

# Los polinomios de Zernike en el contexto del análisis cuaterniónico

João Pedro Morais

Department of Mathematics, ITAM, Río Hondo #1,  
Col. Progreso Tizapán, México, DF 01080, México.  
joao.morais@itam.mx

## Resumen

Es verdaderamente raro que un artículo que ha sido dejado de lado hace casi ochenta años encuentre su camino de regreso al centro de la atención científica. Aún así, esto es exactamente lo que ha sucedido con el artículo escrito en 1934 por el Premio Nobel Frits Zernike en la última década. De hecho, en los últimos años se ha prestado especial atención al papel de los polinomios de Zernike en muchos y diferentes campos de la óptica geométrica, la ingeniería óptica y la astronomía. Los polinomios de Zernike se pueden representar como el producto de una constante de normalización por polinomios radiales y un par de funciones trigonométricas. Estos polinomios forman un conjunto ortogonal y completo sobre el disco unitario. En este texto pasaremos por la construcción de los polinomios de Zernike esféricos en el contexto del análisis cuaterniónico y discutiremos resultados recientes.

## 1. Introducción

### 1.1 Antecedentes históricos

Los *polinomios circulares de Zernike* (ZPs) fueron introducidos por Frits Zernike (1888–1966) (véase [19]) hace unos ochenta años en relación con su método de contraste de fase y la prueba de la navaja. Como consecuencia, F. Zernike y H. Brinkman (véase [20]) mostraron el enlace entre estos polinomios y las funciones armónicas esféricas generales que ocurren en la solución del problema de potenciales del laplaciano en los espacios multidimensionales. Tras la aparición de la obra de Zernike,

han surgido un número importante de publicaciones que describen diversas aplicaciones de los ZPs. En particular, los ZPs han jugado un papel fundamental en la teoría de la difracción de aberraciones de B. Nijboer (véase [14]) y en la teoría óptica como ha sido demostrado por W. Tango (véase [17]). Los ZPs han encontrado aplicaciones en diferentes campos desde entonces, tales como las matemáticas puras y aplicadas. Por ejemplo, se han utilizado ampliamente en la caracterización de sistemas de imágenes ópticas circulares con las funciones de pupila no uniformes y, más recientemente, en el cálculo de cantidades acústicas que provienen de radiadores armónicamente excitados con perfiles de velocidad no uniformes. Los ZPs son representados como el producto de una constante de normalización por polinomios radiales y un par de funciones trigonométricas (seno y coseno). Estos forman un conjunto completo de funciones ortogonales en el disco unitario y poseen muchas propiedades notables como la eficacia de la expresión, el cálculo rápido y la representación de varios niveles para la descripción de las formas de modelos. Originalmente Zernike definió sus polinomios a partir del análisis de las eigenfunciones de una ecuación diferencial de segundo orden. Su importancia no fue apreciada inmediatamente; veinte años después A. Bhatia y E. Wolf (véase [2]) demostraron que los ZPs surgen más o menos de manera única como funciones ortogonales en el disco unitario con dependencia radial polinomial e invariantes bajo rotaciones de los ejes alrededor del origen de coordenadas (es decir, el centro del disco unitario).

Para la reconstrucción, reconocimiento y discriminación de objetos en tres dimensiones, el uso de un sistema bidimensional parece ser inadecuado y en su lugar se utilizan sistemas tridimensionales. Las funciones de Zernike generalizadas fueron estudiadas por primera vez por W. Tango (véase [17]), quien proporcionó muchas de sus propiedades analíticas y algebraicas, así como propiedades que apoyan su adecuación en la teoría de la difracción óptica. En particular, los *polinomios de Zernike esféricos* (ZSPs) ortonormados en la bola unitaria se introdujeron por N. Canterakis en [4]. Los momentos de Zernike (definidos a través de los ZSPs) tienen la ventaja de capturar la información global sobre formas tridimensionales sin necesidad de fronteras cerradas como en los métodos basados en límites. Recientemente ha habido un renovado interés en los aspectos teóricos y computacionales de los momentos de Zernike, así como en las aplicaciones de estos en el diseño óptico, el análisis dinámico y la geometría computacional. Es a partir de estas aplicaciones que también surgieron métodos para la detección y caracterización de los aneurismas intracraneales y estas ideas ahora se están utilizando en el área de la bioinformática y la biología molecular. Además, los momentos de Zernike son muy buenos para describir en el

campo de la representación biológica; por ejemplo, pueden ser usados para aumentar las vistas en tres dimensiones de entidades biológicas importantes como ácidos nucleicos, células, tumores, tejidos, órganos enteros y organismos, así como para la recuperación de la estructura terciaria de una proteína y el estudio de sus propiedades.

## 1.2 La construcción de los polinomios de Zernike esféricos y sus propiedades

Los polinomios de Zernike esféricos (ZSPs) se distinguen de los otros conjuntos de polinomios por ciertas propiedades de invariancia. Si se define una base ortogonal en una región que tiene simetría esférica, es conveniente utilizar funciones que son «rotacionalmente invariantes», es decir, que forman una base para representaciones del grupo de rotaciones del espacio euclidiano tridimensional. Más específicamente, si consideramos una función continua  $Z(x, y, z)$  invariante bajo rotaciones de los ejes alrededor del origen  $x = y = z = 0$ , ésta debe necesariamente satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$\Delta Z + \alpha \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 Z + \beta \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) Z + \gamma Z = 0, \quad (1)$$

donde

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

denota al *operador laplaciano*. Alternativamente, haciendo un cambio a coordenadas esféricas  $(\rho, \theta, \varphi)$  por  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta \cos \varphi$ ,  $z = \rho \sin \theta \sin \varphi$  ( $0 \leq \rho \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  y  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ), la ecuación (1) se reescribe como:

$$(1 + \alpha \rho^2) \frac{\partial^2 Z}{\partial \rho^2} + \left[ \frac{2}{\rho} + (\alpha + \beta) \rho \right] \frac{\partial Z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial Z}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Z}{\partial \varphi^2} + \gamma Z = 0.$$

Podemos tratar de separar las variables sustituyendo una solución de la forma

$$Z(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi) = R(\rho) Y(\theta, \varphi), \quad (2)$$

donde  $R$  es una función en  $\rho$  únicamente y  $Y$  es una función en  $\theta$  y  $\varphi$ . La solución general  $Y(\theta, \varphi)$  en (2) se denomina *función armónica*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (donde  $\Omega$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^3$ ) una función real de tres variables reales  $x, y, z$ . Decimos que  $f$  es armónica en  $\Omega$  si es de clase  $C^2$  en  $\Omega$  y satisface la ecuación de Laplace,  $\Delta f = 0$ .

esférica, definida de la siguiente forma:

$$\begin{cases} {}^e Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) \equiv P_l^m(\cos \theta) \cos(m\varphi), \\ {}^o Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) \equiv P_l^m(\cos \theta) \operatorname{sen}(m\varphi), \quad m = 0, \dots, l \quad (l = 0, 1, \dots). \end{cases} \quad (3)$$

Aunque la notación sea poco común, denotamos la función esférica por  ${}^e Y$  y  ${}^o Y$  según la paridad de las funciones coseno y seno. Aquí  $P_l^m(s)$  ( $s = \cos \theta$ ) representan las *funciones asociadas de Legendre del primer tipo* de grado  $l$  y orden  $m$  definidas por

$$P_l^m(s) := (-1)^m (1 - s^2)^{m/2} \frac{d^m}{ds^m} [P_l(s)], \quad s \in [-1, 1]$$

donde  $P_l(s) := \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{ds^l} [(s^2 - 1)^l]$  denota el *polinomio de Legendre* de grado  $l$ . Observamos que cuando  $m = 0$ , la función de Legendre correspondiente  $P_l^0(s)$  coincide con el polinomio de Legendre  $P_l(s)$ . Las funciones asociadas de Legendre fueron introducidas en 1877 por Ferrer. Por esa razón, algunos autores las llaman *funciones de Ferrer*.

Utilizando el desarrollo binomial y el hecho de que

$$\frac{d^l}{ds^l} [s^r] = \begin{cases} 0 & , \quad l > r \\ \frac{r!}{(r-l)!} s^{r-l} & , \quad l \leq r \end{cases}$$

resulta que

$$P_l(s) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{1}{2^l} \binom{l}{k} \binom{2l-2k}{l} s^{l-2k},$$

donde el límite superior  $\lfloor k \rfloor$  en la suma anterior denota, como de costumbre, el *mayor entero menor o igual que  $k$* .

Las funciones asociadas de Legendre satisfacen la fórmula de recurrencia

$$(l - m + 1)P_{l+1}^m(s) = (2l + 1)sP_l^m(s) - (l + m)P_{l-1}^m(s),$$

para  $m = 0, \dots, l + 1$ . Una identidad adicional y útil está dada por

$$(1 - s^2)(P_l^m(s))' = (l + m)P_{l-1}^m(s) - l s P_l^m(s),$$

para  $m = 0, \dots, l$ . Por la representación (3) y en virtud de las fórmulas de recurrencia anteriores, resulta que

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} [-l(l + 1) \operatorname{sen}^2 \theta + m^2] Y \\ &+ \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} (-m^2) Y \\ &= -l(l + 1)Y. \end{aligned} \quad (4)$$

Las funciones asociadas de Legendre  $P_l^m(\cos \theta)$  son ortogonales en  $L^2([0, \pi], \text{sen } \theta d\theta)$  para un  $m$  fijo:

$$\int_0^\pi P_{l_1}^m(\cos \theta) P_{l_2}^m(\cos \theta) \text{sen } \theta d\theta = \frac{2}{2l_1 + 1} \frac{(l_1 + m)!}{(l_1 - m)!} \delta_{l_1, l_2},$$

donde el símbolo  $\delta_{l_1, l_2}$ , denominado *delta de Kronecker*, toma valor igual a 1 cuando  $l_1 = l_2$  y cero cuando  $l_1 \neq l_2$ .

Las funciones armónicas esféricas  $\{Y_l^{(m)}\} := \{eY_l^{(m)}, oY_l^{(m)} : m = 0, \dots, l; l = 0, 1, \dots\}$  forman un conjunto completo de funciones ortogonales y así forman una base ortogonal del espacio de Hilbert de funciones cuadrado integrables sobre la esfera unitaria  $S$ ,  $L^2(S)$ , con respecto al producto escalar usual:

$$\langle f, g \rangle_{L^2(S)} := \int_S f g d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f g \text{sen } \theta d\theta d\varphi.$$

Esta ortogonalidad se puede expresar de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \left\langle Y_{l_1}^{(m_1)}, Y_{l_2}^{(m_2)} \right\rangle_{L^2(S)} &= \int_0^\pi P_{l_1}^{m_1}(\cos \theta) P_{l_2}^{m_2}(\cos \theta) \text{sen } \theta d\theta \\ &\quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos(m_1 \varphi)}{\text{sen}(m_1 \varphi)} \frac{\cos(m_2 \varphi)}{\text{sen}(m_2 \varphi)} d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{2l_1 + 1} \frac{(l_1 + m_1)!}{(l_1 - m_1)!} \delta_{l_1, l_2} (1 + \delta_{0, m_1}) \delta_{m_1, m_2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Consecuentemente, sus normas están dadas por

$$\| eY_l^{(m)} \|_{L^2(S)} = \| oY_l^{(m)} \|_{L^2(S)} = \sqrt{\frac{2\pi(1 + \delta_{0, m})}{2l + 1} \frac{(l + m)!}{(l - m)!}}.$$

Un estudio más detallado de las funciones armónicas esféricas y de sus propiedades se puede encontrar, por ejemplo, en [1] y [15].

