

# Las ecuaciones de Maxwell y el operador de Hodge

Sergio A. Holguín Cardona  
Instituto de Matemáticas, Unidad Oaxaca  
Universidad Nacional Autónoma de México  
sholguin@im.unam.mx

y

Kenett Martínez Ruiz  
Instituto de Matemáticas, Unidad Oaxaca  
Universidad Nacional Autónoma de México  
mtzkenett@comunidad.unam.mx

*Dedicado a la memoria de Alonso Sepúlveda Soto*

## 1. Introducción

En este artículo se busca exponer de forma detallada el vínculo entre las ecuaciones de Maxwell y el operador de Hodge, y está dirigido principalmente a estudiantes de licenciatura en matemáticas y física que tengan familiaridad con nociones básicas de cálculo vectorial, álgebra lineal, ecuaciones diferenciales y formas diferenciales. Los autores han intentado presentar los temas de manera que sean accesibles a dichos estudiantes, y nociones de geometría y de física se introducen con detalle a lo largo del artículo. Aspectos más técnicos de dichas áreas se mencionan brevemente en forma de pie de página, los mismos enriquecen la discusión, pero no son esenciales para entender el artículo. Aunque se tiene un enfoque matemático, y muchos resultados se presentan en forma de proposiciones, también se introducen conceptos físicos importantes. Lo anterior ayuda a cerrar «brechas» existentes entre matemáticos y físicos, e.g., muestra como una teoría física puede describirse usando diversos formalismos matemáticos, y ejemplifica el origen de conceptos como *dualidad*, *invariancia gauge* y *leyes de conservación*.

### 1.1 El electromagnetismo

El electromagnetismo busca describir una de las interacciones fundamentales de la naturaleza.<sup>1</sup> Los primeros fenómenos relacionados al electromagnetismo fueron descritos desde la antigüedad. En Grecia se tenía pleno conocimiento de la existencia de estos; de acuerdo con Aristóteles, los primeros fenómenos de electrostática y magnetismo fueron descritos por Tales de Mileto (625-545 AC).<sup>2</sup> Aun cuando se tenía conocimiento de estos desde la antigüedad, solo en el Siglo XIX se logró tener una teoría física para tales fenómenos. Dicha teoría es el electromagnetismo, el cual viene en gran parte descrito por cuatro ecuaciones conocidas como *las ecuaciones de Maxwell*. Estas relacionan los campos eléctrico y magnético con la densidad de carga y de corriente eléctrica. Si se tiene conocimiento de estas densidades, las ecuaciones permiten determinar los campos eléctrico y magnético. Una vez conocidos estos se puede determinar la trayectoria de cualquier partícula cargada mediante una ecuación adicional conocida como *la ley de Lorentz*.

### 1.2 El operador de Hodge

El operador de Hodge es un operador lineal asociado a cualquier variedad riemanniana o pseudo-riemanniana orientada. Fue definido por el célebre geómetra W. Hodge y es llamado *el operador estrella de Hodge*, viene denotado con frecuencia por  $*$  y asocia a cada forma diferencial en la variedad una forma «complementaria» conocida como su forma dual de Hodge. El operador  $*$  ha jugado un papel importante en geometría y es de relevancia en física; concretamente, en la teoría de Yang-Mills se consideran las ecuaciones de Yang-Mills autoduales y anti-autoduales, las cuales se definen usando dicho operador. Si bien el estudio de las mismas inicia en física, este ha tenido impacto en matemáticas.

Para los propósitos de este artículo, no es necesario revisar aspectos técnicos de geometría diferencial y es suficiente con definir el operador  $*$  de Hodge para el espacio-tiempo de Einstein.

### 1.3 El espacio-tiempo de Einstein

Se adoptarán las siguientes convenciones: Letras latinas  $i, j, k$  representan índices de 1 a 3 y letras griegas  $\mu, \nu, \sigma$  representan índices de 0 a 3. Campos vectoriales se denotan —por lo general— con letras latinas

---

<sup>1</sup>Existen cuatro fuerzas o interacciones fundamentales, llamadas *la fuerza electromagnética, débil, fuerte y de gravedad*. La última resulta descrita en términos geométricos en la teoría de la relatividad de Einstein. Las interacciones restantes se describen en la teoría de Yang-Mills. El lector interesado en aspectos avanzados de geometría y física puede consultar sobre la teoría de la relatividad y de Yang-Mills en [7], [16] y [2], [20], respectivamente.

<sup>2</sup>El lector interesado en aspectos históricos del electromagnetismo puede ver [15].

mayúsculas y con flechas, e.g.,  $\vec{V}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{E}$ . Letras latinas mayúsculas —sin flecha— denotan formas diferenciales, e.g.,  $A$ ,  $F$  y  $J$ . Expresiones con índices del tipo  $(B_{\mu\nu})$ ,  $(b_{ij})$  se entienden como matrices de dimensión cuatro y tres, respectivamente. Las sumas se realizan sobre los índices que aparecen repetidos en un término, e.g., expresiones del tipo  $A^\mu B_{\mu\sigma}$ ,  $a^i b_{ki}$  y  $a_j F_{j\mu}$  indican sumas con  $\mu = 0, \dots, 3$  y con  $i, j = 1, 2, 3$ .

Se representa *el espacio y tiempo de Newton* por  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ , y se asocian con el espacio  $\mathbb{R}^3$  y el tiempo  $\mathbb{R}$  las distancias inducidas por la métrica euclidiana  $g = \text{diag}(1, 1, 1)$  y por el valor absoluto. Las coordenadas se denotan por  $t \in \mathbb{R}$  y  $\vec{x} = (x^i) = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ . Un punto en dicho espacio se denota por  $(t, \vec{x}) = (t, x^1, x^2, x^3)$ . Por otro lado, *el espacio-tiempo de Einstein* o *espacio de Minkowski* es el par  $(\mathbb{R}^4, \eta)$ , con  $\eta = (\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  la pseudo-métrica de Minkowski. Un punto en este espacio se denota por  $x = (x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ . Aquí  $x^0 = ct$  denota la coordenada temporal de  $x$ , donde  $c$  es una constante conocida como *la velocidad de la luz en el vacío*.<sup>3</sup> Tanto en el espacio y tiempo de Newton como en el espacio-tiempo de Einstein se consideran transformaciones afines que satisfacen condiciones algebraicas; desde el punto de vista de la física, estas corresponden a cambios de coordenadas entre *observadores inerciales*. Estas transformaciones forman los grupos de Galileo y de Poincaré. Para mayores detalles véanse [1] o [5].

## 2. Ecuaciones de Maxwell en forma vectorial

En la forma como las conocemos hoy, las ecuaciones de Maxwell aparecen en [13] y [14]. Al ser parte de la física del Siglo XIX, estas se introdujeron usando coordenadas del espacio y tiempo de Newton.

### 2.1 Ecuaciones de Maxwell con fuentes.

Sean  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}$  el espacio y tiempo de Newton. Retomando la subsección 1.3, se escribe  $\partial_i = \partial/\partial x^i$  y se define *el operador gradiente* en  $\mathbb{R}^3$  como  $\nabla = (\partial_i) = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ . Así,  $\nabla \cdot$  y  $\nabla \times$  denotan *el operador divergencia* y *rotacional* en  $\mathbb{R}^3$ . Si  $\vec{V} = \vec{V}(\vec{x})$  y  $\varphi = \varphi(\vec{x})$  denotan un campo vectorial

<sup>3</sup>Se entiende el vacío como ausencia de materia o de un medio.  $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ . Las primeras estimaciones de  $c$  fueron realizadas en el Siglo XVII por Huygens y Rømer obteniendo un valor cercano a  $2 \times 10^8 \text{ m/s}$ . En los Siglos XVIII y XIX se determinó su valor con mayor precisión alrededor de  $3 \times 10^8 \text{ m/s}$  usando dispositivos ópticos con espejos y un fenómeno conocido como aberración de la luz. Valores de  $c$  con más cifras fueron calculados por Evenson [9] a finales del Siglo XX usando dispositivos de interferometría láser.

y una función  $\mathbb{R}$ -valuada suaves, se tienen las identidades

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}. \quad (3)$$

Aquí  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$  es *el operador laplaciano*; (1), (2) y (3) siguen siendo válidas si  $\varphi$  y  $\vec{V}$  tienen como dominio a  $\mathbb{R}^n$  o algún subconjunto de este.<sup>4</sup> En particular, el caso  $n = 4$  juega un papel fundamental en física, un campo de dicho tipo se abrevia por  $\vec{V} = \vec{V}(t, \vec{x})$  y se llama un *campo vectorial en el espacio dependiente del tiempo*. Es común denotar a este por  $\vec{V} = (V_i) = (V_1, V_2, V_3)$ . Abreviando  $\partial_t = \partial/\partial t$  y usando los operadores anteriores, las ecuaciones de Maxwell en forma vectorial son

