto de las masas e inversamente al cuadrado de las distancias. El estudio del comportamiento de este sistema a partir de ciertas posiciones y velocidades iniciales es conocido como el problema de los  $n$ -cuerpos.

El problema de los  $n$ -cuerpos no ha sido resuelto para  $n \geq 3$  y Mecánica Celeste es exactamente la teoría matemática que estudia este problema.

Aquí haremos una introducción al ataque cualitativo del problema de los  $n$ -cuerpos por medio del estudio de un problema simple de mecánica, a saber, el problema de fuerza central en la recta.

Esto tiene la finalidad de que los lectores se familiaricen con este tipo de enfoque y, puedan abordar más tarde estudios

---

\* Investigador del CIMAS

de naturaleza semejante, de problemas que no han sido resueltos, como el problema de los tres cuerpos restringido.

Al final del trabajo se incluye una lista de libros que tratan temas relacionados con el estudio cualitativo de problemas de mecánica. También se explica la notación usada durante la exposición.

Pasemos a ver cual es el problema de fuerza central.

Consideremos una partícula puntual  $p$  con masa  $m$  en  $\mathbb{R}^3$ . Supongamos que esta partícula es atraída hacia un punto fijo de  $\mathbb{R}^3$  llamado centro, por una fuerza con intensidad directamente proporcional a la masa e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Denotemos por  $\hat{r}(t)$  a la función que nos da la posición de la partícula  $p$  en el tiempo  $t$  y coloquemos al centro en el origen de  $\mathbb{R}^3$ .

Tomando en cuenta que la segunda ley de Newton dice que la fuerza es igual a la masa por la aceleración ( $F=ma$ ), podemos establecer las ecuaciones diferenciales que gobiernan la evolución del sistema.

$$m \ddot{\hat{r}}(t) = \frac{Km}{(r(t))^2} \frac{-\hat{r}(t)}{r(t)} \quad \text{I}$$

Esto es, obtenemos un sistema de orden seis, ya que I puede ser escrito como tres ecuaciones escalares de orden dos, cada una.

Entonces el problema consiste en encontrar las soluciones (en caso de que existan) y averiguar su comportamiento; Por ejemplo: ¿Son periódicas?; ¿Son acotadas?; ¿Son estables?; ¿Están definidas para toda  $t$ ?, etc.

Intuitivamente, una evolución en el tiempo es estable si al someterla a una pequeña perturbación (que puede ser instantánea o no), la evolución resultante se "parece" mucho a la original, esto es, a la no perturbada. El grado de parecido que uno necesita, en general, está dictado por las características del problema práctico que se está tratando de resolver y del cual el problema matemático es sólo un modelo aproximado.

#### Existencia de soluciones

Aplicando el teorema de existencia de Cauchy, (ver sección 4 de [8]) a nuestro sistema de ecuaciones, sabemos; que dadas las condiciones iniciales  $[t_0, \hat{\rho}_0]$  y  $[t_0, \hat{v}_0]$  existe un intervalo de tiempo  $(t_0 - \alpha, t_0 + \beta)$  con  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  y una única función  $\hat{\rho}(t)$  definida en ese intervalo tal que:

- 1)  $\hat{\rho}(t)$  satisface la ecuación diferencial I

2)  $\hat{\rho}(t)$  satisface las condiciones iniciales, esto es,  $\hat{\rho}(t_0) = \hat{\rho}_0$   
y  $\hat{\dot{\rho}}(t_0) = \hat{v}_0$

O sea que el problema de existencia de soluciones de la ecuación I está resuelto.

### Espacio de configuración y espacio fase

Si tomamos el espacio formado por todas las posibles posiciones que puede ocupar P, obtenemos, el espacio llamado de configuración del problema. O sea que nuestro espacio de configuración es  $R^3 - [0]$  ya que r tiene que ser diferente de cero para que I esté definida.

Si tuviésemos dos partículas el espacio de configuración sería  $(R^3 - [0]) \times (R^3 - [0])$ .

Por un estado del sistema, entenderemos, la información mínima (en un tiempo dado) que determina totalmente la subsecuente evolución del sistema. En nuestro caso, si conocemos la posición y velocidad de P en el instante t aplicando el teorema de existencia de Cauchy, vemos que el movimiento del sistema queda completamente determinado, ya que,  $\hat{\rho}(t)$  es única. Además es claro que esta información es la mínima suficiente para determinar la conducta del sistema.

En otras palabras, un estado de nuestro problema será una pareja  $(\hat{r}, \hat{v})$  donde  $\hat{r} \in (R^3 - [0])$  y  $\hat{v} \in R^3$ , esto es,  $\hat{r}$  denota una posible posición de P y  $\hat{v}$  denota una posible velocidad de P.