A continuación explicamos la construcción de la parte radial de la función  $Z$  de la forma (2). Adicionalmente, teniendo en cuenta (4) se puede verificar que la función radial  $R(\rho)$  debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$\rho^2 (1 + \alpha\rho^2) R'' + \rho [2 + (\alpha + \beta)\rho^2] R' + [\gamma\rho^2 - l(l + 1)] R = 0. \quad (6)$$

Ahora, si en (6) se sustituye  $\alpha$  por  $-1$ , obtenemos que el coeficiente de  $R''$  desaparece en ambos extremos del intervalo  $0 \leq \rho \leq 1$ ; además, tomando  $\beta = -3$ , la ecuación diferencial se convierte en autoadjunta por lo que nos lleva a

$$\rho^2 (1 - \rho^2) R'' + 2\rho (1 - 2\rho^2) R' + [\gamma\rho^2 - l(l + 1)] R = 0. \quad (7)$$

Cada valor de  $\rho$  es un «punto ordinario» para esta ecuación excepto los puntos  $\rho = 0, 1$  e  $\infty$ , que son «puntos regulares». Además, la ecuación

(7) se puede reescribir, en términos de una nueva variable  $u = \rho^2$ , de la siguiente forma:

$$u(1-u) \frac{d^2 R}{du^2} + \frac{1}{2}(3-5u) \frac{dR}{du} + \frac{1}{4} \left[ \gamma - \frac{l(l+1)}{u} \right] R = 0.$$

Ahora, si consideramos  $R(u) := u^{\frac{1}{2}l} F(u)$  obtenemos la siguiente ecuación hipergeométrica para  $F(u)$ :

$$u(1-u) \frac{d^2 F}{du^2} + \left[ l + \frac{3}{2} - u \left( l + \frac{5}{2} \right) \right] \frac{dF}{du} + \left[ \frac{\gamma}{4} - \frac{l(l+3)}{4} \right] F = 0.$$

Una solución de la ecuación anterior es proporcionada por la *función hipergeométrica*<sup>2</sup>

$$F \left( \frac{l + \frac{3}{2} + \sqrt{\gamma + \frac{9}{4}}}{2}, \frac{l + \frac{3}{2} - \sqrt{\gamma + \frac{9}{4}}}{2}, l + \frac{3}{2}; u \right). \quad (8)$$

La función  $F(a, b, c; u)$  tiene una singularidad logarítmica en el punto  $u = 1$ , si  $c - a - b = 0$ , un caso que surge aquí. Por lo tanto la solución (8) solamente será finita en todos los puntos situados en o dentro de la bola unitaria, si la serie hipergeométrica termina y se reduce a un polinomio. Los números característicos que cumplen esta condición están dados por  $\gamma = n(n+3)$ , donde  $n$  es un entero positivo.

Con este resultado y si, además, elegimos la normalización  $R_n^{(l)}(1) = \sqrt{2n+3}$  para todo  $n$  y  $l$ , se puede ver que la solución radial puede ser obtenida explícitamente de (8), logrando la siguiente forma:

$$\begin{aligned} R_n^{(l)}(\rho) &:= (-1)^{\frac{n-l}{2}} \sqrt{2n+3} \left( \frac{\frac{n+l+3}{2} - 1}{\frac{n-l}{2}} \right) \rho^l \\ &F \left( \frac{n+l+3}{2}, -\frac{n-l}{2}, l + \frac{3}{2}; \rho^2 \right) \\ &= \sqrt{2n+3} \sum_{s=0}^{\frac{n-l}{2}} (-1)^s \binom{\frac{n-l}{2}}{s} \binom{n-s+\frac{1}{2}}{\frac{n-l}{2}} \rho^{n-2s} \end{aligned} \quad (9)$$

<sup>2</sup>La función hipergeométrica (de Gauss), denotada por  $F(a, b, c; u)$ , está definida por la serie siguiente [18, cap. XIV]):

$$F(a, b, c; u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{u^k}{k!},$$

donde  $c \neq 0, -1, -2, \dots$  y  $(\lambda)_k$  es el símbolo de Pochhammer definido por

$$(\lambda)_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \lambda(\lambda+1) \cdots (\lambda+k-1), & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

para valores enteros positivos  $n, l$  tales que  $n - l$  es par y no negativo. De ahora en adelante,  $n$  representa el *grado* del polinomio radial y  $l$  su *dependencia angular*.

Algunos de los primeros polinomios radiales se presentan en la siguiente tabla:

Grado Radial ( $n$ )	Orden Polar ( $l$ )	Polinomios Radiales
0	0	$R_0^{(0)}(\rho) = \sqrt{3}$
1	1	$R_1^{(1)}(\rho) = \sqrt{5}\rho$
2	0	$R_2^{(0)}(\rho) = \frac{\sqrt{7}}{2}(-3 + 5\rho^2)$
	2	$R_2^{(2)}(\rho) = \sqrt{7}\rho^2$
3	1	$R_3^{(1)}(\rho) = \frac{3}{2}\rho(-5 + 7\rho^2)$
	3	$R_3^{(3)}(\rho) = 3\rho^3$
4	0	$R_4^{(0)}(\rho) = \frac{\sqrt{11}}{8}(15 - 70\rho^2 + 63\rho^4)$
	2	$R_4^{(2)}(\rho) = \frac{\sqrt{11}}{2}\rho^2(-7 + 9\rho^2)$
	4	$R_4^{(4)}(\rho) = \sqrt{11}\rho^4$

**Cuadro 1.** Ejemplos de los polinomios radiales  $R_n^{(l)}(\rho)$ .

En efecto, los polinomios  $R_n^{(l)}(\rho)$  satisfacen la ecuación diferencial siguiente:

$$\rho^2(1 - \rho^2)\frac{d^2 R_n^{(l)}}{d\rho^2} + 2\rho(1 - 2\rho^2)\frac{dR_n^{(l)}}{d\rho} + [n(n + 3)\rho^2 - l(l + 1)] R_n^{(l)} = 0. \quad (10)$$

Estos polinomios son pares o impares, dependiendo de  $n$  o  $l$ :

$$R_n^{(l)}(\rho) = (-1)^n R_n^{(l)}(-\rho) = (-1)^l R_n^{(l)}(-\rho).$$

Observamos que cuando  $l = n$  los polinomios  $R_n^{(l)}(\rho)$  se simplifican a monomios de grado  $n$ :  $R_n^{(n)}(\rho) = \sqrt{2n + 3}\rho^n$ . Además, dichos polinomios satisfacen la fórmula de recurrencia [11]:

$$C_1(n, l) R_{n+2}^{(l)}(\rho) + C_2(n, l) R_{n-2}^{(l)}(\rho) = D(n, l, \rho) R_n^{(l)}(\rho), \quad (11)$$

donde los coeficientes  $C_1$  y  $C_2$  son constantes dadas por

$$C_1(n, l) := \frac{1}{\sqrt{2n+7}} (2n+1)(n+3+l)(n+2-l), \quad (12)$$

$$C_2(n, l) := \frac{1}{\sqrt{2n-1}} (2n+5)(n+1+l)(n-l), \quad (13)$$

y  $D(n, l, \rho)$  es el polinomio de grado 2

$$D(n, l, \rho) := \frac{1}{2} \sqrt{2n+3} [(2n+5)(2n+1)(2\rho^2-1) - (2l+1)^2]. \quad (14)$$

La condición de ortogonalidad de estos polinomios radiales es la siguiente:

$$\int_0^1 \rho^2 R_{n_1}^{(l)}(\rho) R_{n_2}^{(l)}(\rho) d\rho = \delta_{n_1, n_2}.$$

Sean  $n$  y  $l$  números enteros positivos tales que  $n-l$  es par y no negativo. De ahora en adelante, denotaremos por

$$\begin{cases} {}^e Z_{n,l}^{(m)}(\rho, \theta, \varphi) \equiv N_l^{(m)} R_n^{(l)}(\rho) {}^e Y_l^{(m)}(\theta, \varphi), \\ {}^o Z_{n,l}^{(m)}(\rho, \theta, \varphi) \equiv N_l^{(m)} R_n^{(l)}(\rho) {}^o Y_l^{(m)}(\theta, \varphi), \\ m = 0, \dots, l \quad (l = 0, 1, \dots) \end{cases} \quad (15)$$

los *polinomios de Zernike esféricos* (ZSPs), donde  $\{{}^e Y_l^{(m)}, {}^o Y_l^{(m)}\}$  están definidos por (3), los polinomios  $R_n^{(l)}(\rho)$  están dados por (9) y  $N_l^{(m)} := \|{}^e Y_l^{(m)}\|_{L^2(S)}^{-1} = \|{}^o Y_l^{(m)}\|_{L^2(S)}^{-1}$  es el *factor de normalización*. Por simplicidad, denotamos por  $Z_{n,l}^{(m)}$  cualquier polinomio del conjunto  $\{{}^e Z_{n,l}^{(m)}, {}^o Z_{n,l}^{(m)} : m = 0, \dots, l\}$ , para cada  $n, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  tales que  $n-l$  es par y no negativo.

### Observación 1.1.

- Una simple observación muestra que  $R_n^{(l)}(\rho)$  son polinomios de grado  $n$ , conteniendo todos los términos  $\rho^l, \rho^{l+2}, \rho^{l+4}, \dots, \rho^{n-2}, \rho^n$ . Por lo tanto, podemos concluir que las funciones (15) son polinomios de grado  $n$  en las variables  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta \cos \varphi$ ,  $z = \rho \sin \theta \sin \varphi$ .
- Es fácil de verificar de (15) que los ZSPs coinciden con los armónicos esféricos sobre la esfera, salvo por una constante real que depende de  $l$ ,  $m$  y  $n$ .
- Notemos que cuando  $n = l$  los ZSPs resultantes son polinomios armónicos homogéneos.

Los ZSPs están representados en la tabla siguiente para los casos  $n = 0, 1, 2$  en coordenadas cartesianas.



Grado Radial ( $n$ )	Orden Polar ( $l$ )	Orden Azimut ( $m$ )	ZSPs
0	0	0	$e Z_{0,0}^{(0)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}}$
1	1	0	$e Z_{1,1}^{(0)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{\pi}} x$
		1	$e Z_{1,1}^{(1)} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{\pi}} y$ $o Z_{1,1}^{(1)} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{\pi}} z$
2	0	0	$e Z_{2,0}^{(0)} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{7}{\pi}} (-3 + 5x^2 + 5y^2 + 5z^2)$
	2	0	$e Z_{2,2}^{(0)} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{35}{\pi}} (2x^2 - y^2 - z^2)$
		1	$e Z_{2,2}^{(1)} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{105}{\pi}} xy$ $o Z_{2,2}^{(1)} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{105}{\pi}} xz$
		2	$e Z_{2,2}^{(2)} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{105}{\pi}} (y^2 - z^2)$ $o Z_{2,2}^{(2)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{105}{\pi}} yz$

Para cualesquiera números enteros  $n$  y  $l$  tales que  $n - l$  es par y no negativo, los ZSPs satisfacen las siguientes propiedades:

(i) Simetrías

(a) paridad con respecto al punto de reflexión en el centro de coordenadas:

$$Z_{n,l}^{(m)}(\rho, \theta, \varphi) = (-1)^m Z_{n,l}^{(m)}(\rho, \theta, \varphi + \pi);$$

(b) paridad dependiendo de  $n$  o  $l$ :

$$Z_{n,l}^{(m)}(\rho, \theta, \varphi) = (-1)^n Z_{n,l}^{(m)}(-\rho, \theta, \varphi) = (-1)^l Z_{n,l}^{(m)}(-\rho, \theta, \varphi);$$

(c) invariancia bajo rotaciones de múltiplos de  $\frac{2\pi}{m}$  radianes alrededor del origen:

$$Z_{n,l}^{(m)}\left(\rho, \theta, \varphi + \frac{2\pi k}{m}\right) = Z_{n,l}^{(m)}(\rho, \theta, \varphi), \quad k \in \mathbb{Z};$$

(ii) Sea  $B$  la bola unitaria en  $\mathbb{R}^3$ . Los ZSPs son ortonormales en el espacio de Hilbert de funciones cuadrado integrables sobre  $B$ ,  $L^2(B)$ , con respecto al producto escalar usual:

$$\langle f, g \rangle_{L^2(B)} := \int_B fg \, dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi fg \, \text{sen } \theta \rho^2 \, d\theta \, d\varphi \, d\rho.$$

Esta ortonormalidad se puede expresar de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \left\langle Z_{n_1, l_1}^{(m_1)}, Z_{n_2, l_2}^{(m_2)} \right\rangle_{L^2(B)} &= N_{l_1}^{(m_1)} N_{l_2}^{(m_2)} \int_0^1 R_{n_1}^{(l_1)}(\rho) R_{n_2}^{(l_2)}(\rho) \rho^2 d\rho \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \begin{matrix} eY_{l_1}^{(m_1)} \\ oY_{l_1}^{(m_1)} \end{matrix}(\theta, \varphi) \begin{matrix} eY_{l_2}^{(m_2)} \\ oY_{l_2}^{(m_2)} \end{matrix}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \delta_{n_1, n_2} \delta_{l_1, l_2} \delta_{m_1, m_2}, \end{aligned}$$

donde  $n_1 - l_1$  y  $n_2 - l_2$  son ambos pares y no negativos.