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E}. \quad (5)$$

Aquí,  $\vec{E} = \vec{E}(t, \vec{x})$  y  $\vec{B} = \vec{B}(t, \vec{x})$  son *el campo eléctrico y magnético*, y son campos vectoriales definidos en el espacio dependientes del tiempo. Las cantidades físicas  $\varepsilon_0$  y  $\mu_0$  son *la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del vacío*,<sup>5</sup> y  $\rho = \rho(t, \vec{x})$  y  $\vec{j} = \vec{j}(t, \vec{x})$  son *la densidad de carga eléctrica y de corriente eléctrica* y son las *fuentes* de los campos eléctrico y magnético.  $\rho(t, \vec{x})$  y  $\vec{j}(t, \vec{x})$  son una medida de la cantidad de «carga eléctrica por unidad de volumen» y de «carga eléctrica que atraviesa una unidad de área en una unidad de tiempo» en el punto  $(t, \vec{x})$ . Las ecuaciones que involucran las divergencias se llaman *las leyes de Gauss eléctrica y magnética*, y las que involucran los rotacionales se llaman *las leyes de Faraday y de Ampère-Maxwell*.

En algunos sistemas físicos las fuentes son funciones suaves, y así  $\vec{j} = \vec{j}(t, \vec{x})$  es un campo vectorial. No obstante, existen sistemas físicos para los cuales las fuentes no se pueden expresar como funciones.<sup>6</sup> Las leyes de Gauss eléctrica y magnética imponen, respectivamente, la existencia de «cargas eléctricas» y la no existencia de «cargas magnéticas». La ley de Ampère-Maxwell implica que los campos magnéticos son generados, en particular, por el movimiento de cargas eléctricas.

Las ecuaciones (4) y (5) se pueden resolver en una gran diversidad de casos usando resultados y técnicas estándar en cálculo vectorial. En este artículo no nos adentraremos a estudiar estos aspectos. El lector

<sup>4</sup>En muchos casos de interés el campo no está definido en todo  $\mathbb{R}^n$ , sino en un abierto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  de la topología inducida por  $g = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ . Así, el campo sería una función  $\vec{V} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

<sup>5</sup>Las constantes  $\varepsilon_0$  y  $\mu_0$  se conocieron experimentalmente con bastante precisión desde el Siglo XIX. Sus valores son  $\varepsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$  y  $\mu_0 = 1.2566370614 \times 10^{-6} \frac{N}{A^2}$ .

<sup>6</sup>Un par de sistemas elementales son una carga eléctrica de magnitud  $q$  en el origen del espacio  $\mathbb{R}^3$  y una corriente de magnitud  $j$  a lo largo del eje  $x^1$ . Para estos, las fuentes se describen usando la  $\delta$  de Dirac y vienen dadas por  $\rho = q \delta(\vec{x})$  y  $\vec{j} = j \delta(x^2) \delta(x^3) \hat{e}_1$ . Para más detalles véanse [11] o [17].

interesado en estos últimos puede encontrar más detalles en [11] y [17]. Abajo se incluyen algunos sistemas físicos elementales, en los cuales se muestran los campos eléctrico y magnético y sus líneas de campo.

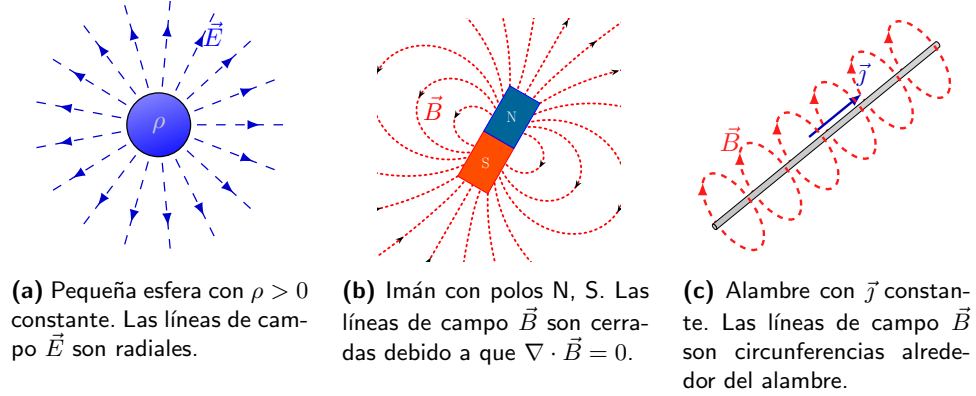


Figura 1

Note que de (4), (5) y la identidad (1) con  $\vec{V} = \vec{B}$  y teniendo en cuenta que  $\partial_t$  y  $\nabla$  conmutan, se sigue que

$$0 = \mu_0 \nabla \cdot \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \nabla \cdot \vec{E} = \mu_0 (\nabla \cdot \vec{j} + \partial_t \rho).$$

Ya que  $\mu_0 \neq 0$ , lo anterior se puede resumir en el siguiente resultado.

**Proposición 2.1.** *En las ecuaciones de Maxwell (4) y (5), las fuentes  $\rho$  y  $\vec{j}$  satisfacen la siguiente ecuación diferencial:*

$$\nabla \cdot \vec{j} + \partial_t \rho = 0. \quad (6)$$

La ecuación (6) vincula a  $\rho$  y  $\vec{j}$ , y es un ejemplo de una ley de conservación, conocida como *la ley de conservación de la carga eléctrica*. A grosso modo, expresa que un cambio de carga eléctrica solo puede explicarse en términos de un movimiento de la misma. Así «la carga eléctrica no se crea ni se destruye, se conserva».

## 2.2 Ecuaciones de Maxwell sin fuentes

Considere las ecuaciones de Maxwell anulando a las fuentes, i.e., con  $\rho = 0$  y  $\vec{j} = 0$ . En este caso (4) y (5) se reducen a

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E}. \quad (8)$$

Usando (7), (8) y (3), con  $\vec{V} = \vec{B}$ , se sigue que

$$-\nabla^2 \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \nabla \times \partial_t \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \nabla \times \vec{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \vec{B}.$$

Repitiendo el cálculo, esta vez con  $\vec{V} = \vec{E}$ , se obtiene que  $\vec{E}$  satisface la misma relación. Lo anterior se puede resumir en la siguiente ecuación

$$(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\partial_t^2)(\vec{E}, \vec{B}) = 0. \quad (9)$$

Así, tanto  $\vec{E}$  como  $\vec{B}$  satisfacen la ecuación de onda con velocidad  $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ . Desde el punto de vista de la matemática, (9) admite como soluciones  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  que se propagan en el espacio  $\mathbb{R}^3$  en forma de ondas con velocidad  $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ , así como la solución trivial  $\vec{E} = 0$  y  $\vec{B} = 0$ . Desde el punto de vista de la física, ya que las fuentes  $\rho$  y  $\vec{j}$  son cero, la única solución «físicamente admisible» debería ser la solución trivial. No obstante, Maxwell notó que se tenía la relación de constantes

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}. \quad (10)$$

En otras palabras, el valor  $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  coincidía —numéricamente y en unidades— con la constante  $c$  asociada a la velocidad de la luz. Más aun, para Maxwell (7) y (8) permitían describir fenómenos de interés en física, en los cuales las fuentes estaban restringidas a una parte del espacio «alejada» de la región en la que se deseaban estudiar las ecuaciones. Basado en lo anterior, y no sin antes hacer una serie de reflexiones sobre las implicaciones de sus ecuaciones, Maxwell descubre la existencia de ondas electromagnéticas y propone que la luz es un fenómeno electromagnético descrito por este tipo de ondas.<sup>7</sup> Por otro lado, las ecuaciones de Maxwell sin fuentes también permiten ejemplificar un concepto importante en física, el cual se describirá brevemente a continuación. Suponga que se consideran unidades tal que  $c = 1$ , dichas unidades se conocen en física y en geometría como *unidades naturales* y *unidades geométricas*.<sup>8</sup> Note que en estas unidades (7) y (8) permanecen invariantes bajo las transformaciones:

$$\vec{E} \longrightarrow \vec{B}, \quad \vec{B} \longrightarrow -\vec{E}. \quad (11)$$

<sup>7</sup>En opinión de Einstein, lo anterior es un acontecimiento de gran relevancia en la historia de la física, y así lo expresa en [8] al referirse a los campos eléctrico y magnético:

The precise formulation of the time-space laws of those fields was the work of Maxwell. Imagine his feelings when the differential equations he had formulated proved to him that electromagnetic fields spread in the form of polarized waves and with the speed of light! At that thrilling moment he surely never guessed that the nature of light, apparently so completely solved, would continue to baffle succeeding generations. Meantime, it took physicists some decades to grasp the full significance of Maxwell's discovery, so bold was the leap that his genius forced upon the conceptions of his fellow-workers.

