Miscelánea Matemática **36** (2002) 83–124 SMM

Riemann y los Fundamentos de la Geometría

Victor Tapia
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia
tapiens@ciencias.unal.edu.co

Resumen

El propósito principal de este trabajo es presentar una traducción de la tesis de Riemann de 1854. Nuestra motivación es el hecho que esta tesis no sólo marca el inicio de la geometría diferencial moderna sino también el hecho que muchas de las ideas fundamentales ya estaban contenidas ahí. Para motivar nuestro trabajo comenzamos con un bosquejo histórico de la geometría desde Euclides hasta Gauss. A continuación se presenta una reseña biográfica de Riemann. Posteriormente una reseña de la tesis de Riemann. Finalmente se presenta la traducción de la tesis.

1. Introducción

La geometría es una disciplina científica que tiene sus orígenes en el estudio de la estructura del espacio y desde este punto de vista tiene aspectos fuertemente enraizados en la física. Por lo tanto, los fundamentos de la geometría se deben estudiar tanto como una rama de la física como una rama de la matemática. Desde el punto de vista de la física la pregunta es cuál información con respecto a la naturaleza del espacio y del tiempo está dada por la experiencia y la observación. Desde el punto de vista de la matemática, nos preguntamos cómo esta información se puede formular y qué conclusiones lógicas se pueden obtener a partir de esta. Este cambio conceptual ocurre durante el siglo

XIX debido principalmente a los trabajos de Gauss y Riemann, y posteriormente a los desarrollos de Christoffel, Ricci y Levi–Civita, hasta llegar a los fundamentos de la geometría diferencial moderna con E. Cartan y Weyl. Por supuesto, desde un punto de vista contemporáneo resultaría inaceptable limitar la geometría de esta manera.

En este trabajo se presentan los aspectos más relevantes de la tesis de Riemann y su influencia en la geometría diferencial. En la preparación de este trabajo fueron extremadamente útiles los libros de Bell [Be37], Ewald [Ew96], Monastyrsky [Mo87] y White [Wh29].

Para evidenciar la importancia que significó el trabajo de Riemann en la sección 2 presentaremos brevemente los desarrollos en geometría hasta 1850. Continuaremos con una serie de antecedentes biográficos de Riemann en la sección 3. Un análisis de su tesis y su influencia sobre la geometría, y sobre la física, contemporánea lo haremos en la sección 4. Un breve estudio bibliográfico de la tesis de Riemann aparece en la sección 5. Finalmente, se incluye una traducción al español del trabajo de Riemann.

Con respecto a la traducción, nos hemos basado, principalmente, en la versión en inglés de Clifford [Cl73] dado que esta refleja mejor el espíritu de la época, aunque no hemos dejado de consultar las otras traducciones al inglés existentes. El texto original en alemán [Rie68] ha sido consultado cuando las aclaraciones lo hacían necesario. Por otra parte, nos hemos atenido fielmente al espíritu del texto original. Sin embargo, esto no significa que la traducción sea literal y en algunos casos hemos preferido lecturas alternativas que creemos expresan de mejor manera la intención del texto.

2. Bosquejo Histórico de la Geometría desde Euclides hasta comienzos del Siglo XIX

Para una descripción técnica, histórica y detallada, de la evolución de la geometría Euclideana a la no–Euclideana recomendamos Bonola [Bo12].

2.1. La Geometría Euclideana

Las primeras referencias a la geometría se pueden encontrar en Grecia en el siglo V antes de nuestra era. Los griegos comenzaron el estudio sistemático de objetos tales como líneas, planos, polígonos, secciones cónicas y esferas. Lograron, a partir de muy pocas suposiciones acerca de estos objetos, obtener un gran número de conclusiones. Las suposiciones de los griegos acerca de puntos, líneas y planos, involucraban una doble idealización de las relaciones entre puntos, barras rígidas y superficies planas. En primer lugar, se despreciaba la extensión de los puntos como también el grosor de las barras y de las superficies. En segundo lugar, se suponía que la longitud de las barras, rectas, se podía hacer tan grande como se quisiera.

Los resultados de los estudios geométricos en la antigua Grecia fueron resumidos por Euclides en su libro *Los Elementos*. Euclides (330–275 ane) vivió y trabajó en Alejandría. Por muchos siglos, sus *Elementos* fueron el paradigma del rigor matemático. Los mejores textos de geometría estaban escritos siguiendo el estilo de la obra de Euclides. Por lo tanto, la geometría de Euclides es llamada la vieja geometría, y es la que todavía se enseña en la escuela secundaria.