Entonces si formamos el espacio de todos los posibles estados del sistema obtenemos el espacio fase del problema. En nuestro caso, el espacio fase es  $(R^3 - [0]) \times R^3$

Supongamos que  $\hat{\rho}(t)$  denota una solución de la ecuación diferencial I que llena las condiciones iniciales  $(t_0, \hat{\rho}_0)$  y  $(t_0, \hat{v}_0)$ . Sea  $(t_0 - \alpha, t_0 + \beta)$  el intervalo en que  $\hat{\rho}(t)$  esta definida y definamos la función  $\hat{S}: (t_0 - \alpha, t_0 + \beta) \rightarrow (R^3 - [0]) \times R^3$  del siguiente modo

$$\hat{S}(t) = (\hat{\rho}(t), \dot{\hat{\rho}}(t)) \quad \text{II}$$

Entonces la imagen del intervalo  $(t_0 - \alpha, t_0 + \beta)$  será una curva en el espacio fase que contiene al punto  $(\hat{\rho}_0, \hat{v}_0)$ .

De esta forma dado cualquier punto del espacio fase aplicando el teorema de existencia de Cauchy podemos encontrar una curva del tipo de II que pasa a través del punto dado.

Un momento de reflexión sobre la unicidad de la solución de I hace ver que las curvas obtenidas no se intersectan. Esto no sucede si consideramos las curvas correspondientes en el

espacio de configuración, esto es,  $\hat{C}: (t_0 - \alpha, t_0 + \beta) \rightarrow R^3 - [0]$  dada por  $\hat{C}(t) = \hat{\rho}(t)$ . O dicho de otra forma, las trayectorias descritas por la partícula en  $R^3 - [0]$ .

La familia de curvas considerada en el espacio fase es conocida con el nombre de retrato fase.

### Integrales del movimiento

Sea  $E$  la suma de la energía cinética y la energía potencial del sistema, o sea la energía total del sistema,

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{Km}{r} \quad \text{III}$$

Notemos que  $E$  tiene como dominio el espacio fase y como contradominio los reales  $R$ .

Averigüemos como varía  $E$  a lo largo de las curvas obtenidas en el espacio fase. Una forma de hacerlo es tomar la derivada de  $E$  a lo largo de una de esas curvas, esto es, calculemos la derivada con respecto al tiempo de la siguiente composición de funciones

$$(t_0 - \alpha, t_0 + \beta) \xrightarrow{\hat{S}(t)} (R^3 - [0]) \times R^3 \xrightarrow{E(\hat{r}, \hat{v})} R$$

$$\frac{d}{dt} E \cdot \hat{S}(t) = \frac{d}{dt} E(\hat{\rho}(t), \dot{\hat{\rho}}(t)) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m ||\dot{\hat{\rho}}(t)||^2 - \frac{Km}{||\hat{\rho}(t)||} \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{\hat{\rho}}(t) * \dot{\hat{\rho}}(t) - \frac{Km}{(\hat{\rho}(t) * \hat{\rho}(t))^{3/2}} \right) =$$

$$m \dot{\hat{\rho}}(t) * \ddot{\hat{\rho}}(t) + Km (\hat{\rho}(t) * \hat{\rho}(t))^{-3/2} (\dot{\hat{\rho}}(t) * \dot{\hat{\rho}}(t))$$

en vista de I, obtenemos

$$m \dot{\hat{\rho}}(t) * \frac{K}{\rho^3} (-\hat{\rho}(t)) + \frac{Km}{\rho^3} \hat{\rho}(t) * \dot{\hat{\rho}}(t) = 0$$

Por lo tanto E es constante a lo largo de la curva, ó, en otros términos, la energía total se conserva durante el movimiento del sistema.

La siguiente función, también tiene la propiedad de mantenerse constante durante el movimiento del sistema

$$P: (\mathbb{R}^3 - \{0\}) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\text{definida por } P(\hat{r}, \hat{v}) = \hat{r} \times \hat{v}$$

Funciones como E y P son llamadas integrales del sistema.

En general las integrales arrojan mucha luz sobre el comportamiento del sistema. A continuación veremos un ejemplo, de como haciendo uso de la integral energía total, podemos obtener, primero, una solución particular y segundo una imagen

de la familia de curvas en el espacio fase del problema de fuerza central en la recta.

Notemos que si  $G$  es una integral, entonces  $G^{-1}(a)$ , es en general un subconjunto del espacio fase compuesto de curvas completas y la dimensión de  $G^{-1}(a)$  es menor que la del espacio fase.

#### Problema de fuerza central en la recta

Modifiquemos el problema de fuerza central de la manera siguiente:

La partícula  $P$  sólo se podrá mover a lo largo de una recta fija en la cual se encuentra el centro. Las otras hipótesis quedan inalteradas.

Coloquemos al cero en el centro.