Un fenómeno físico de este tipo ocurre cuando se observa una estrella, donde  $\rho$  y  $\vec{j}$  toman valores no nulos en una región distante (dentro de la estrella). Estas fuentes producen campos eléctricos y magnéticos que se propagan como ondas en el espacio, y son registrados en forma de luz.

<sup>8</sup>Es común redefinir unidades para que algunas constantes físicas sean números sin unidades. En particular  $c = 1$  si se define la unidad de tiempo *segundo* ( $s$ ) como la distancia  $3 \times 10^8 m$ , lo cual se fundamenta en la constancia de la velocidad de la luz. Para más detalles véanse [16] y [20].

Así  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son en este sentido campos vectoriales «duales». Esta simetría es un ejemplo de un concepto fundamental en física conocido como *dualidad*. El hecho de que (7) y (8) sean invariantes bajo (11) se conoce como *la dualidad electromagnética*. En términos generales, las dualidades entre campos representan indicios de que ambos no son conceptos separados, sino manifestaciones de un único campo general. Lo anterior se puede resumir de forma sucinta en el siguiente resultado.

**Proposición 2.2.** *Defina  $\vec{\mathcal{E}} = \vec{E} + i\vec{B}$ , con  $i = \sqrt{-1}$  y  $c = 1$ . Entonces (11) queda descrita por  $\vec{\mathcal{E}} \rightarrow -i\vec{\mathcal{E}}$ . Adicionalmente, (7) y (8) quedan*

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0, \quad \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = i\partial_t \vec{\mathcal{E}}. \quad (12)$$

*Demostración.* La transformación compleja y la primera ecuación en (12) son inmediatas. Usando las ecuaciones restantes, y teniendo en cuenta que en unidades naturales (10) implica que  $\varepsilon_0\mu_0 = 1$ , se obtiene

$$\nabla \times \vec{E} + i\nabla \times \vec{B} = -\partial_t \vec{B} + i\partial_t \vec{E} = i\partial_t (\vec{E} + i\vec{B}). \quad \square$$

Así, el introducir un campo vectorial complejo permite reducir (11), (7) y (8) a una transformación y a un conjunto de dos ecuaciones.<sup>9</sup>

### 2.3 Ecuaciones de Maxwell en términos de potenciales

Las ecuaciones de Maxwell (4) y (5) pueden resolverse en términos de funciones conocidas como *potenciales*. Específicamente, suponga la existencia de funciones suaves  $\varphi = \varphi(t, \vec{x})$  y  $\vec{\mathcal{A}} = \vec{\mathcal{A}}(t, \vec{x})$  tal que

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \partial_t \vec{\mathcal{A}}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}. \quad (13)$$

Las funciones  $\varphi$  y  $\vec{\mathcal{A}}$  son llamadas *el potencial eléctrico y magnético*. También son conocidas como *el potencial escalar y vectorial*. Note que de (13), y usando (1) y (2), se sigue de inmediato que dos de las ecuaciones en (4) y (5) se satisfacen —propriadamente, las leyes de Gauss magnética y de Faraday— y usando la identidad (3) se muestra fácilmente que las dos ecuaciones de Maxwell restantes se escriben como

$$\nabla^2 \varphi + \partial_t \nabla \cdot \vec{\mathcal{A}} = -\rho/\varepsilon_0, \quad (14)$$

$$(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\partial_t^2)\vec{\mathcal{A}} - \nabla(\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}} + \varepsilon_0\mu_0\partial_t\varphi) = -\mu_0\vec{j}. \quad (15)$$

Note que la última ecuación es vectorial; así, las últimas dos ecuaciones representan un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales parciales con igual número de variables. Como consecuencia, se sigue que para solucionar (4) y (5) es suficiente con solucionar (14) y (15) para  $\varphi$  y  $\vec{\mathcal{A}}$ ,

<sup>9</sup>Esto ejemplifica como el cálculo complejo resulta de interés en física. Lo anterior es una característica común, no solo en electromagnetismo, sino también en la teoría de Yang-Mills y la teoría de cuerdas. No ahondaremos más aquí sobre estos aspectos importantes en física, para mayores detalles sobre dualidad y el uso del cálculo complejo en física el lector puede ver [3] y [18].

y definir entonces a  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  mediante (13). Las ecuaciones (14) y (15), junto con (13), se conocen como *las ecuaciones de Maxwell en términos de potenciales*. En este punto, resulta de la mayor importancia notar que (13) da expresiones para  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en términos de derivadas, y por consiguiente dichos campos no están en correspondencia biunívoca con los potenciales  $\varphi$  y  $\vec{\mathcal{A}}$ . En efecto, considere las transformaciones

$$\varphi \longrightarrow \varphi' = \varphi - \partial_t \lambda, \quad \vec{\mathcal{A}} \longrightarrow \vec{\mathcal{A}}' = \vec{\mathcal{A}} + \nabla \lambda, \quad (16)$$

con  $\lambda = \lambda(t, \vec{x})$  una función suave y suponga que  $\varphi, \vec{\mathcal{A}}$  y  $\varphi', \vec{\mathcal{A}}'$  definen, mediante (13), campos  $\vec{E}, \vec{B}$  y  $\vec{E}', \vec{B}'$ . Entonces de (16) se sigue que

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= -\nabla \varphi' + \nabla \partial_t \lambda - \partial_t \vec{\mathcal{A}}' - \partial_t \nabla \lambda = \vec{E}, \\ \vec{B}' &= \nabla \times \vec{\mathcal{A}}' + \nabla \times (\nabla \lambda) = \vec{B}. \end{aligned}$$

Adicionalmente, (14) y (15) son invariantes bajo (16), de lo cual se obtiene el siguiente resultado.

**Proposición 2.3.** *Si  $\varphi, \vec{\mathcal{A}}$  son soluciones a (14) y (15), entonces  $\varphi', \vec{\mathcal{A}}'$  definidos por (16) también lo son.*

El hecho de que  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  sean invariantes bajo (16) es fundamental en física; significa que existe una «libertad» en la elección de los potenciales. De manera más precisa, suponga que  $\varphi, \vec{\mathcal{A}}$  son soluciones a (14) y (15), entonces usando (13) estos potenciales determinan campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ . Ahora, debido a la invariancia de (13) bajo (16), cualquier función suave  $\lambda$  define nuevos  $\varphi', \vec{\mathcal{A}}'$  que determinan los mismos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , i.e., existen a priori un número infinito de potenciales que determinan los mismos campos eléctrico y magnético. Esta libertad de elección en los potenciales se llama *invariancia gauge* y las transformaciones (16) se denominan *transformaciones gauge*. Se suele decir en la literatura que el electromagnetismo es una *teoría gauge*.<sup>10</sup>

La libertad de escoger los potenciales puede describirse de la siguiente manera. Note que (16) define una *relación de equivalencia* entre pares de potenciales; propiamente,  $(\varphi, \vec{\mathcal{A}}) \sim (\varphi', \vec{\mathcal{A}}')$  si estos pares están vinculados por una transformación gauge (16) para alguna función suave  $\lambda$ . Se deja como ejercicio al lector verificar que la relación  $\sim$  es reflexiva, simétrica y transitiva, i.e., define una relación de equivalencia.<sup>11</sup>

<sup>10</sup>Las teorías gauge han jugado un papel crucial en la física del Siglo XX. La historia de estas teorías en matemáticas se remonta a los años 70's, cuando Atiyah descubre que las mismas tienen incluso importancia en geometría y topología. En particular, la teoría de Yang-Mills es otro ejemplo de teoría gauge. Para mayores detalles sobre estas nociones el lector puede consultar [2], [6] y [20].

<sup>11</sup>La relación  $\sim$  permite agrupar este número infinito de potenciales equivalentes en un único objeto matemático: una *clase de equivalencia*. Definir clases de equivalencia es un procedimiento adoptado en teorías gauge, los espacios definidos por dichas clases son *espacios moduli* y su estudio ha sido objeto de mucho interés en física y en geometría, véase [2] para mayores detalles.