Euclides estructuró su geometría de acuerdo al método deductivo en el cual las definiciones, postulados y axiomas forman la base a los cuales se refieren los teoremas. Entre ellos el postulado de Euclides acerca de las líneas paralelas era especial. Euclides definió dos líneas rectas como paralelas si se encontraban en un mismo plano y si se prolongaban en forma indefinida en ambas direcciones no se encontraban en ninguna de las dos direcciones, es decir, no se intersectaban. Este resultado constituye lo que llamamos el postulado de Euclides y es la parte más difícil de la geometría de Euclides. Como se verá más adelante, este postulado no es suficientemente evidente como para ser aceptado sin prueba y, por otra parte, este postulado no se puede probar.

Para explicar la brecha lógica que existía en la estructura de la teoría de Euclides basta considerarla desde la perspectiva de la teoría Aristotélica, la cual era la epistemología mejor formulada de esa época. Aristóteles hizo una clara distinción entre conceptos "primitivos" y "derivados". La existencia de los conceptos "derivados" se debía probar, mientras que la existencia de los conceptos "primitivos" simplemente se suponía. Los postulados de Euclides funcionan para garantizar la existencia de los conceptos geométricos por medio de una construcción, por ejemplo, dibujando una línea recta desde un punto a otro, o dibujando un círculo con un centro dado y un segmento de línea dado como radio. Que los conceptos "derivados" existen se prueba por medio de una construcción que se puede reducir a los postulados, tal como la existencia del triángulo equilátero, lo cual se demuestra por medio de círculos.

Por otra parte, los griegos intentaron desarrollar la geometría a partir de supuestos que no involucraran suposiciones *a priori* acerca de la naturaleza de la geometría. Hoy sabemos que una teoría deductiva, tal como lo es la geometría, necesariamente contiene conceptos que, dentro de la teoría misma, quedan indefinidos, y de proposiciones que, dentro de esta misma teoría, no se pueden demostrar. Es este enfoque axiomático el que se haya contenido en *Los Elementos* de Euclides y que dominó la geometría hasta la Edad Media.

2.2. La Geometría en el Renacimiento

Hubo que esperar todavía hasta el siglo XVII, después de que los navegantes habían caracterizado los puntos sobre la superficie de la tierra por latitud y longitud, para que empezarán a aparecer cambios. Descartes y Fermat introdujeron métodos análogos en la geometría teórica. La aplicación del cálculo diferencial e integral a la geometría coordenada (o analítica) resultó en la descripción sistemática de las propiedades locales de las curvas, tales como sus pendientes, radios de curvatura, etc. Esta *geometría diferencial*, una generalización amplia de los resultados de Arquímedes, fue posteriormente extendida a superficies, principalmente por Gauss [Ga27]. Pero la geometría diferencial, por su misma naturaleza, está restringida a objetos que se pueden describir a través de los métodos del cálculo –esto es, objetos suaves que en todos los puntos tienen líneas o planos tangentes, curvaturas, etc.

Gerolamo Saccheri nació en 1667 en San Remo, entonces parte de la República de Génova. En 1685 ingresó a la Sociedad de Jesús. Mientras estaba en el Collegio di Brera, en Milán, se familiarizó con la matemática. Enseñó filosofía y apologética en Milán y en 1697 se trasladó a Pavía, donde llegó a ser profesor de matemática en la universidad. Murió en 1733. El tratado *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae Principia* [*Euclides vindicado de toda mancha*] (Milán, 1733) de Saccheri (año de su muerte) es el primero en que no se supone la validez del postulado de Euclides.

Saccheri habla de tres hipótesis: la del ángulo obtuso, la del ángulo recto y la del ángulo agudo, de las que una y sólo una ha de verificarse. Todas las demostraciones son correctas y en consecuencia todos los teoremas de Saccheri son válidos. Hoy sabemos que estas geometrías tienen la misma consistencia lógica que la geometría Euclideana. Saccheri demostró rigurosamente sus teoremas, pero nunca creyó que su nueva geometría estuviera exenta de contradicción.

La característica distintiva de los escritos geométricos de Saccheri se encuentra en su método de demostración lógica, el cual es simplemente un método particular de razonamiento, ya usado por Euclides, el cual consiste en suponer como hipótesis que la proposición que se va a probar es falsa, y de esta manera se llega a que debe ser verdadera. Adoptando esta idea Saccheri supone que el postulado de Euclides es falso y busca algún resultado que le permita afirmar la verdad del postulado.

El aporte más valioso y profundo de Saccheri a la resolución de la problemática planteada por el postulado de Euclides fue su descubrimiento de un método adecuado para asegurar que con éste se lograría el esclarecimiento de la cuestión propuesta.