La ecuación I se transforma en

$$M\ddot{x} = \frac{Km}{x^2} \frac{-x}{|x|} \quad \text{IV}$$

y la expresión de la energía III se transforma en

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{Km}{|x|} \quad \text{V}$$

En este caso el espacio de configuración es  $R-[0]$ , y el espacio fase es  $(R-[0]) \times R$ .

Ahora busquemos todos los posibles movimientos para los cuales la energía total es cero y la partícula se mueve en la semirecta de los números positivos.

La ecuación V se convierte en

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{Km}{x} = 0$$

y de aquí obtenemos,

$$\sqrt{x} \frac{dx}{dt} = \sqrt{2K}$$

integrando con respecto a  $t$ , se tiene que

$$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2K} t + \text{constante}$$

o sea

$$x(t) = \left( \frac{3}{2} \sqrt{2K} t + \gamma \right)^{\frac{2}{3}}$$

La constante  $\gamma$  la podemos determinar sabiendo la posición inicial de  $P$ . El hecho de que la posición inicial sea suficiente para determinar completamente el movimiento se debe a

la hipótesis de que la energía total es cero.

Observemos que  $x(t)$  esta definida para toda  $t$  y que

$$\dot{x}(t) = \frac{\frac{3}{2} \sqrt{2K}}{\left(\frac{3}{2} \sqrt{2K} t + \gamma\right)}$$

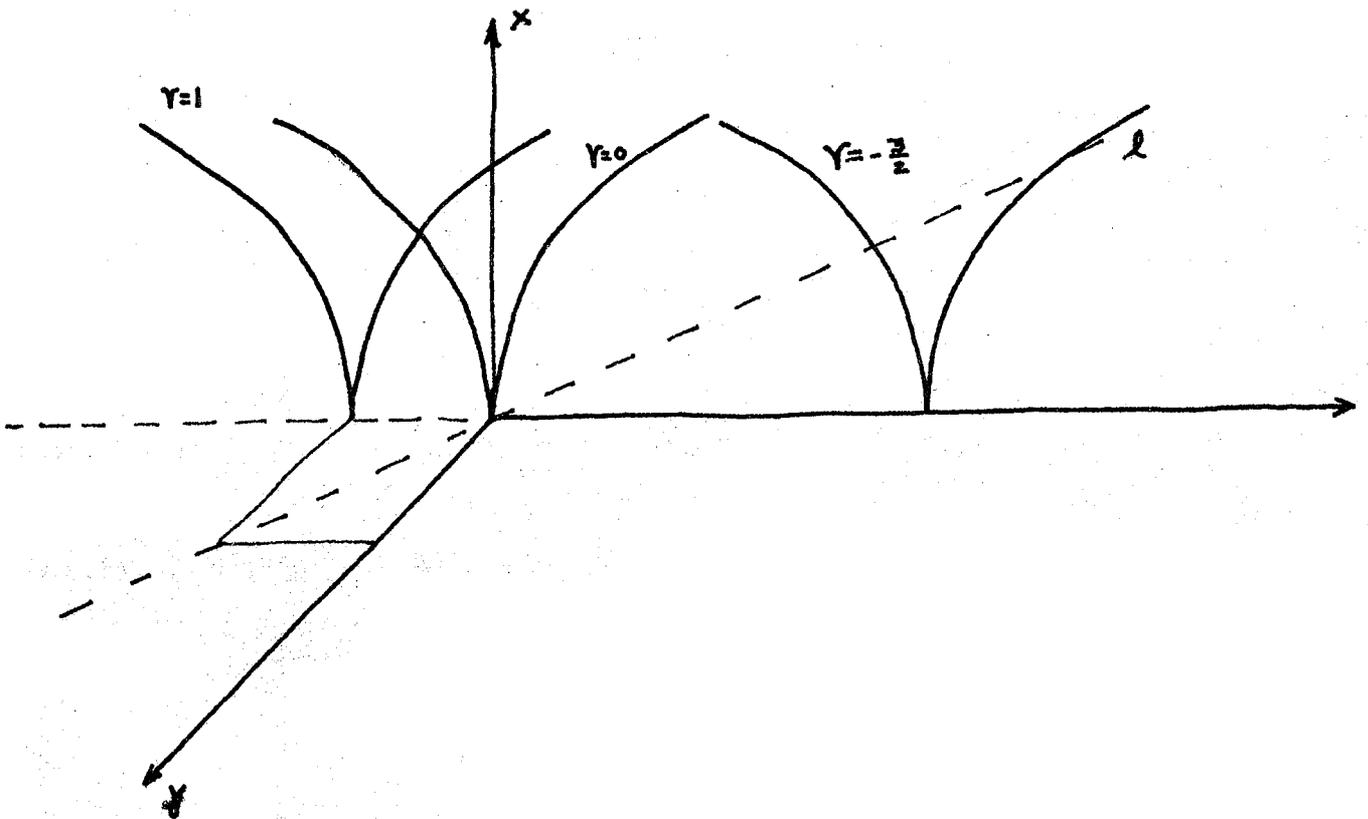
tiende a  $-\infty$  cuando  $t$  tiende a  $\frac{-\gamma}{\frac{3}{2} \sqrt{2K}}$  por la izquierda y

tiende a  $+\infty$  cuando  $t$  tiende a  $\frac{-\gamma}{\frac{3}{2} \sqrt{2K}}$  por la derecha