### 1.3 Motivación y estructura del artículo

Los métodos de variable compleja tienen una amplia gama de aplicaciones. Desafortunadamente, debido a su naturaleza inherente estos métodos se limitan esencialmente a los problemas de dos dimensiones. Eso conduce a una creciente necesidad de crear contrapartes en dimensiones superiores. Para una extensión de la teoría de las funciones holomorfas a tres y cuatro dimensiones existen básicamente dos enfoques principales: por un lado, podemos considerar el concepto de holomorfía con respecto a varias variables complejas; por otro lado, la generalización se puede hacer usando la teoría de funciones con valores en el álgebra de cuaterniones. Una diferencia esencial entre estas dos extensiones reside en su estructura algebraica. Mientras que en el caso de varias variables complejas hay conmutatividad, esto ya no sucede en el caso del análisis cuaterniónico. En una primera vista, esto puede ser interpretado como una desventaja. Sin embargo, hay varias ventajas del enfoque del análisis cuaterniónico en comparación con la teoría de funciones de varias variables complejas. Por ejemplo, mientras que en el último caso, la función del núcleo de Cauchy se asocia a polidominios, su homólogo en el análisis cuaterniónico es universal. Esto también implica que hay una ventaja natural en el enfoque cuaterniónico ya que parece no sufrir de las restricciones geométricas de la teoría de funciones de varias variables complejas. Otra ventaja reside en el hecho de que permite la factorización de operadores diferenciales de orden superior en términos de operadores diferenciales de orden inferior.

Durante los últimos años la teoría de funciones holomorfas generalizadas con valores en el álgebra de los cuaterniones de Hamilton (las llamadas *funciones monogénicas*) ha demostrado su valor en una amplia variedad de campos desde los teóricos a los prácticos; se ha desarrollado durante décadas como una generalización de la teoría de las funciones holomorfas en el plano complejo de dimensiones superiores y también se ha considerado como un refinamiento del análisis armónico clásico. El presente artículo plantea la cuestión de si los ZSPs pueden generalizarse

al contexto del análisis cuaterniónico. Una razón principal de perseguir esta dirección es que ya existe una teoría suficientemente desarrollada para la construcción de diferentes bases de funciones monogénicas por medio de herramientas del análisis cuaterniónico. La idea de la construcción de estos sistemas es un método de análisis armónico basado en la factorización del operador de Laplace en operadores diferenciales de primer orden de manera similar al caso complejo. En este trabajo nos basamos en los principios de funciones monogénicas presentados en [3, 10]. Con respecto a las aplicaciones ya mencionadas, es de interés teórico comprobar si las funciones de Zernike pueden extenderse a una estructura no conmutativa como en el caso del álgebra de cuaterniones. Este entendimiento podría ser una fuente para más generalizaciones. También puede ser fructífero tanto para enriquecer el alcance de las propiedades de estas funciones en dimensiones superiores, como su uso en posibles aplicaciones del análisis cuaterniónico en la teoría de la difracción y en campos relacionados.

El artículo se presenta de la siguiente forma: La sección 2 ofrece una visión general histórica sobre algunas definiciones y propiedades básicas del análisis cuaterniónico. Recordamos también en esta sección la construcción de un sistema ortogonal y completo de funciones monogénicas esféricas en un espacio de Hilbert particular de funciones cuaterniónicas reducidas y cuadrado integrables sobre la esfera unitaria (véase el teorema 2.5). Los elementos de este sistema se pueden expresar explícitamente en términos de combinaciones lineales de funciones armónicas esféricas (véase la proposición 2.3). La sección 3 presenta la definición de los polinomios de Zernike esféricos que toman valores en los cuaterniones reducidos (RQZSPs) (véase la definición 3.1). Las representaciones de estos polinomios están dadas de forma explícita en términos de productos de polinomios radiales por funciones monogénicas esféricas en la superficie de la bola unitaria. En esta sección también se discuten otras propiedades importantes y las fórmulas de recurrencia para los RQZSPs. En la sección 4 se presentan los polinomios de Zernike cuaterniónicos esféricos (QZSPs) (véase la definición 4.1). Procedemos a presentar las propiedades fundamentales de los QZSPs (véase el teorema 4.6). En la parte de aplicaciones, presentamos algunas simulaciones hechas en Maple que demuestran la eficacia de nuestro enfoque.

## 2. El álgebra de los cuaterniones

Los *cuaterniones* fueron descubiertos en octubre de 1843 por el matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton (1805–1865). Su motivación original era crear un tipo de números hipercomplejos relacionados con el espacio tridimensional de la misma manera como los números complejos están relacionados con el plano. En su primera conjetura, los números complejos necesitarían una parte imaginaria suplementaria, es decir, una parte real y dos partes imaginarias distintas. Para la generalización de la llamada «Theory of Couplets» a la «Theory of Triplets», fundamentalmente Hamilton tenía en mente el uso de esta teoría para representar rotaciones en el espacio tridimensional, justo como los números complejos pueden ser usados para representar rotaciones en el plano bidimensional. Por lo tanto, es natural que en el intento de lograr una construcción de este tipo, algunas cuestiones hayan permanecido intactas. Después de casi diez años de buscar sin éxito una extensión tridimensional de los números complejos, Hamilton se encontró al borde de renunciar. Pasó años tratando de resolver este problema sin éxito; incluso sus hijos eran conscientes de sus frustrantes intentos con estos números. Pero en el día 16 del dicho mes —que resultó ser un lunes y un día de Consejo en la Academia Real Irlandesa— mientras caminaba con su esposa a lo largo del Canal Real en Dublín, Hamilton fue iluminado por la inspiración, se detuvo y trazó con un cuchillo en el puente Brougham (ahora Broome) sus ideas. En lugar de las dos partes imaginarias como había considerado primero, concibió un sistema imaginario constituido por tres partes. Así, los cuaterniones nacieron — del latín *quaternio* que significa «conjunto de cuatro». Lo que Hamilton había imaginado era un número con un componente real y tres componentes imaginarios distintos, todos los componentes imaginarios de cuadrado  $-1$ . Desafortunadamente, los trazos en el puente ya no permanecen hoy. Sin embargo, su descubrimiento fue tan importante que todos los años en octubre 16, el Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Irlanda, Maynooth, tiene un paseo al puente de Broome celebrando su descubrimiento.

Hamilton presentó las matemáticas cuaterniónicas en una serie de conferencias en la Real Academia Irlandesa. Las conferencias dieron lugar a un libro, cuyo título completo es «Lectures on quaternions: containing a systematic statement of a new mathematical method, of which the principles were communicated in 1843 to the Royal Irish academy, and which has since formed the subject of successive courses of lectures, delivered in 1848 and subsequent years, in the halls of Trinity

College, Dublin: with numerous illustrative diagrams, and with some geometrical and physical applications»<sup>3</sup>.

## 2.1 Preliminares matemáticos

Hamilton llamó a los nuevos números

$$\mathbf{q} := q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}, \quad (q_l \in \mathbb{R}, l = 0, 1, 2, 3) \quad (16)$$

cuaterniones (o más informalmente, números de Hamilton), donde las unidades imaginarias  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  tienen cuadrado igual a  $-1$ :

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$$

y además

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik},$$

por lo que la multiplicación de cuaterniones no es conmutativa. El conjunto de todos los cuaterniones se denota por  $\mathbb{H}$ , en honor a su descubridor.

Los cuaterniones se pueden sumar y multiplicar. Sean  $\mathbf{p} = p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$  y  $\lambda$  un número real. Estas operaciones se definen como sigue:

(i) adición

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} := (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)\mathbf{i} + (p_2 + q_2)\mathbf{j} + (p_3 + q_3)\mathbf{k};$$

(ii) multiplicación por un real

$$\lambda\mathbf{p} := (\lambda p_0) + (\lambda p_1)\mathbf{i} + (\lambda p_2)\mathbf{j} + (\lambda p_3)\mathbf{k};$$

(iii) multiplicación cuaterniónica

$$\begin{aligned} \mathbf{pq} := & (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)\mathbf{i} \\ & + (p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1)\mathbf{j} + (p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Si tomamos las expresiones anteriores como las definiciones de adición y multiplicación, es fácil verificar que las propiedades asociativa y conmutativa de la adición, y la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma se mantienen para los cuaterniones:

(iv) propiedad conmutativa de la suma

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{q} + \mathbf{p} \quad \text{para todo } \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H};$$

(v) propiedad asociativa de la suma

$$\mathbf{p} + (\mathbf{q} + \mathbf{r}) = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) + \mathbf{r} \quad \text{para todo } \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{H};$$

---

<sup>3</sup>Conferencias en cuaterniones: Contiene la descripción sistemática de un nuevo método matemático, cuyos principios fueron comunicados en 1843 a la Real Academia Irlandesa, y que desde entonces se ha formado a base de sucesivos cursos y conferencias impartidas en 1848 y años subsiguientes en las aulas de Trinity College en Dublín: con numerosos diagramas ilustrativos y con algunas aplicaciones geométricas y físicas.

(vi) propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma

$$\mathbf{p}(\mathbf{q} + \mathbf{r}) = \mathbf{p}\mathbf{q} + \mathbf{p}\mathbf{r} \quad \text{y} \quad (\mathbf{q} + \mathbf{r})\mathbf{p} = \mathbf{q}\mathbf{p} + \mathbf{r}\mathbf{p} \quad \text{para todo } \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{H};$$

(vii) propiedad asociativa de la multiplicación

$$(\mathbf{p}\mathbf{q})\mathbf{r} = \mathbf{p}(\mathbf{q}\mathbf{r}) \quad \text{para todo } \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{H}.$$

Las *partes escalar* y *vectorial* de  $\mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$  denotadas, respectivamente, por  $\text{Sc}(\mathbf{q})$  y  $\text{Vec}(\mathbf{q})$ , están definidas por  $q_0$  y  $q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ . El *conjugado* de  $\mathbf{q}$  es el cuaternión

$$\bar{\mathbf{q}} = q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}.$$

De este modo podemos escribir la parte escalar de  $\mathbf{q}$  como

$$\text{Sc}(\mathbf{q}) := \frac{1}{2}(\mathbf{q} + \bar{\mathbf{q}}),$$

y la parte vectorial de  $\mathbf{q}$  como

$$\text{Vec}(\mathbf{q}) := \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}).$$

El *valor absoluto* de  $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$  está definido por

$$|\mathbf{q}|^2 = \mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}\mathbf{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

y además, para todo  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}$  tenemos

$$|\mathbf{p}\mathbf{q}|^2 = (\mathbf{p}\mathbf{q})(\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}}) = \mathbf{p}\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{p}} = |\mathbf{p}|^2|\mathbf{q}|^2. \quad (17)$$

Debido al famoso teorema de Frobenius [5], las álgebras  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{H}$  son las únicas álgebras reales asociativas con división de dimensión finita que satisfacen (17). Para más detalles sobre el álgebra de cuaterniones véase [6, 7, 8, 12, 16].