### 3. Ecuaciones de Maxwell en forma tensorial

Considere ahora el espacio-tiempo de Einstein  $(\mathbb{R}^4, \eta)$  con las coordenadas de la subsección 1.3. Adicionalmente a  $\partial_i$ , defina el operador  $\partial_0 := \partial/\partial x^0 = \frac{1}{c}\partial_t$ . Usando estos operadores las ecuaciones (4) y (5) que involucran rotacionales se escriben como:

$$\nabla \times \vec{E}/c + \partial_0 \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} - \partial_0 \vec{E}/c = \mu_0 \vec{j}, \quad (17)$$

y así la leyes de Faraday y de Ampère-Maxwell quedan escritas en términos de  $c$  y  $\mu_0$ , y la dependencia de  $\varepsilon_0$  queda implícita por la relación fundamental (10). Por otro lado, note que el operador en (9) se puede escribir como  $\nabla^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \square^2$ , donde  $\eta^{\mu\nu}$  denotan las componentes de la matriz inversa de  $\eta$ . Así  $\eta^{-1} = (\eta^{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . Tanto en relatividad como en geometría pseudo-riemanniana, el operador  $\square^2$  es usualmente llamado *el d'alembertiano* y es considerado como el análogo para el espacio-tiempo  $(\mathbb{R}^4, \eta)$  de lo que es el laplaciano  $\nabla^2$  para el espacio  $(\mathbb{R}^3, g)$ . Note que usando  $\square^2$ , la ecuación (9) queda reducida a  $\square^2(\vec{E}, \vec{B}) = 0$ . Lo anterior permite intuir que la introducción de coordenadas de espacio-tiempo trae consigo una simplificación en el electromagnetismo, como se verá a continuación.

Considere los campos eléctrico y magnético  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  y la fuente  $\vec{j}$  tal y como fueron introducidos en la sección 2 y denote por  $E_i$ ,  $B_i$  y  $j_i$  —con  $i = 1, 2, 3$ — a sus componentes. Los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  se pueden colocar en forma de la matriz antisimétrica  $4 \times 4$  siguiente:

$$F = (F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ -E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Esta matriz se conoce como *el tensor electromagnético*. Note que

$$F_{0i} = -F_{i0} = E_i/c, \quad F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k. \quad (19)$$

En geometría pseudo-riemanniana, al igual que en física, se usan las componentes  $\eta^{\mu\nu}$  y  $\eta_{\mu\nu}$  para «subir y bajar» índices, e.g., se definen

$$x_\nu = \eta_{\mu\nu} x^\mu, \quad F^{\rho\sigma} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} F_{\mu\nu}. \quad (20)$$

Se ve de inmediato de (20) que  $x_0 = -x^0$ ,  $x_i = x^i$  y que

$$F^{i0} = -F_{i0}, \quad F^{0i} = -F_{0i}, \quad F^{ij} = F_{ij}. \quad (21)$$

Usando  $F$ , las ecuaciones de Maxwell se resumen en dos ecuaciones tensoriales. Este hecho queda descrito en el siguiente resultado.

**Proposición 3.1.** *En términos del tensor electromagnético  $F$  definido en (18), las ecuaciones de Maxwell (4) y (5) son*

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0, \quad (22)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu, \quad (23)$$

donde  $J = J^\nu = (J^0, J^i)$  con  $J^0 = c\rho$  y  $J^i = j_i$ . Adicionalmente, la ley de conservación de la carga eléctrica (6) se puede escribir como:

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (24)$$

Note que en (23) el índice  $\nu$  está fijo y solo se suma sobre  $\mu$ .

*Demostración.* La verificación de (24) es inmediata. Si al menos dos de los índices  $\mu, \nu$  y  $\rho$  toman el mismo valor, (22) se sigue de la antisimetría de  $F$ , e.g., si  $\mu = 0, \nu = 0$  y  $\rho = i$  se obtiene

$$\partial_0 F_{0i} + \partial_0 F_{i0} + \partial_i F_{00} = 0.$$

Así, en lo que respecta a la verificación de (22), basta considerar los casos en los que  $\mu, \nu$  y  $\rho$  son todos índices distintos. Suponga inicialmente que  $\mu = 1, \nu = 2$  y  $\rho = 3$ , entonces

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = -\partial_1 B_1 - \partial_2 B_2 - \partial_3 B_3 = -\nabla \cdot \vec{B}.$$

Si ahora los índices  $\mu, \nu$  y  $\rho$  corresponden a cualquier permutación de (123), se verifica fácilmente que el lado izquierdo de (22) es de nuevo  $\pm \nabla \cdot \vec{B}$ . Si por otro lado se toman  $\mu = 0, \nu = 2$  y  $\rho = 3$  se sigue

$$\partial_0 F_{23} + \partial_2 F_{30} + \partial_3 F_{02} = -\partial_0 B_1 - (\nabla \times \vec{E})_1 / c.$$

Si  $\mu, \nu$  y  $\rho$  corresponden a cualquier permutación de (023), el lado izquierdo de (22) es otra vez —salvo por un posible signo menos— el término de la última igualdad. Siguiendo un proceso similar al anterior, en esta ocasión con los índices  $\mu, \nu$  y  $\rho$  tomando los valores (013) y (012) (o cualquier permutación de los mismos) se obtiene, salvo por un signo, la segunda y tercera componente del operador diferencial de la Ley de Faraday en (17). Así, usando la ley de Gauss magnética y la ley de Faraday se obtiene (22). En lo que respecta a la verificación de (23), note que si  $\nu = 0$  se sigue

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = -\partial_i F_{i0} = \nabla \cdot \vec{E} / c = \rho / c\epsilon_0 = \mu_0 J^0,$$

donde se han usado (21), (19), la ley de Gauss eléctrica y la relación fundamental (10). Si ahora  $\nu = 1$  se sigue

$$\partial_\mu F^{\mu 1} = (\nabla \times \vec{B})_1 - \partial_0 E_1 / c,$$

y de forma análoga, con  $\nu = 2, 3$  el lado izquierdo de (23) es respectivamente la segunda y tercera componente del operador diferencial de la ley de Ampère-Maxwell en (17). Así, la ley de Ampère-Maxwell y la ley de Gauss eléctrica vienen descritas por (23).  $\square$

Finalmente, considere  $\varphi$  y  $\vec{\mathcal{A}}$  como en (13) y defina

$$A = (A^\mu) = -(\varphi/c, \vec{\mathcal{A}}). \quad (25)$$

Así,  $A_0 = -A^0 = \varphi/c$  y  $A_i = A^i = -\mathcal{A}_i$ . En física,  $A$  es el análogo del potencial en el espacio-tiempo de Einstein de los potenciales  $\varphi$  y  $\vec{\mathcal{A}}$ , definidos usando coordenadas del espacio y tiempo de Newton. Note que usando este potencial, (16) quedaría resumida a:

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda. \quad (26)$$

De la anterior definición de  $A$  se obtiene el siguiente resultado.

**Proposición 3.2.** *Las componentes del tensor electromagnético  $F$  y del potencial  $A$ , definidas en (18) y (25), se relacionan por:*

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (27)$$

*Demostración.* Se sigue de (13) y las definiciones (18) y (25).  $\square$

Como se mostró en la subsección 2.3,  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son invariantes bajo (16). El resultado análogo usando coordenadas del espacio-tiempo es que  $F$  es invariante bajo (26), lo cual se sigue de (27) ya que  $\partial_\mu \partial_\nu \lambda = \partial_\nu \partial_\mu \lambda$ .

El hecho de que las ecuaciones de Maxwell se puedan escribir en las coordenadas del espacio-tiempo de Einstein, como en la proposición 3.1, hace parte de una característica fundamental del electromagnetismo. Propiamente, dicha teoría «es relativista».

Como se discutió en la subsección 2.3, el uso de potenciales genera soluciones de dos de las ecuaciones de Maxwell, propiamente, la leyes de Gauss magnética y de Faraday quedan resueltas de manera formal. Lo anterior es compatible con la forma de ver las ecuaciones en esta sección. En efecto, se verifica directamente que (27) genera una solución de (22), la cual —como se evidenció en la demostración de la proposición 3.1— representa a las leyes de Gauss magnética y de Faraday. De lo anterior, se sigue que una vez considerada (27), solo resta solucionar (23).

## 4. El operador de Hodge

En el principio de este artículo se mencionó *el operador \* de Hodge*.<sup>12</sup> El lector familiarizado con la geometría diferencial puede encontrar una introducción al operador  $*$  y al electromagnetismo en [12] y [19].