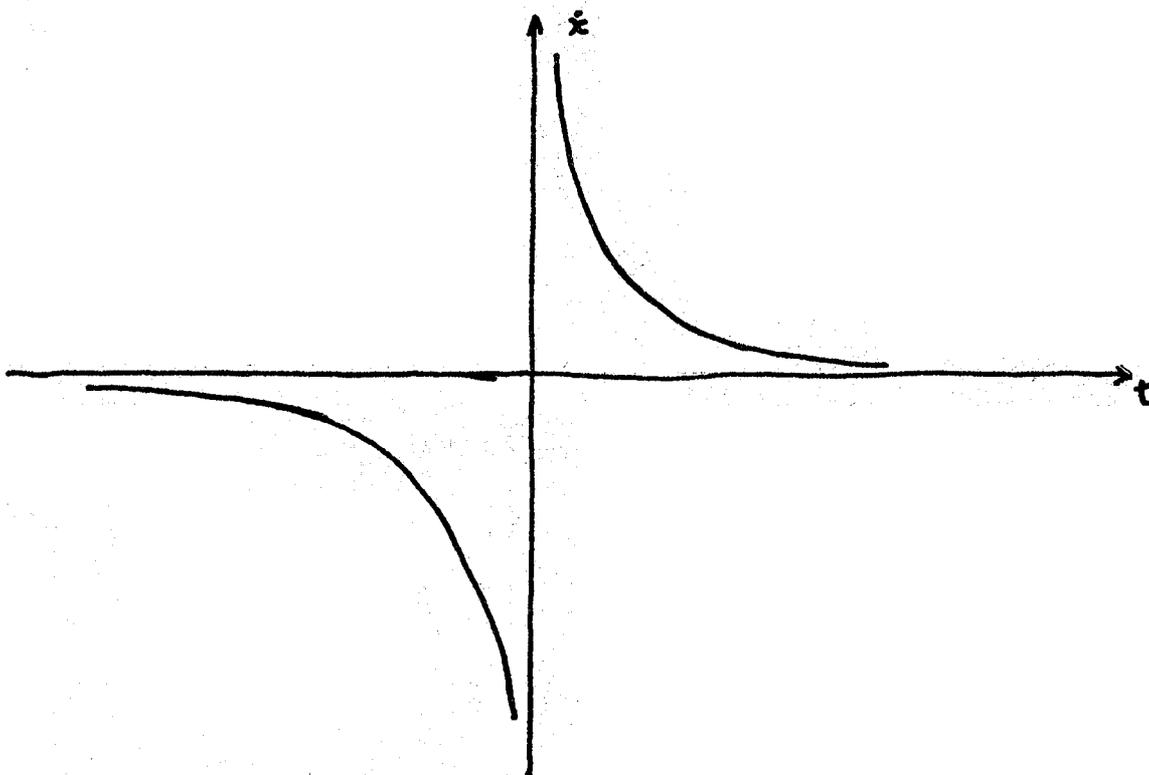
Es claro que  $t_0 = \frac{-\gamma}{\frac{3}{2} \sqrt{2K}}$  es una singularidad de la solución

$x(t)$ , ya que su derivada no está definida ahí.