A continuación, sea

$$\mathcal{A} := \text{span}_{\mathbb{R}}\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}\} \subset \mathbb{H}$$

el espacio de los *cuaterniones reducidos* de la forma  $\mathbf{t} := x + y\mathbf{i} + z\mathbf{j}$ , enfatizando que  $\mathcal{A}$  es un subespacio vectorial real, pero no es un subálgebra, de  $\mathbb{H}$ . El espacio vectorial real  $\mathbb{R}^3$  está inmerso en  $\mathcal{A}$  a través de la identificación

$$t := (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{t} := x + y\mathbf{i} + z\mathbf{j} \in \mathcal{A}.$$

Ahora sea  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^3$  con una frontera suave definida a trozos. Decimos que

$$\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{H}, \quad \mathbf{f}(t) := [\mathbf{f}(t)]_0 + [\mathbf{f}(t)]_1\mathbf{i} + [\mathbf{f}(t)]_2\mathbf{j} + [\mathbf{f}(t)]_3\mathbf{k} \quad (18)$$

es una *función de valores cuaterniónicos* o, brevemente, una función  $\mathbb{H}$ -valuada, donde  $[\mathbf{f}]_l$  ( $l = 0, 1, 2, 3$ ) son funciones reales definidas en  $\Omega$ . Por ahora, está claro que si  $[\mathbf{f}(t)]_3 \equiv 0$  para todo  $t \in \Omega$ , entonces  $\mathbf{f}$  se reduce a una función de valores en los cuaterniones reducidos.

Continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad que se atribuyen a  $\mathbf{f}$  se definen *componente a componente*.

Los *módulos de Hilbert*  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$  (resp.  $L^2(\Omega, \mathbb{H}, \mathbb{H})$ ) consisten en el espacio lineal real (resp. cuaterniónico por la derecha; es decir, dotado de una multiplicación por escalares cuaterniónicos a la derecha) de todas las funciones cuadrado integrables en  $\Omega$  valuadas en  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathbb{H}$ ):

$$L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R}) := \left\{ \mathbf{f} \mid \mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathcal{A}, \left( \int_{\Omega} |\mathbf{f}|^2 dV \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

$$\text{(resp. } L^2(\Omega, \mathbb{H}, \mathbb{H}) := \left\{ \mathbf{f} \mid \mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{H}, \left( \int_{\Omega} |\mathbf{f}|^2 dV \right)^{1/2} < \infty \right\} \text{)}.$$

En esta asignación, definimos el *producto interno escalar*<sup>4</sup> y el *producto interno cuaterniónico derecho*, respectivamente, por

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})} = \text{Sc} \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}} \mathbf{g} dV \quad (19)$$

y

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{H}, \mathbb{H})} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}} \mathbf{g} dV. \quad (20)$$

El lector debe tener en cuenta que la *norma* inducida por el producto interno escalar (19) definida en  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$ ,

$$\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})}^2 := \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})} = \int_{\Omega} |\mathbf{f}|^2 dV = \int_{\Omega} \left( \sum_{l=0}^2 [\mathbf{f}]_l^2 \right) dV$$

coincide con la norma  $L^2$  de  $\mathbf{f}$ , considerada como una función vectorial.

Una noción central en el análisis cuaterniónico es la de *monogenicidad* que es introducida por medio del llamado *operador generalizado de Cauchy-Riemann*

$$\bar{\partial} := \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (21)$$

**Definición 2.1.** Sea  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathcal{A}$  (donde  $\Omega$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^3$ ). Decimos que  $\mathbf{f}$  es monogénica en  $\Omega$  si es de clase  $C^1$  en  $\Omega$  y satisface la ecuación  $\bar{\partial} \mathbf{f} = 0$  en  $\Omega$ .

La ecuación  $\bar{\partial} \mathbf{f} = 0$  es equivalente al *sistema de Riesz* en  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial[\mathbf{f}]_0}{\partial x} - \frac{\partial[\mathbf{f}]_1}{\partial y} - \frac{\partial[\mathbf{f}]_2}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial[\mathbf{f}]_0}{\partial y} + \frac{\partial[\mathbf{f}]_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial[\mathbf{f}]_0}{\partial z} + \frac{\partial[\mathbf{f}]_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial[\mathbf{f}]_1}{\partial z} - \frac{\partial[\mathbf{f}]_2}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

<sup>4</sup>Vale la pena señalar que (19) no puede definir un producto interno en  $L^2(\Omega, \mathbb{H}, \mathbb{H})$  visto como un espacio lineal cuaterniónico ya que no es homogéneo para escalares cuaterniónicos.

o, en una forma más compacta:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\bar{\mathbf{f}}) &= 0 \\ \operatorname{curl}(\bar{\mathbf{f}}) &= (0, 0, 0). \end{cases}$$

El sistema de Riesz en  $\mathbb{R}^3$  generaliza claramente el sistema de las ecuaciones de Cauchy–Riemann en el plano complejo. Desde esta perspectiva, las funciones monogénicas pueden ser vistas como análogas a las funciones holomorfas en dimensiones superiores.

Una vez que el operador (21) y su conjugado

$$\partial = \frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y} - \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial z} \quad (23)$$

factorizan al operador de Laplace

$$\bar{\partial}\partial = \partial\bar{\partial} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta, \quad (24)$$

se deduce que una función monogénica también es armónica y también lo son todos sus componentes. Esta factorización establece una relación especial entre el análisis cuaterniónico y el análisis armónico donde las funciones monogénicas generalizan y refinan a las funciones armónicas.

## 2.2 Un conjunto ortogonal de funciones monogénicas esféricas

### 2.2.1. La construcción

Como hemos visto los ZSPs se definen como productos de polinomios radiales y funciones angulares. En tres dimensiones el conjunto de las funciones angulares fue elegido como el sistema ortogonal y completo de funciones armónicas esféricas (3) definido en la esfera. En el análisis cuaterniónico, un conjunto adecuado de funciones angulares sería un sistema ortogonal y completo de funciones monogénicas esféricas. La idea de la construcción de estas funciones es comenzar con las funciones armónicas esféricas (3), para las cuales tenemos fórmulas explícitas y relativamente sencillas. Se comienza por considerar el conjunto formado por las extensiones en la bola de las funciones armónicas esféricas

$$\left\{ \rho^{l+1} e Y_{l+1}^{(m)}, \rho^{l+1} o Y_{l+1}^{(m)} : m = 0, \dots, l+1 \right\}. \quad (25)$$



Teniendo en cuenta la factorización (24) del laplaciano, se aplica el operador (23) explícitamente dado en coordenadas esféricas por

$$\begin{aligned} \partial = & \left[ \cos \theta - \operatorname{sen} \theta (\cos \varphi \mathbf{i} + \operatorname{sen} \varphi \mathbf{j}) \right] \frac{\partial}{\partial \rho} \\ & - \frac{1}{\rho} \left[ \operatorname{sen} \theta + \cos \theta (\cos \varphi \mathbf{i} + \operatorname{sen} \varphi \mathbf{j}) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \\ & + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \theta} \left[ \operatorname{sen} \varphi \mathbf{i} - \cos \varphi \mathbf{j} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

a los polinomios homogéneos y armónicos en (25). Este proceso conduce al siguiente conjunto de  $2l + 3$  polinomios monogénicos homogéneos de grado  $l$  en las variables  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi$ ,  $z = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$  tomando valores en  $\mathcal{A}$ :

$$\left\{ \rho^l e \mathbf{X}_l^{(m)}, \rho^l o \mathbf{X}_l^{(m)} : m = 0, \dots, l + 1 \right\}, \quad (26)$$

donde

$$e \mathbf{X}_l^{(m)}(\theta, \varphi) := \partial \left[ \rho^{l+1} e Y_{l+1}^{(m)}(\theta, \varphi) \right]_{\rho=1}$$

y

$$o \mathbf{X}_l^{(m)}(\theta, \varphi) := \partial \left[ \rho^{l+1} o Y_{l+1}^{(m)}(\theta, \varphi) \right]_{\rho=1}.$$

**Definición 2.2.** Las funciones  $e \mathbf{X}_l^{(m)}$  y  $o \mathbf{X}_l^{(m)}$  se llaman *funciones monogénicas esféricas*.

Sea  $\mathcal{M}_l(B, \mathcal{A}, \mathbb{R})$  el subespacio de los polinomios homogéneos y monogénicos de grado  $l$  valuados en  $\mathcal{A}$  y definidos en  $B$ . De [9] sabemos que

$$\dim \mathcal{M}_l(B, \mathcal{A}, \mathbb{R}) = 2l + 3.$$

Denotemos por  $L^2(B, \mathcal{A}, \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$  el espacio lineal real de todas las funciones monogénicas y cuadrado integrables en  $B$  valuadas en  $\mathcal{A}$ . Ahora, se tiene la siguiente descomposición ortogonal

$$L^2(B, \mathcal{A}, \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{M}_l(B, \mathcal{A}, \mathbb{R}).$$

Los polinomios de Zernike con valores en los cuaterniones dependen fundamentalmente de las funciones monogénicas esféricas que se eligen en cada caso. Más específicamente, la construcción de los ZSPs con valores en  $\mathcal{A}$  requiere de la consideración de un conjunto de  $2l + 3$  funciones cuyas extensiones en la bola forman una base ortogonal en  $\mathcal{M}_l(B, \mathcal{A}, \mathbb{R})$  respecto al producto interno escalar (19) (véase el teorema 2.5 abajo).

### 2.3 Propiedades fundamentales de las funciones monogénicas esféricas

Las representaciones de las funciones monogénicas esféricas están dadas en términos de las funciones armónicas esféricas (3) de la siguiente forma [13]:

**Proposición 2.3.** *Para todo  $m = 0, \dots, l + 1$  ( $l = 0, 1, \dots$ )*

$$\begin{aligned} {}^e\mathbf{X}_l^{(m)}(\theta, \varphi) &:= (l + m + 1) {}^eY_l^{(m)}(\theta, \varphi) + \frac{1}{2} \left[ {}^eY_l^{(m+1)}(\theta, \varphi) \mathbf{i} + {}^oY_l^{(m+1)}(\theta, \varphi) \mathbf{j} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} (l + m + 1)(l + m) \left[ {}^eY_l^{(m-1)}(\theta, \varphi) \mathbf{i} - {}^oY_l^{(m-1)}(\theta, \varphi) \mathbf{j} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} {}^o\mathbf{X}_l^{(m)}(\theta, \varphi) &:= (l + m + 1) {}^oY_l^{(m)}(\theta, \varphi) + \frac{1}{2} \left[ {}^oY_l^{(m+1)}(\theta, \varphi) \mathbf{i} - {}^eY_l^{(m+1)}(\theta, \varphi) \mathbf{j} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} (l + m + 1)(l + m) \left[ {}^oY_l^{(m-1)}(\theta, \varphi) \mathbf{i} + {}^eY_l^{(m-1)}(\theta, \varphi) \mathbf{j} \right], \end{aligned} \quad (28)$$

donde

$${}^eY_l^{(-1)}(\theta, \varphi) := \begin{cases} -\frac{1}{l(l+1)} {}^eY_l^{(1)}(\theta, \varphi) & l = 1, 2, \dots, \\ 0 & l = 0, \end{cases}$$

y

$${}^oY_l^{(-1)}(\theta, \varphi) := \begin{cases} \frac{1}{l(l+1)} {}^oY_l^{(1)}(\theta, \varphi) & l = 1, 2, \dots, \\ 0 & l = 0. \end{cases}$$

Para una formulación más unificada recordamos al lector que  ${}^eY_l^{(m)}$ ,  ${}^oY_l^{(m)}$  se anulan para  $m > l + 1$ .