Denote por  $\Omega^p(\mathbb{R}^4)$  —con  $p = 0, \dots, 4$ — el espacio de  $p$ -formas diferenciales definidas en  $(\mathbb{R}^4, \eta)$ . De esta manera  $\Omega^0(\mathbb{R}^4) = C^\infty(\mathbb{R}^4)$  es *el*

<sup>12</sup>El operador  $*$  se define como un operador lineal en el álgebra exterior de cualquier espacio vectorial orientado de dimensión finita, siempre que el mismo esté dotado de una forma bilineal simétrica no degenerada. Así,  $*$  es de carácter algebraico y su uso en geometría diferencial viene como consecuencia de aplicarlo al álgebra exterior de formas diferenciales.

*anillo de funciones diferenciables*  $\mathbb{R}$ -valuadas definidas en  $\mathbb{R}^4$  y  $\Omega^1(\mathbb{R}^4)$  es el espacio generado por los elementos de la forma  $H = H_\mu dx^\mu$ , en donde cada  $H_\mu = H_\mu(x)$  es un elemento de  $C^\infty(\mathbb{R}^4)$  y cada  $dx^\mu$  puede considerarse —para los propósitos del artículo— como un «diferencial» del cálculo. Para  $p = 1, \dots, 4$  cada  $p$ -forma puede escribirse como

$$H = \frac{1}{p!} H_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \quad (28)$$

en donde cada  $H_{\mu_1 \dots \mu_p} = H_{\mu_1 \dots \mu_p}(x)$  es un elemento de  $C^\infty(\mathbb{R}^4)$  y las funciones  $H_{\mu_1 \dots \mu_p}$  se consideran completamente antisimétricas bajo una permutación de los índices. Así, siendo rigurosos y usando terminología de la geometría diferencial, cada  $\Omega^p(\mathbb{R}^4)$  —con  $p = 0, \dots, 4$ — es un *módulo sobre el anillo*  $C^\infty(\mathbb{R}^4)$ . Ahora, suponga que se evalúa (28) en un punto de  $\mathbb{R}^4$ , entonces  $\Omega^p(\mathbb{R}^4)$  restringido a este punto es un espacio vectorial real con  $\{dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}\}_{\mu_1 < \dots < \mu_p}$  una base del espacio de  $p$ -formas. Usando argumentos estándar en álgebra lineal, se obtiene que la dimensión de estos espacios vectoriales es  $4!/p!(4-p)!$  (ver [10] para mayores detalles). En lo que sigue consideramos que las  $p$ -formas están evaluadas en puntos de  $\mathbb{R}^4$ . Así  $\{1\}$ ,  $\{dx^\mu\}$ ,  $\{dx^\mu \wedge dx^\nu\}_{\mu < \nu}$ ,  $\{dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho\}_{\mu < \nu < \rho}$  y  $\{dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\}$  son bases de  $\Omega^p(\mathbb{R}^4)$  con  $p = 0, \dots, 4$ , respectivamente. Ahora bien, existe un operador de derivación que relaciona estos espacios, este es *la derivada exterior*

$$d : \Omega^p(\mathbb{R}^4) \longrightarrow \Omega^{p+1}(\mathbb{R}^4). \quad (29)$$

Para cada  $f$  en  $C^\infty(\mathbb{R}^4)$  y  $H$  en  $\Omega^p(\mathbb{R}^4)$ ,  $d$  satisface *la regla de Leibniz*

$$d(fH) = df \wedge H + f dH.$$

Note que (29) es válida para  $0 \leq p \leq 4$ , ya que  $\Omega^5(\mathbb{R}^4) = 0$  y en tal caso  $d \equiv 0$ . Cada  $dx^\mu$  puede definirse como la derivada exterior de *la función coordenada*  $x^\mu$ ; esta es la forma en que se definen los objetos diferenciales que se consideran en el cálculo.<sup>13</sup> Si  $H$  es la  $p$ -forma (28) su derivada exterior es la  $(p+1)$ -forma

$$dH = \frac{1}{p!} \partial_\rho H_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^\rho \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (30)$$

Aplicando nuevamente la derivada exterior se obtiene

$$d^2 H = \frac{1}{p!} \partial_\sigma \partial_\rho H_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^\sigma \wedge dx^\rho \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} = 0, \quad (31)$$

donde la última igualdad se sigue de la simetría del operador  $\partial_\sigma \partial_\rho$  y la antisimetría de la forma  $dx^\sigma \wedge dx^\rho$ . Así  $d^2 \equiv 0$ , esta propiedad de  $d$  y (30)

<sup>13</sup>El conjunto de campos vectoriales suaves definidos en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^4$ , denotado por  $\mathfrak{X}(U)$ , es un módulo sobre el anillo de funciones suaves  $C^\infty(U)$  y el espacio  $\Omega^1(U)$  es el módulo dual de  $\mathfrak{X}(U)$ . Considerando la derivada exterior  $d : C^\infty(U) \longrightarrow \Omega^1(U)$ , y ya que cada función coordenada  $x^\mu$  es un elemento en  $C^\infty(U)$ , se puede definir a  $dx^\mu$  como la imagen de  $x^\mu$  bajo dicho operador. El lector interesado en estas definiciones puede consultar mayores detalles en [16].

serán utilizadas más adelante. La pseudo-métrica  $\eta$  induce productos internos  $\eta_p : \Omega^p(\mathbb{R}^4) \times \Omega^p(\mathbb{R}^4) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^4)$  en cada espacio  $\Omega^p(\mathbb{R}^4)$ . Si  $p = 0$ , se define  $\eta_0$  como el producto de funciones. Si  $p = 1$ , se define  $\eta_1$  como la forma  $C^\infty$ -bilineal tal que  $\eta_1(dx^\mu, dx^\nu) = \eta^{\mu\nu}$ . Para  $p = 2$ , sean  $A = dx^\mu \wedge dx^\nu$  y  $B = dx^\rho \wedge dx^\sigma$  en  $\Omega^2(\mathbb{R}^4)$ , entonces se define  $\eta_2$  como la forma  $C^\infty$ -bilineal tal que  $\eta_2(A, B) = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}$ . La expresión anterior es el determinante de una matriz  $2 \times 2$ . En efecto, si  $A = dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2}$  y  $B = dx^{\nu_1} \wedge dx^{\nu_2}$ ,  $\eta_2$  se reescribe como

$$\eta_2(A, B) = \eta^{\mu_1\nu_1}\eta^{\mu_2\nu_2} - \eta^{\mu_1\nu_2}\eta^{\mu_2\nu_1} = \det(\eta^{\mu_i\nu_j}). \quad (32)$$

Es relevante mencionar que son los índices latinos  $i, j$  (y no los griegos) los que especifican las entradas de la matriz a la cual se le está tomando el determinante, i.e., la entrada  $i, j$  de dicha matriz es  $\eta^{\mu_i\nu_j}$ . En este punto, es claro que se puede hacer uso de la última notación para introducir una fórmula general para  $\eta_p$  con  $p = 1, \dots, 4$ . Si

$$A = dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \quad B = dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_p}, \quad (33)$$

son dos elementos en la base de  $\Omega^p(\mathbb{R}^4)$ , entonces  $\eta_p$  es la forma  $C^\infty$ -bilineal definida por

$$\eta_p(A, B) = \det(\eta^{\mu_i\nu_j}), \quad (34)$$

donde el lado derecho es el determinante de una matriz  $p \times p$ . Por otro lado, la delta de Kronecker generalizada y el símbolo de Levi-Civita son

$$\delta_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \nu_p} = \begin{cases} 1 & \text{si } (\mu_1 \dots \mu_p) \text{ es permutación par de } (\nu_1 \dots \nu_p), \\ -1 & \text{si } (\mu_1 \dots \mu_p) \text{ es permutación impar de } (\nu_1 \dots \nu_p), \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (35)$$

$$\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_4} = \begin{cases} 1 & \text{si } (\mu_1 \dots \mu_4) \text{ es permutación par de } (0123), \\ -1 & \text{si } (\mu_1 \dots \mu_4) \text{ es permutación impar de } (0123), \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (36)$$

Note que si  $p = 1$ ,  $\delta_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \nu_p}$  es la delta de Kronecker usual  $\delta_\nu^\mu$ . Si  $p = 2$ , la delta de Kronecker generalizada sirve para expresar el determinante en (32) como  $\eta_2(A, B) = \eta^{\mu_1\nu'_1}\eta^{\mu_2\nu'_2}\delta_{\nu'_1\nu'_2}^{\nu_1\nu_2}$ . Más aun, la expresión anterior se puede generalizar a los casos  $p = 3, 4$ ; esto es, si  $A$  y  $B$  son las  $p$ -formas definidas en (33), se puede reescribir (34) en la forma siguiente

$$\eta_p(A, B) = \eta^{\mu_1\nu'_1} \dots \eta^{\mu_p\nu'_p} \delta_{\nu'_1 \dots \nu'_p}^{\nu_1 \dots \nu_p}. \quad (37)$$