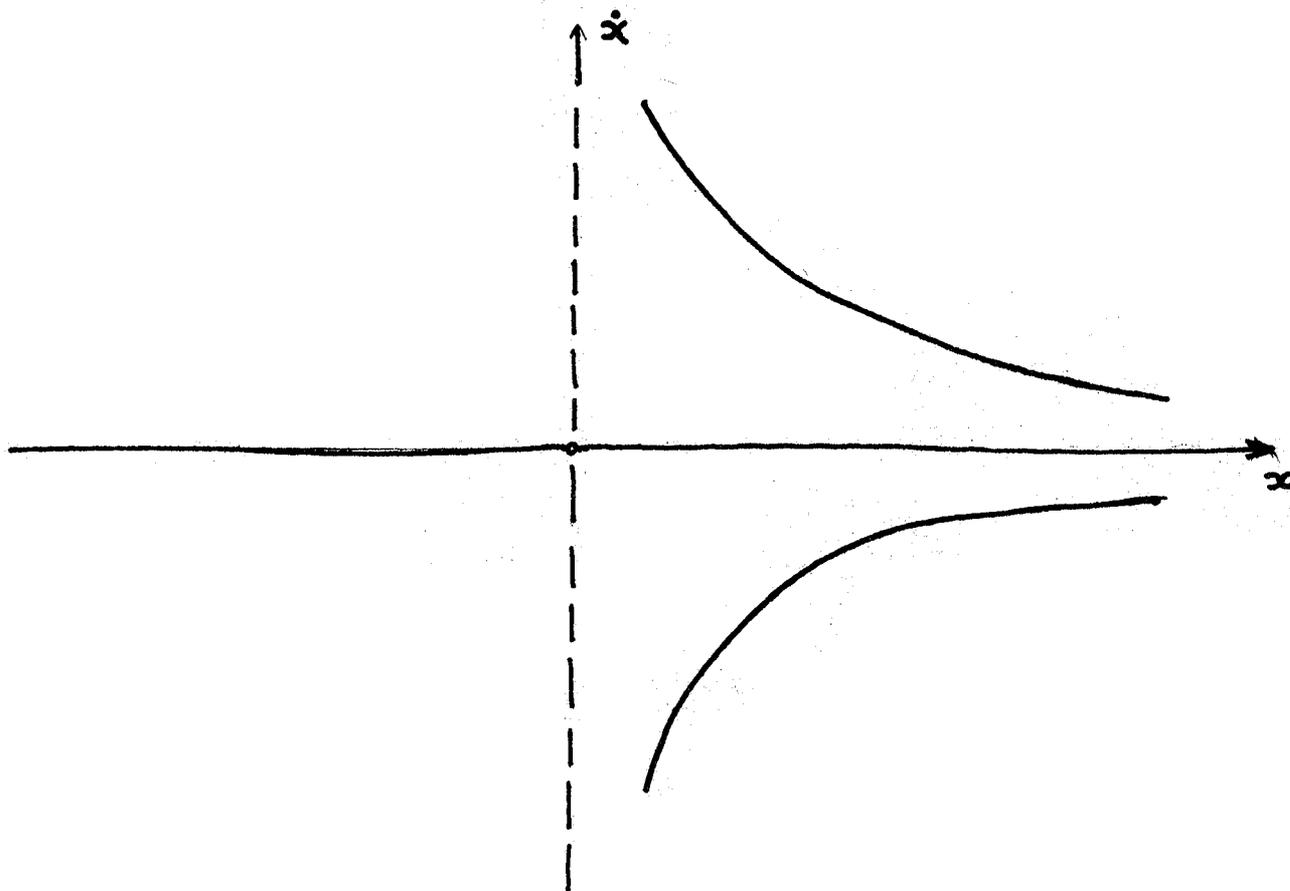
A continuación dibujaremos las gráficas de las soluciones obtenidas para los valores de  $\gamma$ ,  $-\frac{3}{2}$ ,  $0$  y  $1$  que corresponden a las posiciones iniciales  $[0, \frac{3}{2}]$ ,  $[0, 0]$  y  $[0, 1]$



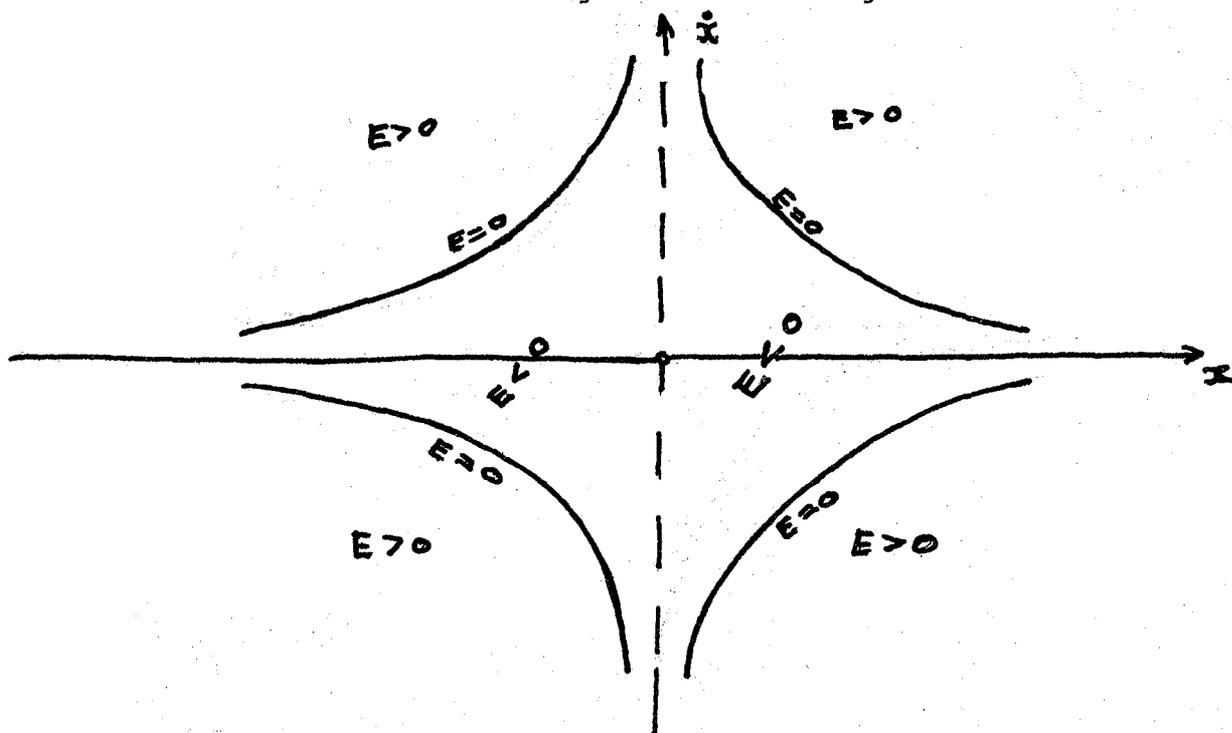
Para  $\gamma=0$ , dibujemos la gráfica de la velocidad