Es fácil de verificar que, por construcción,  ${}^o\mathbf{X}_l^{(0)}(\theta, \varphi) \equiv 0$  para todo  $l$ .

Los polinomios monogénicos en (26) están representados en la tabla siguiente para los casos  $l = 0, 1$  en coordenadas cartesianas.

Por simplicidad, denotamos por  $\mathbf{X}_l^{(m)}$  cualquier función monogénica del conjunto  $\{{}^e\mathbf{X}_l^{(m)}, {}^o\mathbf{X}_l^{(m)} : m = 0, \dots, l + 1\}$ , para cada  $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Como consecuencia de la propiedad de ortogonalidad (5) de las funciones armónicas esféricas y de la proposición 2.3, tenemos el siguiente resultado [10].

**Proposición 2.4.** *Para cada grado  $l$ , el conjunto*

$$\left\{ {}^e\mathbf{X}_l^{(m)}, {}^o\mathbf{X}_l^{(m)} : m = 0, \dots, l + 1 \right\}$$

Orden Polar ( $l$ )	Orden Azimut ( $m$ )	Polinomios homogéneos y monogénicos
0	0	$\rho^0 e \mathbf{X}_0^{(0)} = 1$
	1	$\rho^0 e \mathbf{X}_0^{(1)} = -\mathbf{i}$ $\rho^0 o \mathbf{X}_0^{(1)} = -\mathbf{j}$
1	0	$\rho^1 e \mathbf{X}_1^{(0)} = 2x + y\mathbf{i} + z\mathbf{j}$
	1	$\rho^1 e \mathbf{X}_1^{(1)} = 3y - 3x\mathbf{i}$ $\rho^1 o \mathbf{X}_1^{(1)} = -6y\mathbf{i} + 6z\mathbf{j}$
	2	$\rho^1 e \mathbf{X}_1^{(2)} = 3z - 3x\mathbf{j}$ $\rho^1 o \mathbf{X}_1^{(2)} = -6z\mathbf{i} - 6y\mathbf{j}$

es ortogonal en la esfera unitaria con respecto al producto interno escalar:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{L^2(S, \mathcal{A}, \mathbb{R})} := \text{Sc} \int_S \bar{\mathbf{f}} \mathbf{g} d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \bar{\mathbf{f}} \mathbf{g} \sin \theta d\theta d\varphi$$

y sus normas están dadas por

$$\|e \mathbf{X}_l^{(m)}\|_{L^2(S, \mathcal{A}, \mathbb{R})} = \|o \mathbf{X}_l^{(m)}\|_{L^2(S, \mathcal{A}, \mathbb{R})} = \sqrt{2\pi(1 + \delta_{0,m})(l+1) \frac{(l+1+m)!}{(l+1-m)!}}$$

Para  $m$  fijo, la ortogonalidad de los polinomios monogénicos (26) en la bola unitaria se sigue de la relación

$$\langle \rho^{l_1} \mathbf{X}_{l_1}^{(m)}, \rho^{l_2} \mathbf{X}_{l_2}^{(m)} \rangle_{L^2(B, \mathcal{A}, \mathbb{R})} = \delta_{l_1, l_2} \frac{1}{l_1 + l_2 + 3} \langle \mathbf{X}_{l_1}^{(m)}, \mathbf{X}_{l_2}^{(m)} \rangle_{L^2(S, \mathcal{A}, \mathbb{R})},$$

donde  $l_1, l_2 = 0, 1, \dots$

Podemos entonces obtener la completez del sistema (26).

**Teorema 2.5.** *Para cada grado  $l$ , el conjunto*

$$\left\{ \rho^l e \mathbf{X}_l^{(m)}, \rho^l o \mathbf{X}_l^{(m)} : m = 0, \dots, l+1 \right\}$$

*forma una base ortogonal del espacio  $\mathcal{M}_l(B, \mathcal{A}, \mathbb{R})$ . Consecuentemente,*

$$\left\{ \rho^l e \mathbf{X}_l^{(m)}, \rho^l o \mathbf{X}_l^{(m)} : m = 0, \dots, l+1; l = 0, 1, \dots \right\}$$

*es una base ortogonal en  $L^2(B, \mathcal{A}, \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$  con respecto al producto interno escalar (19).*

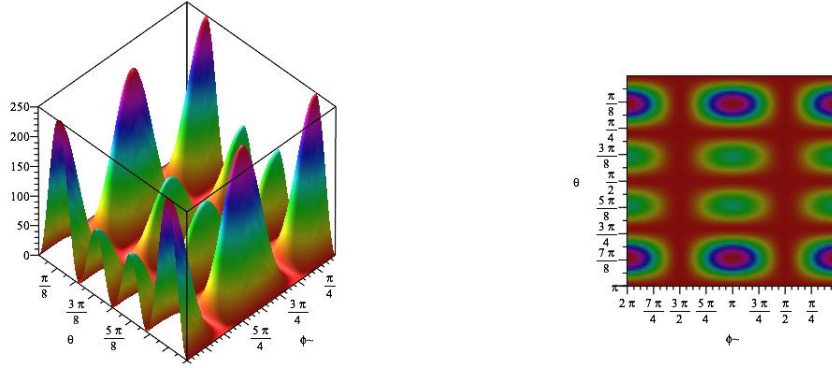


Figura 1.  $|\text{Sc}(e\mathbf{X}_4^{(1)}(\theta, \varphi))|^2$ .

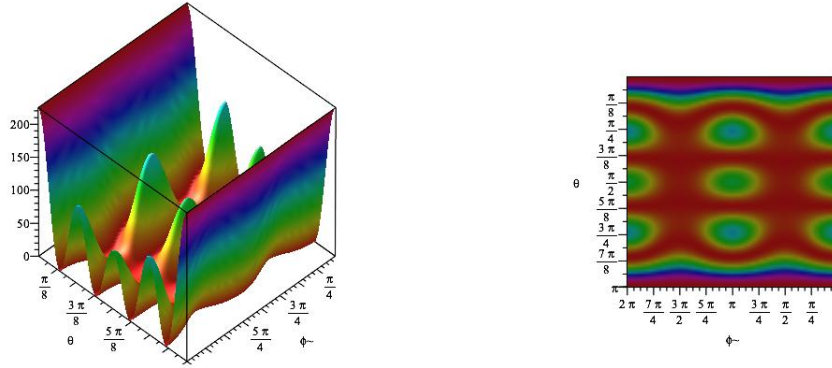


Figura 2.  $|[e\mathbf{X}_4^{(1)}(\theta, \varphi)]_1|^2$ .

#### 2.4 Simulaciones de las funciones monogénicas esféricas

En esta subsección se ilustran las funciones monogénicas esféricas utilizando simulaciones hechas en Maple. Las siguientes figuras permiten visualizar, respectivamente, el cuadrado de la función esférica  $e\mathbf{X}_4^{(1)}(\theta, \varphi)$  y de sus componentes en el dominio espacial con y sin «altura», donde el color es determinado por el valor de la función.

### 3. Definición y propiedades de los RQZSPs

En esta sección presentamos un conjunto de polinomios esféricos de Zernike generalizados con valores en los cuaterniones reducidos (RQZSPs) y mencionamos sus propiedades más importantes. La consideración del sistema estándar de ZSPs para su construcción nos permite utilizar algunos resultados conocidos como su ortogonalidad en la bola unitaria. Como consecuencia de la interrelación entre los ZSPs y las funciones asociadas de Legendre, los polinomios esféricos de Zernike con valores

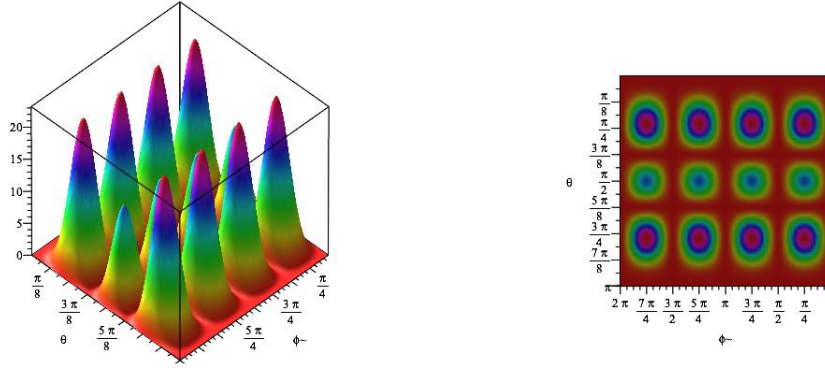


Figura 3.  $|[{}^e\mathbf{X}_4^{(1)}(\theta, \varphi)]_2|^2$ .

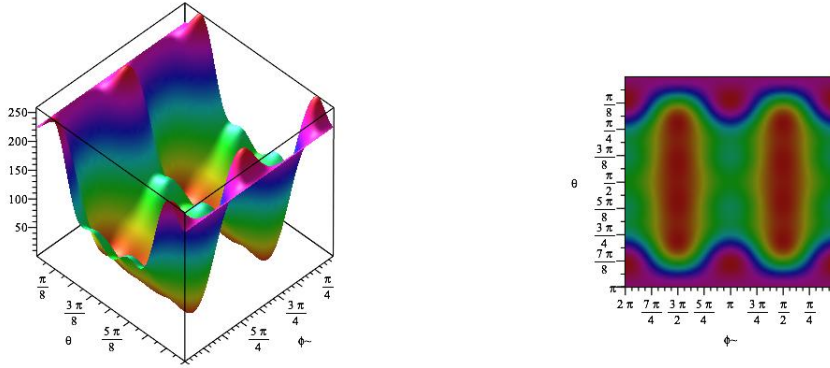


Figura 4.  $|{}^e\mathbf{X}_4^{(1)}(\theta, \varphi)|^2$ .

en  $\mathcal{A}$  se relacionan también con las funciones de Legendre (véase la proposición 3.6).