Por otro lado, ya que  $\eta$  es una pseudo-métrica, resulta conveniente definir otra cantidad conocida como *el símbolo mixto de Levi-Civita*, la cual se define en términos de (36) de la siguiente manera

$$\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\mu_{p+1} \dots \mu_4} = \eta^{\mu_1\mu'_1} \dots \eta^{\mu_p\mu'_p} \varepsilon_{\mu'_1 \dots \mu'_p \mu_{p+1} \dots \mu_4}. \quad (38)$$

El símbolo de Levi-Civita (36) se relaciona con la delta de Kronecker (35) mediante  $\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_4} = \delta_{\mu_1 \dots \mu_4}^{0123}$ . Ahora, tomando  $p = 4$  en (38), y

teniendo en cuenta que  $\eta^{\mu\nu}$  define una matriz diagonal con  $\eta^{00} = -1$  y  $\eta^{jj} = 1$ , se sigue de (36) que

$$\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_4} = \begin{cases} -1 & \text{si } (\mu_1 \dots \mu_4) \text{ es permutación par de } (0123), \\ 1 & \text{si } (\mu_1 \dots \mu_4) \text{ es permutación impar de } (0123), \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (39)$$

Es importante notar el signo relativo entre (36) y (39), el cual aparece como consecuencia de que  $\eta^{00} = -1$ . En física se suele abreviar por  $d^4x$  a la 4-forma  $dx^0 \wedge \dots \wedge dx^3$ , la cual es conocida como *la forma de volumen* de  $(\mathbb{R}^4, \eta)$ . Usando esta abreviación y la definición de los símbolos de Levi-Civita se obtiene la identidad

$$dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_4} = \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_4} d^4x = -\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_4} d^4x. \quad (40)$$

Note que la 4-forma anterior no se anula si y solo si  $\mu_i \neq \mu_j$  para cada par de índices. Ya que  $(\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_4})^2 = 1$ , se sigue de (40) que

$$d^4x = dx^0 \wedge \dots \wedge dx^3 = \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_4} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_4}.$$

Los símbolos de Levi-Civita con subíndices, superíndices y mixtos tienen propiedades que resultan especialmente útiles en algunos desarrollos. En particular, se tienen las siguientes identidades (la comprobación de las mismas se deja como ejercicio al lector).

$$\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_p \mu_{p+1} \dots \mu_4} \varepsilon^{\nu_1 \dots \nu_p \mu_{p+1} \dots \mu_4} = -(4-p)! \delta_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \nu_p}, \quad (41)$$

$$\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_p} \varepsilon_{\mu_{p+1} \dots \mu_4} \varepsilon^{\mu_{p+1} \dots \mu_4} \varepsilon_{\nu_1 \dots \nu_p} = -(4-p)! (-1)^{p(4-p)} \delta_{\nu_1 \dots \nu_p}^{\mu_1 \dots \mu_p}. \quad (42)$$

El operador *\* de Hodge* definido en  $(\mathbb{R}^4, \eta)$  es el operador  $C^\infty$ -lineal  $* : \Omega^p(\mathbb{R}^4) \longrightarrow \Omega^{4-p}(\mathbb{R}^4)$ , tal que con  $p = 0$  se tiene

$$*1 = d^4x, \quad (43)$$

y para  $p = 1, \dots, 4$  se tiene, con cada forma  $B = dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_p}$ , una forma  $*B \in \Omega^{4-p}(\mathbb{R}^4)$  determinada por la condición

$$A \wedge *B = \eta_p(A, B) d^4x, \quad (44)$$

para cada  $A$  en la base de  $\Omega^p(\mathbb{R}^4)$  y donde  $\eta_p(A, B)$  viene dada por (34). A la  $(4-p)$ -forma  $*B$  se le conoce como *la forma dual de Hodge* de la  $p$ -forma  $B$ .

Note que si  $B = d^4x \in \Omega^4(\mathbb{R}^4)$ , entonces (44) da una igualdad no trivial solo si  $A = dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_4}$  con  $\mu_i \neq \mu_j$ . Así,  $(\mu_1 \dots \mu_4)$  es necesariamente una permutación de (0123) y por lo tanto de (40) se tiene que  $A = \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_4} d^4x$ . Reemplazando esto último en (44), y usando la  $C^\infty$ -bilinealidad de  $\eta_p$ , se obtiene que

$$d^4x \wedge *d^4x = \det(\eta^{\mu\nu}) d^4x = -d^4x.$$

Al ser  $*d^4x$  una 0-forma se sigue que

$$*d^4x = -1. \quad (45)$$

El signo menos es una consecuencia de la pseudo-métrica usada.<sup>14</sup>

**Lema 4.1.** *El operador  $*$  de Hodge satisface la siguiente identidad:*

$$*(dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_p}) = \frac{1}{(4-p)!} \varepsilon^{\nu_1 \dots \nu_p}_{\nu_{p+1} \dots \nu_4} dx^{\nu_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_4}. \quad (46)$$

*Demostración.* Sea  $A = dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$  y  $\tilde{B}$  la  $(4-p)$ -forma definida por el lado derecho de (46). De la definición del símbolo de Levi-Civita mixto (38), y usando las identidades (40) y (41), se sigue que

$$\begin{aligned} A \wedge \tilde{B} &= \frac{1}{(4-p)!} \varepsilon^{\nu_1 \dots \nu_p}_{\nu_{p+1} \dots \nu_4} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \wedge dx^{\nu_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_4} \\ &= \frac{-1}{(4-p)!} \eta^{\nu_1 \nu'_1} \cdots \eta^{\nu_p \nu'_p} \varepsilon_{\nu'_1 \dots \nu'_p \nu_{p+1} \dots \nu_4} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_{p+1} \dots \nu_4} d^4x \\ &= \eta^{\mu_1 \nu'_1} \cdots \eta^{\mu_p \nu'_p} \delta_{\nu'_1 \dots \nu'_p}^{\nu_1 \dots \nu_p} d^4x = \eta_p(A, B) d^4x. \end{aligned}$$

Para obtener la penúltima igualdad se usó el hecho de que en dicha suma cada sumando es simétrico bajo el intercambio de  $(\mu_1 \dots \mu_p)$  y  $(\nu_1 \dots \nu_p)$ , lo cual es una consecuencia directa de la simetría de  $\eta$  y de la definición de la delta de Kronecker generalizada. Adicionalmente, en la última igualdad se usó (37) con  $B = dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_p}$ . El desarrollo anterior y (44) implican que  $A \wedge (\tilde{B} - *B) = 0$ . Ya que  $A$  puede ser cualquier elemento en la base de  $\Omega^p(\mathbb{R}^4)$ , se sigue que  $\tilde{B} = *B$ .  $\square$

Es importante mencionar que (46) es usada como parte de la definición del operador  $*$  de Hodge (ver por ejemplo [6]). Se puede definir a  $*$  como el operador  $C^\infty$ -lineal  $* : \Omega^p(\mathbb{R}^4) \rightarrow \Omega^{4-p}(\mathbb{R}^4)$  tal que  $*1 = d^4x$  para  $p = 0$  y que satisface (46) para  $p = 1, \dots, 4$ . Note que la prueba del lema anterior muestra que (44) y (46) son equivalentes.

**Proposición 4.2.** *El operador  $*$  de Hodge satisface la identidad*

$$*^2 A = -(-1)^{p(4-p)} A, \quad \forall A \in \Omega^p(\mathbb{R}^4). \quad (47)$$

*Demostración.* Ya que  $*$  es  $C^\infty$ -lineal, es suficiente probar (47) para los elementos de la base de  $\Omega^p(\mathbb{R}^4)$ . Note que de (43) y (45) se concluye

$$*^2 1 = -1, \quad *^2(d^4x) = -d^4x.$$

<sup>14</sup>En efecto, si en lugar de  $\eta$  se tuviese la métrica euclidiana  $g$  en  $\mathbb{R}^4$ , se obtendría que  $*d^4x = 1$ , la propiedad análoga del operador  $*$  de Hodge para la variedad riemanniana  $(\mathbb{R}^4, g)$ .