Ahora veamos qué curva obtenemos en el espacio fase



En el siguiente dibujo ilustraremos las regiones correspondientes a diferentes signos de la energía



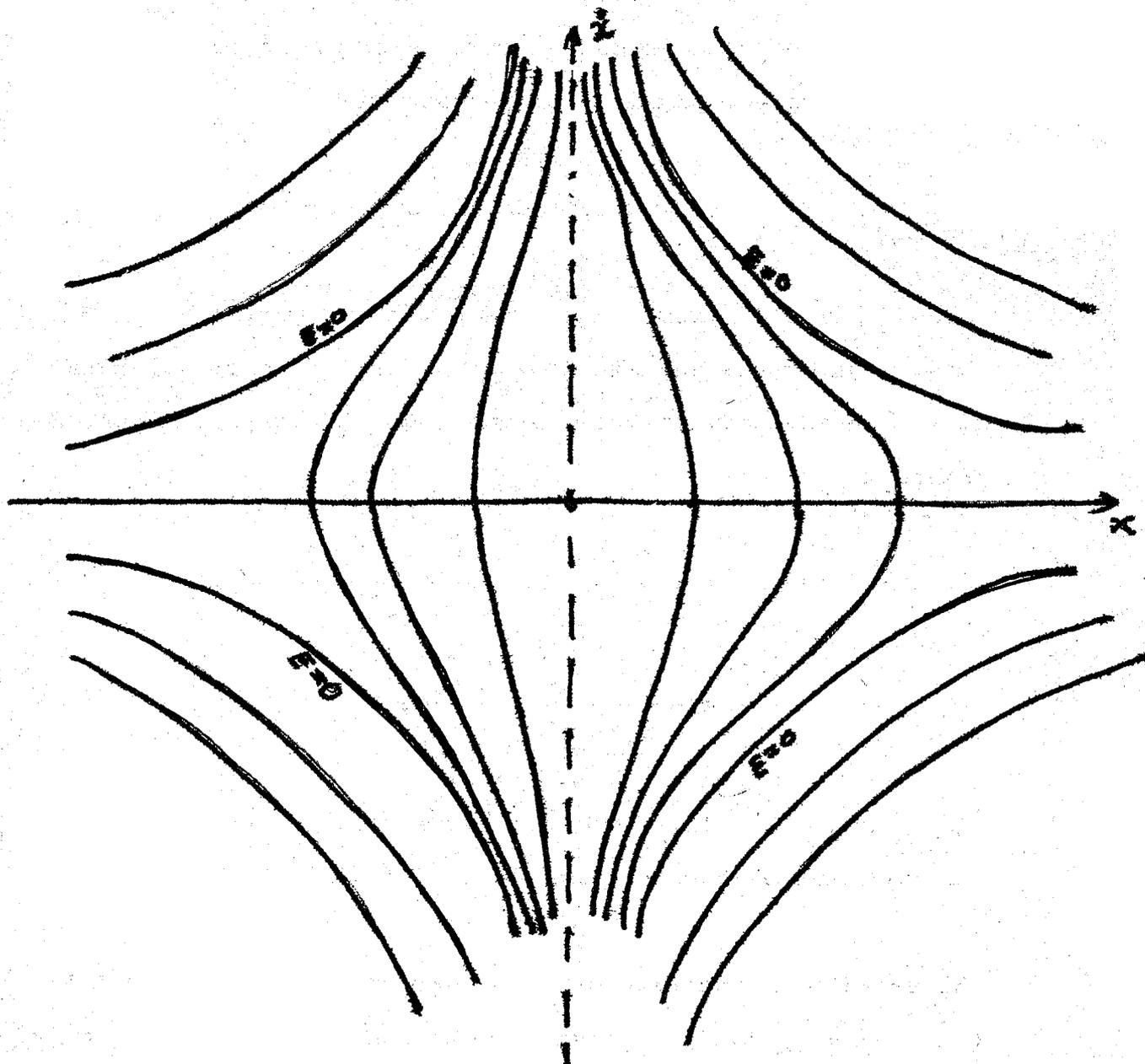
El subconjunto del espacio fase para el cual  $E$  es menor que cero es abierto, no acotado en las direcciones de los ejes y tiene dos componentes, (Cada una de ellas homeomorfa a un disco abierto), una a la izquierda del eje  $\dot{x}$  y la otra a la derecha del mismo eje. (Recuérdese que el eje  $\dot{x}$  no pertenece al espacio fase).