### 3.1 Los RQZSPs

La estrategia adoptada para la construcción de los RQZSPs es la siguiente: comenzamos por considerar el sistema ortogonal completo de las funciones monogénicas esféricas

$$\{ {}^e\mathbf{X}_l^{(m)}, {}^o\mathbf{X}_l^{(m)} : m = 0, \dots, l + 1; l = 0, 1, \dots \}$$

como el conjunto deseado de las funciones angulares; a continuación multiplicamos las expresiones resultantes por los factores subyacentes de normalización y los polinomios radiales dados por (9). Siguiendo esta idea, así llegamos a la siguiente definición:

**Definición 3.1.** Sean  $n$  y  $l$  números enteros tales que  $n - l$  es par y no negativo. Para  $m = 0, \dots, l + 1$  ( $l = 0, 1, \dots$ ) los polinomios de Zernike esféricos que toman valores en los cuaterniones reducidos (RQZSPs)

están definidos por

$$\begin{cases} e\mathbf{Z}_{n,l}^{(m)}(\rho, \theta, \varphi) \equiv M_l^{(m)} R_n^{(l)}(\rho) e\mathbf{X}_l^{(m)}(\theta, \varphi) \\ o\mathbf{Z}_{n,l}^{(m)}(\rho, \theta, \varphi) \equiv M_l^{(m)} R_n^{(l)}(\rho) o\mathbf{X}_l^{(m)}(\theta, \varphi) \end{cases} \quad (29)$$

donde los polinomios radiales  $R_n^{(l)}(\rho)$  están dados por (9) y  $M_l^{(m)} := \|e\mathbf{X}_l^{(m)}\|_{L^2(S, \mathcal{A}, \mathbb{R})}^{-1} = \|o\mathbf{X}_l^{(m)}\|_{L^2(S, \mathcal{A}, \mathbb{R})}^{-1}$  es el factor de normalización.

Basado en las representaciones anteriores formulamos un resultado preliminar.

**Lema 3.2.** *Sean  $n$  y  $l$  números enteros tales que  $n - l$  es par y no negativo. Los polinomios  $e\mathbf{Z}_{n,l}^{(m)}$  y  $o\mathbf{Z}_{n,l}^{(m)}$  son nulos para  $m \geq l + 2$ .*

Por simplicidad, para cada  $n, l \in \mathbb{N}_0$  denotamos por  $\mathbf{Z}_{n,l}^{(m)}$  cualquier polinomio del conjunto

$$\{e\mathbf{Z}_{n,l}^{(m)}, o\mathbf{Z}_{n,l}^{(m)} : m = 0, \dots, l + 1\}$$

tales que  $n - l$  es par y no negativo.

**Observación 3.3.**

- Los RQZSPs (29) coinciden con las funciones monogénicas esféricas  $\mathbf{X}_n^{(m)}$  sobre la esfera, salvo por una constante real que depende de  $l, m$  y  $n$ .
- En el caso en que  $l = m = 0$  los polinomios  $e\mathbf{Z}_{n,0}^{(0)}$  coinciden con los polinomios de Zernike esféricos clásicos  $eZ_{n,0}^{(0)}$  y, consecuentemente, no dependen de las variables  $\theta$  y  $\varphi$ . Además, observamos que cuando  $m = l + 1$  los polinomios resultantes  $e\mathbf{Z}_{n,l}^{(l+1)}$  y  $o\mathbf{Z}_{n,l}^{(l+1)}$  no tienen parte escalar.
- Con excepción de  $n$  igual a  $l$ , los polinomios  $\mathbf{Z}_{n,l}^{(m)}$  no son, en general, homogéneos. Sin embargo, estos polinomios pueden ser reescritos como un producto de polinomios radiales de orden  $n - l$  por polinomios monogénicos homogéneos:

$$\mathbf{Z}_{n,l}^{(m)}(\rho, \theta, \varphi) = M_l^{(m)} \frac{R_n^{(l)}(\rho)}{\rho^l} \rho^l \mathbf{X}_l^{(m)}(\rho, \theta, \varphi). \quad (30)$$

Ahora vamos a exponer la ortogonalidad de los RQZSPs.

**Teorema 3.4.** *Para cualesquiera números enteros  $n_1, n_2, l_1, l_2$  tales que  $n_1 - l_1$  y  $n_2 - l_2$  son ambos pares y no negativos, los polinomios (29) son ortonormales en la bola unitaria con respecto al producto interno*

escalar (19):

$$\begin{aligned} \text{Sc} \int_B \overline{\mathbf{Z}_{n_1, l_1}^{(m_1)}} \mathbf{Z}_{n_2, l_2}^{(m_2)} dV &= M_{l_1}^{(m_1)} M_{l_2}^{(m_2)} \left( \int_0^1 R_{n_1}^{(l_1)}(\rho) R_{n_2}^{(l_2)}(\rho) \rho^2 d\rho \right) \\ &\quad \times \text{Sc} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \overline{\mathbf{X}_{l_1}^{(m_1)}(\theta, \varphi)} e \mathbf{X}_{l_2}^{(m_2)}(\theta, \varphi) \text{sen}\theta d\theta d\varphi \\ &= \delta_{n_1, n_2} \delta_{l_1, l_2} \delta_{m_1, m_2}. \end{aligned}$$

**Observación 3.5.** Hay precisamente  $(2 \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 3)(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)$  RQZSPs de grado  $n$  linealmente independientes.

Los RQZSPs están representados en las tablas siguientes para los casos  $n = 0, 1, 2$  en coordenadas cartesianas.

### 3.2 Relaciones de recurrencia

En la proposición siguiente demostramos las relaciones importantes entre los RQZSPs y los ZSPs clásicos.

**Proposición 3.6.** Sean  $n$  y  $l$  números enteros tales que  $n - l$  es par y no negativo. Los polinomios (29) se representan de la siguiente forma:

$$e \mathbf{Z}_{n, l}^{(0)} := \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} e Z_{n, l}^{(0)} + \sqrt{\frac{l}{2(2l+1)}} \left[ e Z_{n, l}^{(1)} \mathbf{i} + o Z_{n, l}^{(1)} \mathbf{j} \right]$$

$$\begin{aligned} e \mathbf{Z}_{n, l}^{(m)} &:= \sqrt{\frac{(l+1-m)(l+1+m)}{(l+1)(2l+1)}} e Z_{n, l}^{(m)} \\ &\quad + \sqrt{\frac{(l+1-m)(l-m)}{4(l+1)(2l+1)}} \left[ e Z_{n, l}^{(m+1)} \mathbf{i} + o Z_{n, l}^{(m+1)} \mathbf{j} \right] \\ &\quad - \sqrt{(1+\delta_{0, m-1}) \frac{(l+1+m)(l+m)}{4(l+1)(2l+1)}} \left[ e Z_{n, l}^{(m-1)} \mathbf{i} - o Z_{n, l}^{(m-1)} \mathbf{j} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} o \mathbf{Z}_{n, l}^{(m)} &:= \sqrt{\frac{(l+1-m)(l+1+m)}{(l+1)(2l+1)}} o Z_{n, l}^{(m)} \\ &\quad + \sqrt{\frac{(l+1-m)(l-m)}{4(l+1)(2l+1)}} \left[ o Z_{n, l}^{(m+1)} \mathbf{i} - e Z_{n, l}^{(m+1)} \mathbf{j} \right] \\ &\quad - \sqrt{(1+\delta_{0, m-1}) \frac{(l+1+m)(l+m)}{4(l+1)(2l+1)}} \left[ o Z_{n, l}^{(m-1)} \mathbf{i} + e Z_{n, l}^{(m-1)} \mathbf{j} \right] \end{aligned}$$

para  $m = 1, \dots, l+1$  ( $l = 0, 1, \dots$ ).

Grado Radial ( $n$ )	Orden Polar ( $l$ )	Orden Azimut ( $m$ )	RQZSPs
0	0	0	$e\mathbf{Z}_{0,0}^{(0)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}$
		1	$e\mathbf{Z}_{0,0}^{(1)} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\mathbf{i}$ $o\mathbf{Z}_{0,0}^{(1)} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\mathbf{j}$
1	1	0	$e\mathbf{Z}_{1,1}^{(0)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2\pi}}(2x + y\mathbf{i} + z\mathbf{j})$
		1	$e\mathbf{Z}_{1,1}^{(1)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(y - x\mathbf{i})$ $o\mathbf{Z}_{1,1}^{(1)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(z - x\mathbf{j})$
		2	$e\mathbf{Z}_{1,1}^{(2)} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(y\mathbf{i} - z\mathbf{j})$ $o\mathbf{Z}_{1,1}^{(2)} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(z\mathbf{i} + y\mathbf{j})$
2	0	0	$e\mathbf{Z}_{2,0}^{(0)} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{\pi}}(-3 + 5x^2 + 5y^2 + 5z^2)$
		1	$e\mathbf{Z}_{2,0}^{(1)} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{\pi}}(-3 + 5x^2 + 5y^2 + 5z^2)\mathbf{i}$ $o\mathbf{Z}_{2,0}^{(1)} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{\pi}}(-3 + 5x^2 + 5y^2 + 5z^2)\mathbf{j}$
	2	0	$e\mathbf{Z}_{2,2}^{(0)} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{21}{\pi}}[(2x^2 - y^2 - z^2) + 2xy\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j}]$
		1	$e\mathbf{Z}_{2,2}^{(1)} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{14}{\pi}}[8xy + (-4x^2 + 3y^2 + z^2)\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j}]$ $o\mathbf{Z}_{2,2}^{(1)} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{14}{\pi}}[8xz + 2yz\mathbf{i} + (-4x^2 + y^2 + 3z^2)\mathbf{j}]$
		2	$e\mathbf{Z}_{2,2}^{(2)} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{35}{\pi}}(y^2 - z^2 - 2xy\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j})$ $o\mathbf{Z}_{2,2}^{(2)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{35}{\pi}}(yz - xz\mathbf{i} - xy\mathbf{j})$
		3	$e\mathbf{Z}_{2,2}^{(3)} = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{210}{\pi}}[(y^2 - z^2)\mathbf{i} - 2yz\mathbf{j}]$ $o\mathbf{Z}_{2,2}^{(3)} = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{210}{\pi}}[2yz\mathbf{i} + (y^2 - z^2)\mathbf{j}]$

*Demostración.* La prueba utiliza la definición 3.1 y las representaciones (27)–(28); además, tenemos que  $M_l^{(m)} = N_l^{(m)} \sqrt{\frac{l+1-m}{(l+1)(2l+1)(l+1+m)}}$ .  $\square$

Para motivar la importancia de las expresiones anteriores, a continuación ilustramos relaciones de recurrencia entre los RQZSPs.

**Proposición 3.7.** Sean  $n$  y  $l$  números enteros tales que  $n - l$  es par y no negativo. Los polinomios (29) satisfacen las siguientes relaciones de



recurrencia:

$$\begin{aligned}
e_{\mathbf{Z}_{n,l}}^{(0)} &= \sqrt{\frac{l+1}{2(l+2)}} \left[ e_{\mathbf{Z}_{n,l}}^{(1)} \mathbf{i} + o_{\mathbf{Z}_{n,l}}^{(1)} \mathbf{j} \right] \\
e_{\mathbf{Z}_{n,l}}^{(m)} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(1+\delta_{0,m-1})(l+1+m)}{l+2-m}} \left( e_{\mathbf{Z}_{n,l}}^{(m-1)} \mathbf{i} - o_{\mathbf{Z}_{n,l}}^{(m-1)} \mathbf{j} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l+1-m}{l+m+2}} \left( e_{\mathbf{Z}_{n,l}}^{(m+1)} \mathbf{i} + o_{\mathbf{Z}_{n,l}}^{(m+1)} \mathbf{j} \right) \\
o_{\mathbf{Z}_{n,l}}^{(m)} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(1+\delta_{0,m-1})(l+1+m)}{l+2-m}} \left( o_{\mathbf{Z}_{n,l}}^{(m-1)} \mathbf{i} + e_{\mathbf{Z}_{n,l}}^{(m-1)} \mathbf{j} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l+1-m}{l+m+2}} \left( o_{\mathbf{Z}_{n,l}}^{(m+1)} \mathbf{i} - e_{\mathbf{Z}_{n,l}}^{(m+1)} \mathbf{j} \right)
\end{aligned}$$

para  $m = 1, \dots, l+1$  ( $l = 0, 1, \dots$ ). En estas condiciones, las relaciones de recurrencia anteriores permiten encontrar todas las funciones de valor inicial

$$e_{\mathbf{Z}_{0,0}}^{(0)} = e_{\mathbf{Z}_{0,0}}^{(1)} \mathbf{i} = o_{\mathbf{Z}_{0,0}}^{(1)} \mathbf{j} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \equiv e_{\mathbf{Z}_{0,0}}^{(0)}. \quad (31)$$