Así, basta mostrar la identidad con  $p = 1, 2, 3$ . Sea  $A = dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$  tal que  $p = 1, 2, 3$ . Usando (46), (42) y la definición (35) se obtiene

$$\begin{aligned} *^2 A &= * \frac{1}{(4-p)!} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\mu_{p+1} \dots \mu_4} dx^{\mu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_4} \\ &= \frac{1}{p!(4-p)!} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\mu_{p+1} \dots \mu_4} \varepsilon^{\mu_{p+1} \dots \mu_4}{}_{\nu_1 \dots \nu_p} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_p} \\ &= \frac{-(-1)^{p(4-p)}}{p!} \delta^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_p} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_p} = -(-1)^{p(4-p)} A. \quad \square \end{aligned}$$

La proposición anterior implica que  $*^2 = \pm I$ , con el signo  $+$  en los casos  $p = 1, 3$  y el signo  $-$  en los casos  $p = 0, 2, 4$ , de tal forma que  $*$  es una biyección. Además, por ser  $*$  un operador  $C^\infty$ -lineal se concluye que es un isomorfismo entre  $\Omega^p(\mathbb{R}^4)$  y  $\Omega^{4-p}(\mathbb{R}^4)$ . Finalmente, como consecuencia de la proposición 4.2, se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 4.3.** *Los productos internos  $\eta_p$  y  $\eta_{4-p}$  satisfacen*

$$\eta_{4-p}(*A, *B) = -\eta_p(A, B), \quad \forall A, B \in \Omega^p(\mathbb{R}^4).$$

*Demostración.* De (44) y (47) se sigue que

$$\eta_{4-p}(*A, *B) d^4x = -(-1)^{p(4-p)} *A \wedge B = -B \wedge *A = -\eta_p(A, B) d^4x. \quad \square$$

El corolario 4.3 relaciona los productos internos en  $\Omega^p(\mathbb{R}^4)$  y  $\Omega^{4-p}(\mathbb{R}^4)$ . En particular, implica que los productos internos de  $p$ -formas y sus formas duales de Hodge se «preservan» salvo por un signo.<sup>15</sup>

## 5. Ecuaciones de Maxwell en términos de formas

Mediante la asociación de formas diferenciales a las cantidades que aparecen en la electrodinámica, la sección 3 puede reescribirse de manera natural. En efecto, sean  $J = (J^\nu)$  y  $F = (F_{\mu\nu})$  como fueron definidos en la sección 3. Si a dichas cantidades se les asocian formas diferenciales adecuadas, las ecuaciones de Maxwell pueden resumirse en términos de  $d$  y  $*$ , las formas  $F$  y  $J$ , o sus formas duales de Hodge. Siguiendo la notación de [4], defina  $J_\mu = \eta_{\mu\nu} J^\nu$  y las formas diferenciales

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad J = J_\mu dx^\mu, \quad (48)$$

$$\tilde{J} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} J^i dx^j \wedge dx^k, \quad \mathcal{J} = c\rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \tilde{J} \wedge dx^0. \quad (49)$$

<sup>15</sup>Esta propiedad es el análogo en  $(\mathbb{R}^4, \eta)$  de un resultado conocido para la variedad riemanniana  $(\mathbb{R}^4, g)$ ; en este último caso,  $*$  relacionaría a  $g_p$  y  $g_{4-p}$  y no existiría el signo menos.



**Lema 5.1.** *La forma dual de Hodge de la 1-forma de corriente  $J$  definida en (48) es la 3-forma  $\mathcal{J}$  definida en (49), esto es,  $*J = \mathcal{J}$ .*

*Demostración.* De (46), (36) y (38) y ya que  $J_0 = -J^0 = -c\rho$ , se sigue

$$\begin{aligned} *J &= -\frac{J_0}{3!}\varepsilon_{0\nu\rho\sigma} dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma + \frac{1}{3!}\varepsilon_{i\nu\rho\sigma} J^i dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \\ &= c\rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - dx^0 \wedge \tilde{J} = \mathcal{J}. \end{aligned} \quad \square$$

**Teorema 5.2.** *Las ecuaciones de Maxwell (22) y (23) en términos de formas diferenciales y el operador de Hodge son:*

$$dF = 0, \quad d*F = -\mu_0\mathcal{J}. \quad (50)$$

Además, la ley de conservación de la carga eléctrica (24) es  $d\mathcal{J} = 0$ .

*Demostración.* Considere la 2-forma  $F$  definida en (48). Usando (30) con  $H = F$  y realizando un cálculo elemental, se sigue que

$$dF = \frac{1}{6}(\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu}) dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

Así, (22) es la primera ecuación en (50). Para verificar la otra ecuación debemos calcular  $d*F$ . Note que de (46) y (38) se sigue que

$$\begin{aligned} *F &= \frac{1}{2(4-2)!} F_{\mu\nu} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} dx^\rho \wedge dx^\sigma \\ &= \frac{1}{4} \left( \eta^{\mu\mu'} \eta^{\nu\nu'} F_{\mu\nu} \right) \varepsilon_{\mu'\nu'\rho\sigma} dx^\rho \wedge dx^\sigma = \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} dx^\rho \wedge dx^\sigma. \end{aligned}$$

Ahora, usando la fórmula (30) con  $H = *F$ , se obtiene

$$d*F = \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\tau F^{\mu\nu} dx^\tau \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma. \quad (51)$$

Debido a la presencia de  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ , los índices  $\mu, \nu, \rho, \sigma$  deben ser distintos. Adicionalmente,  $\tau$  debe ser distinto de  $\rho$  y  $\sigma$  (caso contrario los diferenciales darían la forma cero). Ya que los índices toman valores de 0 a 3, se sigue que solo  $\tau = \mu$  ó  $\tau = \nu$  darían una contribución no cero a la 3-forma  $d*F$ . Así, usando  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$  y  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon_{\nu\mu\rho\sigma}$ , y después de un cálculo elemental, en el que se asumirá que índices repetidos indican sumas sin importar el número de repeticiones de estos, se sigue que

$$\begin{aligned} 2d*F &= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu F^{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \\ &= -\varepsilon_{0ijk} \partial_i F^{i0} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k - \varepsilon_{i\mu\rho\sigma} \partial_\mu F^{\mu i} dx^\mu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma. \end{aligned}$$

Desarrollando la primera suma y usando (23) se obtiene

$$\varepsilon_{0ijk} \partial_i F^{i0} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = 2\mu_0 J^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

De manera análoga, desarrollando la segunda suma con  $i = 1, 2, 3$ , y usando (23), se tiene respectivamente

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1\mu\rho\sigma}\partial_\mu F^{\mu 1} dx^\mu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma &= -2\mu_0 J^1 dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^0, \\ \varepsilon_{2\mu\rho\sigma}\partial_\mu F^{\mu 2} dx^\mu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma &= 2\mu_0 J^2 dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^0, \\ \varepsilon_{3\mu\rho\sigma}\partial_\mu F^{\mu 3} dx^\mu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma &= -2\mu_0 J^3 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^0.\end{aligned}$$

Remplazando las cuatro sumas anteriores en (51) se obtiene

$$d*F = -\mu_0(c\rho)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \mu_0\tilde{J} \wedge dx^0.$$

En este punto, usando las formas  $\tilde{J}$  y  $\mathcal{J}$  definidas en (49) se sigue que la ecuación (23) es<sup>16</sup> la segunda ecuación (50).

Finalmente, tomando la derivada exterior de la segunda ecuación (50) se sigue que  $d\mathcal{J} = 0$ , la cual escrita en componentes es (24).  $\square$

De las proposiciones 4.2, 5.1 y 5.2, se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 5.3.** *La segunda ecuación de Maxwell en (50) es*

$$*d*F = \mu_0 J.$$

El operador  $*d*$  es proporcional a un operador conocido como el *co-diferencial*, es el adjunto de  $d$  bajo cierto producto interno definido en el espacio de formas.<sup>17</sup> Note que de las definiciones dadas para  $*$  y  $d$ , el operador  $*d*$  envía  $p$ -formas en  $(p-1)$ -formas, lo cual sugiere el uso del prefijo «co». En particular, en nuestro caso  $p = 2$  y definiendo  $\delta = *d*$ , las ecuaciones de Maxwell se escriben de forma sucinta como

$$dF = 0, \quad \delta F = \mu_0 J. \quad (52)$$

Las ecuaciones de Maxwell escritas de esta manera, aparte de la elegancia y simplicidad de escritura, tienen propiedades importantes desde el punto de vista de la geometría. La primera ecuación nos dice que el campo electromagnético, visto como la 2-forma  $F$  definida por la primera ecuación (48), es una forma cerrada. Por lo tanto, como consecuencia

<sup>16</sup>La demostración deja de manifiesto una «dirección», indica que (22) y (23) están contenidas en las ecuaciones (50), i.e., soluciones a las primeras son necesariamente soluciones a las últimas. No obstante, una modificación menor de los argumentos permite igualmente concluir los recíprocos, lo cual se obtiene fácilmente reorganizando y comparando coeficientes de las formas involucradas. La verificación de esta última parte de la demostración se deja como un ejercicio al lector.