El subconjunto para el cual  $E$  es igual a cero consta de cuatro curvas simples (Cada una de ellas homeomorfa a un intervalo abierto), no acotadas en las direcciones de los ejes, que forman la frontera de los subconjuntos  $E < 0$  y  $E > 0$ .

Por último el subconjunto en el cual  $E$  es mayor que cero, es abierto, no acotado en las direcciones de los ejes y tiene cuatro componentes. (Cada una de ellas homeomorfa a un disco abierto).

Un pequeño análisis de la ecuación  $\dot{x}^2 = 2E + \frac{2K}{|x|}$

nos revela la siguiente familia de curvas en el espacio fase.



Gran parte del comportamiento cualitativo del sistema es revelado por esta última figura. Cuestiones acerca de movimientos acotados en posiciones, acotados en velocidades, movimientos estables, etc., pueden ser contestadas simplemente examinando la figura.-

Claro que no siempre es posible obtener una imagen tan clara y completa de la familia de curvas en el espacio fase, de hecho, el objetivo en este tipo de enfoque es obtener la imagen más completa posible del retrato fase.

### Problema de los dos cuerpos

Consideremos el problema de los  $n$  cuerpos para  $n$  igual a dos. Usando una vez más la 2a. ley de Newton establecemos las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento del sistema

$$m_1 \ddot{\hat{r}}_1 = \frac{K m_1 m_2}{\|\hat{r}_1 - \hat{r}_2\|^2} \frac{\hat{r}_2 - \hat{r}_1}{\|\hat{r}_1 - \hat{r}_2\|}$$

$$m_2 \ddot{\hat{r}}_2 = \frac{K m_1 m_2}{\|\hat{r}_1 - \hat{r}_2\|^2} \frac{\hat{r}_1 - \hat{r}_2}{\|\hat{r}_1 - \hat{r}_2\|}$$

Una forma de resolver este problema consiste en reducirlo a un problema de fuerza central. . (Ver [7]).

El espacio de configuración de este problema es  $(R^3 \times R^3) - \Delta_{12} = R^6 - \Delta_{12}$  donde  $\Delta_{12}$  está formado por los puntos  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in R^6$  tales que  $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$ .

El espacio fase es  $(R^6 - \Delta_{12}) \times R^3 \times R^3 = (R^6 - \Delta_{12}) \times R^6$ .

## Problema de los tres cuerpos

Ahora supongamos que las partículas son tres, con masas  $m_1, m_2, m_3$ . Bajo las mismas hipótesis obtenemos el sistema siguiente:

$$m_1 \ddot{\hat{r}}_1 = \frac{K m_1 m_2}{\|\hat{r}_1 - \hat{r}_2\|^2} \frac{\hat{r}_2 - \hat{r}_1}{\|\hat{r}_1 - \hat{r}_2\|} + \frac{K m_1 m_3}{\|\hat{r}_1 - \hat{r}_3\|^2} \frac{\hat{r}_3 - \hat{r}_1}{\|\hat{r}_1 - \hat{r}_3\|}$$

$$m_2 \ddot{\hat{r}}_2 = \frac{K m_1 m_2}{\|\hat{r}_1 - \hat{r}_2\|^2} \frac{\hat{r}_1 - \hat{r}_2}{\|\hat{r}_1 - \hat{r}_2\|} + \frac{K m_2 m_3}{\|\hat{r}_2 - \hat{r}_3\|^2} \frac{\hat{r}_3 - \hat{r}_2}{\|\hat{r}_2 - \hat{r}_3\|}$$

$$m_3 \ddot{\hat{r}}_3 = \frac{K m_1 m_3}{\|\hat{r}_1 - \hat{r}_3\|^2} \frac{\hat{r}_1 - \hat{r}_3}{\|\hat{r}_1 - \hat{r}_3\|} + \frac{K m_2 m_3}{\|\hat{r}_2 - \hat{r}_3\|^2} \frac{\hat{r}_2 - \hat{r}_3}{\|\hat{r}_2 - \hat{r}_3\|}$$

Así obtenemos un sistema de orden 18, ya que tenemos nueve ecuaciones escalares de orden dos cada una.