*Demostración.* Por simplicidad presentamos solamente los cálculos para los polinomios  $e_{\mathbf{Z}_{n,l}}^{(m)}$  ( $m \geq 1$ ). Para empezar definimos

$$A_1(m, l) := -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(1+\delta_{0,m-1})(l+1+m)}{l+2-m}}$$

y

$$A_2(m, l) := \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l+1-m}{l+2+m}}.$$

Usando las expresiones anteriores, obtenemos

$$\begin{aligned}
& A_1(m, l) \left( e_{\mathbf{Z}_{n,l}^{(m-1)}} \mathbf{i} - o_{\mathbf{Z}_{n,l}^{(m-1)}} \mathbf{j} \right) + A_2(m, l) \left( e_{\mathbf{Z}_{n,l}^{(m+1)}} \mathbf{i} + o_{\mathbf{Z}_{n,l}^{(m+1)}} \mathbf{j} \right) \\
&= e_{\mathbf{Z}_{n,l}^{(m)}} \left( -A_1(m, l) \sqrt{\frac{(l+2-m)(l-m+1)}{(l+1)(2l+1)}} \right. \\
&\quad \left. + A_2(m, l) \sqrt{\frac{(1+\delta_{0,m})(l+2+m)(l+1+m)}{(l+1)(2l+1)}} \right) \\
&+ \left[ e_{\mathbf{Z}_{n,l}^{(m-1)}} \mathbf{i} - o_{\mathbf{Z}_{n,l}^{(m-1)}} \mathbf{j} \right] \sqrt{\frac{(l+2-m)(l+m)}{(l+1)(2l+1)}} A_1(m, l) \\
&+ \left[ e_{\mathbf{Z}_{n,l}^{(m+1)}} \mathbf{i} + o_{\mathbf{Z}_{n,l}^{(m+1)}} \mathbf{j} \right] \sqrt{\frac{(l-m)(l+2+m)}{(l+1)(2l+1)}} A_2(m, l) \\
&:= e_{\mathbf{Z}_{n,l}^{(m)}}, \quad m = 1, \dots, l+1. \quad \square
\end{aligned}$$

Como consecuencia, obtenemos relaciones de recurrencia adicionales para los RQZSPs.

**Corolario 3.8.** *Sean  $n$  y  $l$  números enteros tales que  $n-l$  es par y no negativo.*

1. *Los polinomios (29) satisfacen la relación de recurrencia:*

$$\sqrt{\frac{2(2l+1)}{l+1}} e_{\mathbf{Z}_{n,l}^{(0)}} - e_{\mathbf{Z}_{n,l}^{(1)}} \mathbf{i} - o_{\mathbf{Z}_{n,l}^{(1)}} \mathbf{j} = 0,$$

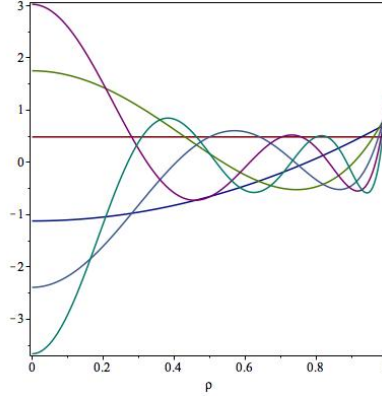
$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{(1+\delta_{0,m-1})(l+1+m)}{l+2-m}} \left( e_{\mathbf{Z}_{n,l}^{(m-1)}} - o_{\mathbf{Z}_{n,l}^{(m-1)}} \mathbf{k} \right) \\
&\quad - e_{\mathbf{Z}_{n,l}^{(m)}} \mathbf{i} - o_{\mathbf{Z}_{n,l}^{(m)}} \mathbf{j} = 0
\end{aligned}$$

para  $m = 1, \dots, l+1$  ( $l = 0, 1, \dots$ ), de valor inicial (31);

2. *Para cada  $n \geq 2$ , los polinomios (29) satisfacen*

$$C_1(n, l) \mathbf{Z}_{n+2,l}^{(m)} + C_2(n, l) \mathbf{Z}_{n-2,l}^{(m)} = D(n, l, \rho) \mathbf{Z}_{n,l}^{(m)},$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  están dados por (12)–(13) y el polinomio  $D(n, l, \rho)$  por (14).



**Figura 5.** Los primeros  ${}^Q\mathbf{Z}_{2k,0}^{(0)}(\rho)$  para  $k \in \{0, \dots, 5\}$ .

## 4. Definición y propiedades de los QZSPs

### 4.1 Los QZSPs

Ahora vamos a considerar la extensión de los resultados anteriores; en particular introducimos los polinomios de Zernike esféricos con valores en los cuaterniones definidos del siguiente modo:

**Definición 4.1.** Sean  $n$  y  $l$  números enteros tales que  $n - l$  es par y no negativo. Para  $m = 0, \dots, l$  ( $l = 0, 1, \dots$ ) los polinomios definidos por

$${}^Q\mathbf{Z}_{n,l}^{(m)}(\rho, \theta, \varphi) := \sqrt{\frac{l+1}{2(l+2+m)}} \left[ e\mathbf{Z}_{n,l}^{(m+1)}(\rho, \theta, \varphi)\mathbf{i} + o\mathbf{Z}_{n,l}^{(m+1)}(\rho, \theta, \varphi)\mathbf{j} \right] \quad (32)$$

se llaman polinomios de Zernike cuaterniónicos esféricos (QZSPs).

La combinación de los RQZSPs en la definición anterior fue elegida debido a la simetría subyacente, aunque podrían considerarse otras combinaciones de esos polinomios.

Basado en las representaciones anteriores formulamos un resultado preliminar.

**Lema 4.2.** Sean  $n$  y  $l$  números enteros tales que  $n - l$  es par y no negativo. Los polinomios  ${}^Q\mathbf{Z}_{n,l}^{(m)}$  son nulos para  $m \geq l + 1$ .

**Observación 4.3.** En el caso en que  $l = m = 0$  los polinomios  ${}^Q\mathbf{Z}_{n,0}^{(0)}$  no dependen de las variables  $\theta$  y  $\varphi$ .

Los QZSPs están representados en la tabla siguiente para los casos  $n = 0, 1, 2$  en coordenadas cartesianas.

Grado Radial ( $n$ )	Orden Polar ( $l$ )	Orden Azimut ( $m$ )	QZSPs
0	0	0	$Q\mathbf{Z}_{0,0}^{(0)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}$
1	1	0	$Q\mathbf{Z}_{1,1}^{(0)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2\pi}}(2x + y\mathbf{i} + z\mathbf{j})$
		1	$Q\mathbf{Z}_{1,1}^{(1)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(y - z\mathbf{k})$
2	0	0	$Q\mathbf{Z}_{2,0}^{(0)} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{\pi}}(-3 + 5x^2 + 5y^2 + 5z^2)$
	2	0	$Q\mathbf{Z}_{2,2}^{(0)} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{21}{\pi}}[(2x^2 - y^2 - z^2) + 2xy\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j}]$
		1	$Q\mathbf{Z}_{2,2}^{(1)} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{21}{2\pi}}[4xy + (y^2 - z^2)\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - 2xz\mathbf{k}]$
		2	$Q\mathbf{Z}_{2,2}^{(2)} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{210}{\pi}}[(y^2 - z^2) - 2yz\mathbf{k}]$

La proposición siguiente expone las relaciones importantes entre los QZSPs y los ZSPs clásicos, como consecuencia de la definición 4.1 y de la proposición 3.6.

**Proposición 4.4.** Sean  $n$  y  $l$  números enteros tales que  $n - l$  es par y no negativo. Los polinomios  $Q\mathbf{Z}_{n,l}^{(m)}$  se representan de la siguiente forma:

$$Q\mathbf{Z}_{n,l}^{(m)} = \sqrt{\frac{(1 + \delta_{0,m})(l + 1 + m)}{2(2l + 1)}} \left[ {}^e Z_{n,l}^{(m)} - {}^o Z_{n,l}^{(m)} \mathbf{k} \right] \\ + \sqrt{\frac{l - m}{2(2l + 1)}} \left[ {}^e Z_{n,l}^{(m+1)} \mathbf{i} + {}^o Z_{n,l}^{(m+1)} \mathbf{j} \right],$$

para  $m = 0, \dots, l$  ( $l = 0, 1, \dots$ ).

**Observación 4.5.** El número total de QZSPs de grado  $n$  linealmente independientes es  $(1 + \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor)(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)$ .

## 4.2 Simulaciones de los QZSPs

En esta subsección se ilustran algunos QZSPs. Las siguientes figuras permiten visualizar, respectivamente, el cuadrado de la función  $Q\mathbf{Z}_{8,4}^{(1)}(1, \theta, \varphi)$  y de sus componentes en el dominio espacial con y sin «altura».

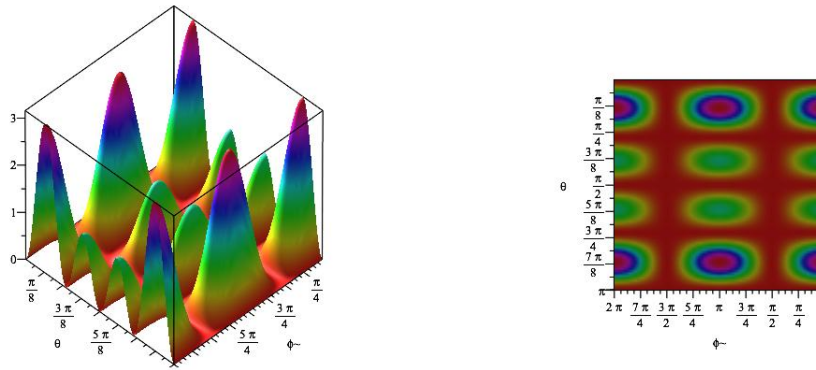


Figura 6.  $|Sc({}^QZ_{8,4}^{(1)}(1, \theta, \varphi))|^2$ .

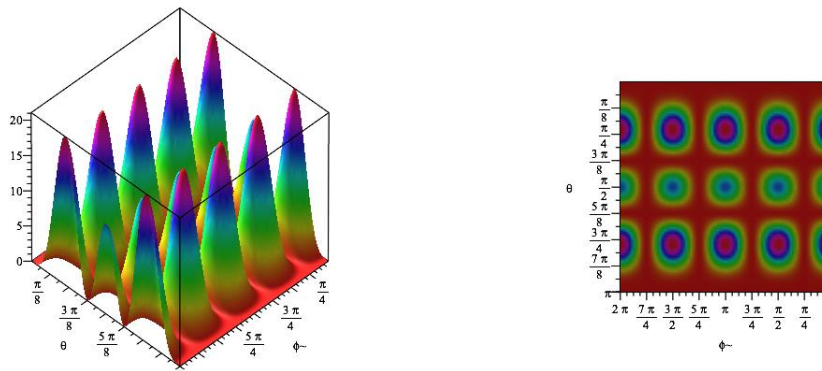


Figura 7.  $|[{}^QZ_{8,4}^{(1)}(1, \theta, \varphi)]_1|^2$ .