<sup>17</sup>Considere el operador  $*$  para la variedad semi-riemanniana  $(\mathbb{R}^n, h)$  y los espacios  $\Omega_{L^2}^p(\mathbb{R}^n)$ , con  $p = 0, \dots, n$ . Aquí  $L^2$  hace referencia a formas cuadrado integrables. Las integrales  $(A, B)_p = \int_{\mathbb{R}^n} A \wedge *B$  definen productos internos en cada  $\Omega_{L^2}^p(\mathbb{R}^n)$  y el operador  $\delta = (-1)^{\text{sign}(h)}(-1)^{n(p+1)+1}*d*$  resulta ser el adjunto de la derivada exterior  $d$  con respecto a dichos productos, i.e.,  $(\delta A, C)_{p-1} = (A, dC)_p$ . El lector familiarizado con geometría diferencial puede ver más detalles en [12]. En particular, para  $\Omega_{L^2}^2(\mathbb{R}^4)$  y con  $h = g$  la métrica euclidiana  $\delta = -*d*$ , por el contrario, si  $h = \eta$  es la pseudo-métrica de Minkowski  $\delta = *d*$ .

de un resultado célebre en geometría conocido como *el lema de Poincaré*,<sup>18</sup> se sigue que dicha forma es exacta, i.e., debe ser el diferencial de alguna 1-forma. Ahora, note que este hecho también se sigue de propiedades mencionadas anteriormente. En efecto, considerando los  $A^\mu$  en (25) como la 1-forma  $A = A_\nu dx^\nu$ , se sigue de la proposición 3.2 que  $2dA = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu = 2F$  y así  $F$  es el diferencial de  $A$ . Más aun, la segunda ecuación en (52) dice que el co-diferencial de  $F$  es proporcional a la 1-forma  $J$  definida como la segunda ecuación en (48).

Por otro lado, teniendo en cuenta (31) se sigue que si  $A$  es un potencial que determina el campo  $F$ , i.e.  $F = dA$ , entonces la transformación de 1-formas  $A \rightarrow A' = A - d\lambda$  genera otro potencial que determina el mismo  $F$  para cualquier función  $\mathbb{R}$ -valuada suave  $\lambda = \lambda(x)$ . Por consiguiente, la invariancia gauge estudiada previamente en términos de potenciales vectoriales y tensoriales, y que está descrita por (16) y (26), es una consecuencia inmediata de la primera ecuación en (52).

Finalmente, en la subsección 2.2 se describieron las ecuaciones de Maxwell sin fuentes. Usando formas, el anulamiento de las fuentes es equivalente a que la 1-forma  $J$ , definida en (48), sea idénticamente cero, lo cual es equivalente a que  $\mathcal{J} = 0$ . Por lo tanto, como consecuencia del teorema (5.2), dichas ecuaciones pueden reescribirse como:

$$dF = 0, \quad d*F = 0. \quad (53)$$

Ya que estas últimas ecuaciones están definidas para el espacio de Minkowski  $(\mathbb{R}^4, \eta)$ , el cual tiene dimensión 4, se sigue que  $*F$  es también una 2-forma. Así, a priori, es natural explorar si es posible que la forma dual del campo electromagnético sea proporcional a si misma, i.e.,

$$*F = aF, \quad (54)$$

con alguna constante  $a \neq 0$ . La naturalidad de (54) recae en que esta, en conjunto con la linealidad del operador  $*$ , permitiría reducir la segunda ecuación en (53) a la primera ecuación. No obstante, de la proposición 4.2 se sigue que  $-F = *^2F = a^2F$ , así  $a^2 = -1$  y no existen soluciones —al menos en los reales— a (54). Aun en tal caso, una ecuación análoga a (54) juega un papel importante en física, en particular en la teoría de Yang-Mills, y es conocida como la condición de dualidad.<sup>19</sup>

<sup>18</sup>El lema de Poincaré afirma que cada  $p$ -forma cerrada (con  $p = 1, \dots, n$ ) definida en  $\mathbb{R}^n$  es exacta. En geometría diferencial dicho lema se expresa usando grupos de cohomología como  $H^p(\mathbb{R}^n) = 0$ , con  $1 \leq p \leq n$ . El lector interesado en estos temas puede consultar la referencia [12]. En particular, las formas en  $\Omega^2(\mathbb{R}^4)$  que sean cerradas, son también exactas.

<sup>19</sup>Suponga que en lugar de considerar la ecuación (54) en el espacio de Minkowski, se considera la misma en la variedad riemanniana  $(\mathbb{R}^4, g)$ . En tal caso, para 2-formas se tiene  $*^2 = 1$  y así  $a^2 = 1$ . Por lo tanto (54) queda reducida a las ecuaciones  $*F = \pm F$ , conocidas como las condiciones de *autodualidad* y *anti-autodualidad*. Si bien lo anterior es un problema interesante en geometría riemanniana, tiene implicaciones en física. Para detalles sobre estas implicaciones y los vínculos entre geometría diferencial, electromagnetismo y la teoría de Yang-Mills véanse [2] y [6].

**Agradecimientos:** Los autores agradecen a los revisores del artículo por sus diversas observaciones, las cuales contribuyeron a mejorarlo de manera substancial. Sergio A. Holguín Cardona dedica el artículo al profesor Alonso Sepúlveda Soto (1949 - 2020), quien por primera vez le mostró a este autor la belleza y elegancia del electromagnetismo. Kenett Martínez Ruiz agradece a CONAHCyT por el apoyo económico que recibe mediante el programa de becas nacionales con No. 830628.

## Bibliografía

- [1] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag, 1988, <http://doi.org/10.1007/978-1-4757-2063-1>.
- [2] M. Atiyah, *Geometry of Yang-Mills fields*, Lezioni fermiane, SNS, 1979, [http://doi.org/10.1007/3-540-08853-9\\_18](http://doi.org/10.1007/3-540-08853-9_18).
- [3] J. Baez y J. Muniain, *Gauge fields, knots and gravity*, Series On Knots And Everything, World Scientific Publishing Company, 1994, <http://doi.org/10.1142/2324>.
- [4] I. Benn y R. Tucker, *An introduction to spinors and geometry with applications in physics*, A. Hilger, 1987.
- [5] S. A. H. Cardona y I. Téllez, «Sobre los grupos de Galileo y de Poincaré», *Miscelánea Matemática*, vol. 69, 2019, 43–73.
- [6] M. Dunajski, *Solitons, instantons, and twistors*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, OUP Oxford, 2010.
- [7] A. Einstein, *Relativity: The special and general theory*, Methuen & Co. Ltd, 1924.
- [8] ———, «Considerations concerning the fundamentals of theoretical physics», *Science*, vol. 91, 1940, 487–492, <http://doi.org/10.1126/science.91.2369.487>.
- [9] K. Evenson y J. Wells, «Speed of light from direct frequency and wavelength measurements of the methane-stabilized laser», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 29, 1972, 1346–1349, <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.29.1346>.
- [10] H. Flanders, *Differential forms with applications to the physical sciences*, Dover books on advanced mathematics, Academic Press, 1963.
- [11] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, Wiley, 1998.
- [12] J. M. Lee, *Manifolds and differential geometry*, Graduate studies in mathematics, AMS, 2009, <http://doi.org/10.1090/gsm/107>.
- [13] J. C. Maxwell, «A dynamical theory of the electromagnetic field», *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 155, 1865, 459–512, <http://doi.org/10.1098/rstl.1865.0008>.
- [14] ———, *A treatise on electricity and magnetism*, vol. 1,2, Clarendon Press, 1873.
- [15] H. W. Meyer, *A history of electricity and magnetism*, Burndy Lib., MIT Press, 1971.
- [16] B. O'Neill, *Semi-riemannian geometry with applications to relativity*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, 1983.
- [17] A. S. Soto, *Electromagnetismo*, Ciencia y Tecnología, Editorial UdeA, 2009.
- [18] R. Ward y R. Wells, *Twistor geometry and field theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1990, <http://doi.org/10.1017/CBO9780511524493>.
- [19] K. Warnick y P. Russer, «Differential forms and electromagnetic field theory», *Progress in Electromagnetics Research*, vol. 148, 2014, 83–112, <http://doi.org/10.2528/PIER14063009>.
- [20] S. Weinberg, *The quantum theory of fields*, vol. 1, Cambridge University Press, 1995, <http://doi.org/10.1017/CBO9781139644167>.