El espacio de configuración de este problema es

$$R^3 \times R^3 \times R^3 - (\Delta_{12} \cup \Delta_{13} \cup \Delta_{23}) = R^9 - (\Delta_{12} \cup \Delta_{13} \cup \Delta_{23}) \text{ donde}$$

$\Delta_{12}$  está formado por los puntos  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) \in R^9$  tales que  $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$ ,  
 $\Delta_{13}$  está formado por los puntos  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) \in R^9$  tales que  $\hat{x}_1 = \hat{x}_3$  y  
 $\Delta_{23}$  está formado por los puntos  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) \in R^9$  tales que  $\hat{x}_2 = \hat{x}_3$ .

El espacio fase del problema será

$$\left[ \mathbb{R}^9 - (\Delta_{12} \cup \Delta_{13} \cup \Delta_{23}) \right] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^9 - (\Delta_{12} \cup \Delta_{13} \cup \Delta_{23})) \times \mathbb{R}^9$$

El problema de los tres cuerpos no ha sido resuelto hasta la fecha, no obstante, que muchos de los mejores matemáticos han dedicado parte de sus esfuerzos a tratar de resolverlo. Estos esfuerzos no han sido vanos, puesto que por un lado han rendido información parcial y por otro lado han fructificado en la creación de nuevas teorías y herramientas matemáticas. Baste dar el ejemplo de H. Poincaré, (Poincaré inauguró el enfoque cualitativo de problemas de mecánica) que al analizar el problema de los tres cuerpos restringido fue conducido a hacer consideraciones de tipo topológico (diferencial) y con esto puso los cimientos de las teorías hoy conocidas como topología algebraica y topología diferencial.

Nota. Posteriormente publicaremos tanto una reseña histórica del desarrollo de la Mecánica Celeste y sus repercusiones en las Matemáticas, como una exposición detallada del problema de los tres cuerpos.

## Guía de Notación

$\mathbb{R}^3$  Espacio euclidiano de dimensión tres

$\hat{r}(t) = \frac{d^2 \hat{r}(t)}{dt^2}$ , el punto arriba de la función indicará la derivada con respecto a  $t$ .

$r(t) = ||\hat{r}(t)|| =$  longitud o norma del vector  $\hat{r}(t)$

$K$  es una constante positiva que sólo depende de las unidades

$\hat{V}(t) = \hat{r}(t)$

$V = ||\hat{v}||$

$\hat{a} * \hat{b}$  denota el producto escalar o interno de los vectores  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$

$\hat{a} \times \hat{b}$  denota el producto vectorial de los vectores  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$ .

$X(t)$  denota el vector de posición de  $P$  en  $R$  en el tiempo  $t$ .

$|x|$  denota el valor absoluto de  $x$

$\hat{r}_i$  vector de posición de la partícula  $q_i$

BIBLIOGRAFIA

ABRAHAM, R.

- [1] FOUNDATIONS OF MECHANICS, BENJAMIN, NEW YORK, 1967

ARNOLD, V.I. and AVEZ, A.

- [2] ERGODIC PROBLEMS OF CLASSICAL MECHANICS, BENJAMIN,  
NEW YORK, 1968

BIRKHOFF, G.D.

- [3] DYNAMICAL SYSTEMS, NEW YORK, 1966, revised edition.

HAGIHARA

- [4] CELESTIAL MECHANICS, THE M.I.T. PRESS, MASS., 1970

HIRSCH, M. and SMALE, S.

- [5] QUALITATIVE THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS. (Está por  
aparecer a la venta)

LOOMIS, L. and STERNBERG, S.

- [6] ADVANCED CALCULUS, ADDISON-WESLEY, READING, MASS., 1968

POLLARD, H.

- [7] MATHEMATICAL INTRODUCTION TO CELESTIAL MECHANICS, PRENTICE  
HALL, ENGLEWOOD CLIFFS, N.J., 1965.

SIEGEL, C.L. - MOSER, J.K.

[8] LECTURES ON CELESTIAL MECHANICS, SPRINGER-VERLAG,  
NEW YORK, 1971

STERNBERG, S.

[9] CELESTIAL MECHANICS, I and II, BENJAMIN, NEW YORK, 1969.

STIEFEL, and SCHEIFELE

[10] LINEAR AND REGULAR CELESTIAL MECHANICS, SPRINGER-VERLAG.  
NEW YORK, 1971

WINTNER, A.

[11] THE ANALYTICAL FOUNDATIONS OF CELESTIAL MECHANICS,  
PRINCETON UNIV. PRESS, PRINCETON, N.J., 1941