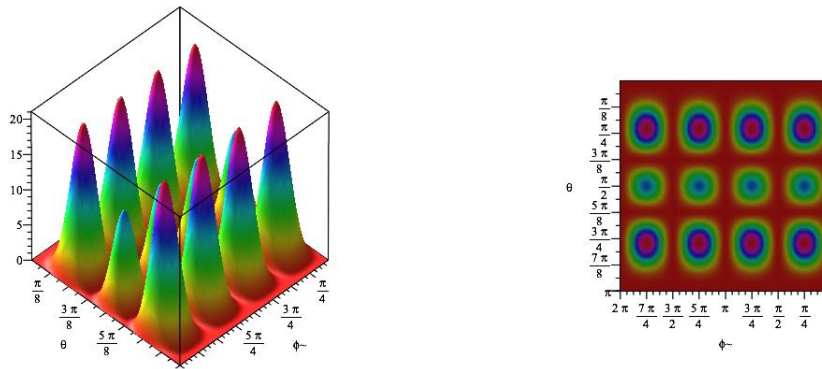


Figura 8.  $|[{}^QZ_{8,4}^{(1)}(1, \theta, \varphi)]_2|^2$ .

### 4.3 Relaciones de recurrencia y propiedades

A continuación, resumimos las propiedades fundamentales de los QZSPs.

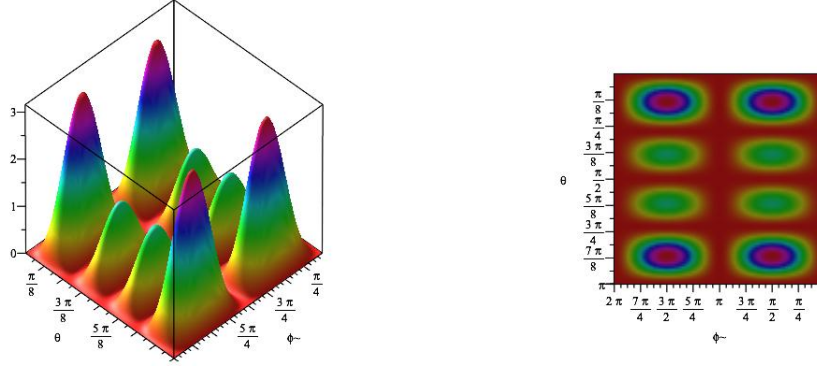


Figura 9.  $|[{}^Q\mathbf{Z}_{8,4}^{(1)}(1, \theta, \varphi)]_3|^2$ .

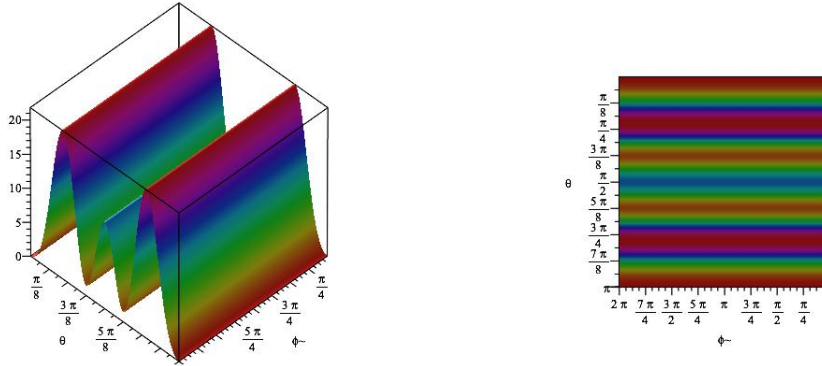


Figura 10.  $|{}^Q\mathbf{Z}_{8,4}^{(1)}(1, \theta, \varphi)|^2$ .

**Teorema 4.6.** Para cualesquiera números enteros  $n$  y  $l$  tales que  $n - l$  es par y no negativo, los QZSPs satisfacen las siguientes propiedades:

(i) paridad dependiendo de  $n$  o  $l$ :

$${}^Q\mathbf{Z}_{n,l}^{(m)}(\rho, \theta, \varphi) = (-1)^n {}^Q\mathbf{Z}_{n,l}^{(m)}(-\rho, \theta, \varphi) = (-1)^l {}^Q\mathbf{Z}_{n,l}^{(m)}(-\rho, \theta, \varphi);$$

(ii) soluciones de la ecuación diferencial homogénea de segundo orden:

$$\left[ \Delta - \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 - 3 \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) + n(n+3) \right] {}^Q\mathbf{Z}_{n,l}^{(m)} = 0; \quad (33)$$

(iii) relación de recurrencia:

$$C_1(n, l) {}^Q\mathbf{Z}_{n+2,l}^{(m)} + C_2(n, l) {}^Q\mathbf{Z}_{n-2,l}^{(m)} = D(n, l, \rho) {}^Q\mathbf{Z}_{n,l}^{(m)}$$

para cada  $n \geq 2$  y  $m = 0, \dots, l$  ( $l = 0, 1, \dots$ ), donde  $C_1$  y  $C_2$  están dados por (12)–(13) y el polinomio  $D(n, l, \rho)$  por (14);

(iv) *ortonormalidad en la bola unitaria respecto al producto interno cuaterniónico (20):*

$$\begin{aligned}
\int_B \overline{Q\mathbf{Z}_{n_1, l_1}^{(m_1)}} Q\mathbf{Z}_{n_2, l_2}^{(m_2)} dV &= \int_B \left[ \text{Sc}(Q\mathbf{Z}_{n_1, l_1}^{(m_1)}) \text{Sc}(Q\mathbf{Z}_{n_2, l_2}^{(m_2)}) + [Q\mathbf{Z}_{n_1, l_1}^{(m_1)}]_1 [Q\mathbf{Z}_{n_2, l_2}^{(m_2)}]_1 \right. \\
&\quad \left. + [Q\mathbf{Z}_{n_1, l_1}^{(m_1)}]_2 [Q\mathbf{Z}_{n_2, l_2}^{(m_2)}]_2 + [Q\mathbf{Z}_{n_1, l_1}^{(m_1)}]_3 [Q\mathbf{Z}_{n_2, l_2}^{(m_2)}]_3 \right] dV \\
&\quad + \int_B \left[ \text{Sc}(Q\mathbf{Z}_{n_1, l_1}^{(m_1)}) [Q\mathbf{Z}_{n_2, l_2}^{(m_2)}]_1 - [Q\mathbf{Z}_{n_1, l_1}^{(m_1)}]_1 \text{Sc}(Q\mathbf{Z}_{n_2, l_2}^{(m_2)}) \right. \\
&\quad \left. - [Q\mathbf{Z}_{n_1, l_1}^{(m_1)}]_2 [Q\mathbf{Z}_{n_2, l_2}^{(m_2)}]_3 + [Q\mathbf{Z}_{n_1, l_1}^{(m_1)}]_3 [Q\mathbf{Z}_{n_2, l_2}^{(m_2)}]_2 \right] dV \\
&\quad + \int_B \left[ \text{Sc}(Q\mathbf{Z}_{n_1, l_1}^{(m_1)}) [Q\mathbf{Z}_{n_2, l_2}^{(m_2)}]_2 - [Q\mathbf{Z}_{n_1, l_1}^{(m_1)}]_2 \text{Sc}(Q\mathbf{Z}_{n_2, l_2}^{(m_2)}) \right. \\
&\quad \left. + [Q\mathbf{Z}_{n_1, l_1}^{(m_1)}]_1 [Q\mathbf{Z}_{n_2, l_2}^{(m_2)}]_3 - [Q\mathbf{Z}_{n_1, l_1}^{(m_1)}]_3 [Q\mathbf{Z}_{n_2, l_2}^{(m_2)}]_1 \right] dV \\
&\quad + \int_B \left[ \text{Sc}(Q\mathbf{Z}_{n_1, l_1}^{(m_1)}) [Q\mathbf{Z}_{n_2, l_2}^{(m_2)}]_3 - [Q\mathbf{Z}_{n_1, l_1}^{(m_1)}]_3 \text{Sc}(Q\mathbf{Z}_{n_2, l_2}^{(m_2)}) \right. \\
&\quad \left. - [Q\mathbf{Z}_{n_1, l_1}^{(m_1)}]_1 [Q\mathbf{Z}_{n_2, l_2}^{(m_2)}]_2 + [Q\mathbf{Z}_{n_1, l_1}^{(m_1)}]_2 [Q\mathbf{Z}_{n_2, l_2}^{(m_2)}]_1 \right] dV \\
&= \delta_{n_1, n_2} \delta_{l_1, l_2} \delta_{m_1, m_2},
\end{aligned}$$

donde  $n_1 - l_1$  y  $n_2 - l_2$  son ambos pares y no negativos.

## 5. Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado por la Asociación Mexicana de Cultura, A. C. Me gustaría dar un agradecimiento especial a la Profesora Claudia Gómez Wulschner por su apoyo en la esmerada revisión de este texto.

## Bibliografía

- [1] L. Andrews, *Special functions of mathematics for engineers*, SPIE Optical Engineering Press, Bellingham, Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [2] A. Bhatia y E. Wolf, «On the circle polynomials of Zernike and related orthogonal sets», *Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 50, 1954, 40–48.
- [3] I. Cação, «Constructive approximation by monogenic polynomials», tesis de doctorado, Universidade de Aveiro, 2004.
- [4] N. Canterakis, «3d zernike moments and zernike affine invariants for 3d image analysis and recognition», en *In 11th Scandinavian Conf. on Image Analysis*, 1999, 85–93.
- [5] G. Frobenius, «Über lineare Substitutionen und bilineare Formen», *J. Reine Angew. Math.*, vol. 84, 1878, 1–63.
- [6] K. Gürlebeck y W. Sprößig, *Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems*, Akademie Verlag, Berlin, 1989.

- [7] ———, *Quaternionic calculus for engineers and physicists*, John Wiley and Sons, Chichester, 1997.
- [8] V. Kravchenko, *Applied quaternionic analysis. Research and Exposition in Mathematics*, vol. 28, Lemgo: Heldermann Verlag, 2003.
- [9] H. Leutwiler, *Quaternionic analysis in  $\mathbb{R}^3$  versus its hyperbolic modification*, 193–211, Springer Netherlands, Dordrecht, 2001.
- [10] J. Morais, «Approximation by homogeneous polynomial solutions of the Riesz system in  $\mathbb{R}^3$ », tesis de doctorado, Bauhaus-Universität Weimar, 2009.
- [11] J. Morais y I. Cação, «Quaternion Zernike spherical polynomials», *Mathematics of Computation*, vol. 84, 2015, 1317–1337.
- [12] J. Morais, S. Georgiev y W. S. ig, *Real quaternionic calculus handbook*, Birkhäuser, Basel, 2014.
- [13] J. Morais y K. Gürlebeck, «Real-part estimates for solutions of the Riesz system in  $\mathbb{R}^3$ », *Complex Variables and Elliptic Equations*, vol. 57, núm. 5, 2012, 505–522.
- [14] B. Nijboer, «The diffraction theory of aberrations», tesis de doctorado, University of Groningen, Groningen, Netherlands, 1942.
- [15] G. Sansone, *Orthogonal functions*, Pure and Applied Mathematics, vol. IX, Interscience Publishers, New York, 1959.
- [16] A. Sudbery, «Quaternionic analysis», *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 85, 1979, 199–225.
- [17] W. Tango, «The circle polynomials of Zernike and their application in optics», *Appl. Phys.*, vol. 13, 1977, 327–332.
- [18] E. Whittaker y G. Watson, *A Course in Modern Analysis*, 3.<sup>a</sup> ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1920.
- [19] F. Zernike, «Diffraction theory of the knife-edge test and its improved version, the phase-contrast method», *Physica (Amsterdam)*, vol. 1, 1934, 689–704.
- [20] F. Zernike y H. Brinkman, «Hypersphärische funktionen und die in sphärischen Bereichen orthogonalen polynome», *Proc. Royal Acad. Amsterdam*, vol. 38, 1935, 161–170.