Tanto en el *Euclides* como en los *Elementos* encontramos un sistema axiomático en el que los términos o conceptos son aprehendidos de la realidad y cuyos sucesivos teoremas enuncian proposiciones verdaderas del mundo real de la física. Hay que tener en cuenta esta filosofía de las matemáticas si queremos evaluar históricamente el progreso epistemológico aportado por la creación de las geometrías no–Euclideanas. Las actuales teorías de sistemas axiomáticos y el concepto más abstracto de una geometría matemática, se basan en conceptos que no son exclusivamente aprehendidos de la realidad física (aunque no prescindan totalmente de ella) y sus teoremas no tienen por qué enunciar necesariamente proposiciones verdaderas, sino solamente válidas. Por lo que respecta a su método, esta geometría no está necesariamente controlada por la realidad del mundo físico. Pues bien, la geometría actual es precisamente y en buena parte consecuencia de la emergencia de las geometrías no–Euclideanas.

La influencia de Saccheri sobre los creadores de la geometría hiperbólica es sustancial en el sentido de que hizo una contribución decisiva o más bien que él es un primer eslabón en el desarrollo y separación de las geometrías. La importancia del *Euclides ab omni naevo vindicatus* es que trata con una pregunta vieja y primordial para los fundamentos mismos de la geometría, y que contiene el método mismo y un comienzo notablemente exacto y extenso del desarrollo posterior de la geometría hiperbólica hecho simultáneamente por Gauss, Bolyai y Lobachevski. Una de las consecuencias inevitables del método introducido por Saccheri es que a la larga los matemáticos establecerían una nueva geometría que entraría en competición con la vieja geometría de Euclides con respecto a cuál es la verdadera.

Si se desea evaluar históricamente el progreso aportado por la creación de las geometrías no–Euclideanas, entonces no se puede olvidar que la teoría actual de sistemas axiomáticos formales y el concepto más abstracto de geometría como una ciencia matemática pura, independiente en su método del mundo externo, son en buena parte una consecuencia de esa creación.

2.3. La Geometría a Principios del Siglo XIX

La geometría no–Euclideana tiene su origen en los intentos de los geómetras por liberar a los *Elementos* del postulado o axioma de las líneas paralelas.

Las ideas desarrolladas por Gauss (1777–1855) penetraron casi todos los campos de la matemática contemporánea y dieron impulsos a mayores desarrollos. Gauss comenzó sus investigaciones sobre el postulado de Euclides en 1792. Probablemente en 1808, quizás ya en 1799, Gauss había ido mucho más allá que Saccheri en los desarrollos de la geometría no–Euclideana. En 1821, Gauss se enfrentó a problemas de geometría diferencial y publicó los resultados de su trabajo en 1827 en *Disquisitiones generales circa superficies curvas* [*Estudios Generales con Respecto a Superficies Curvas*] [Ga27]. Para esa época, ya estaba convencido de que el postulado de las paralelas de Euclides no se podía probar y que otra geometría, no–Euclideana,[1]era matemáticamente posible. Gauss fue el primero en darse cuenta de que tenía una geometría no–Euclideana consistente y bastante completa, la misma originada por Saccheri casi cien años antes. Sin embargo, Gauss no publicó nada al respecto.

Por una parte, Gauss estudió las superficies definidas en forma intrínseca –esto es, sin ninguna referencia al espacio en el cual estaban inmersas– y las consideró como generalizaciones del plano. Estas superficies están caracterizadas por el tensor métrico cuyas componentes, por su mismo carácter, dependen del sistema de coordenadas considerado. La gran contribución de Gauss fue el haber descubierto la existencia de un invariante diferencial que caracterizaba las propiedades de tal superficie y que no dependía de las coordenadas. Este invariante corresponde a lo que hoy en día llamamos curvatura. En el caso de una superficie

[1]El término “geometría no–Euclideana” fue acuñado por Gauss en 1824.

definida en forma extrínseca (un caso especial del caso intrínseco), es decir, a través de su inmersión en un espacio Euclideano, el invariante descubierto por Gauss es sólo el producto de los inversos de los radios de curvatura de la superficie. Por lo tanto, el invariante de Gauss es una medida de la curvatura de la superficie. Los desarrollos anteriores culminaron con el trabajo de Riemann, quien extendió la descripción anterior a espacios de n dimensiones. Los trabajos que marcaron este cambio radical son la tesis de Riemann *Acerca de las hipótesis en las cuales se basa la geometría* [Rie68], la cual nos ocupará por el resto de este trabajo, y *Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Ill^{ma} Academia Parisiensi propositae* [Rie61].

Un punto crucial es que, al menos hasta Gauss, el concepto de geometría era bastante simple en dos aspectos: primero, no distinguía, como se hace ahora, entre la geometría como una parte de la matemática pura, el cual es un tema bien delimitado creado o construido con términos definidos en forma precisa, y la geometría como parte de la física, lo cual es un tema bastante complejo que trata con el descubrimiento de algún tipo de propiedades del mundo exterior, sumergido en el espacio físico, lleno de materia, y que por lo tanto usa conceptos definidos en forma empírica. Segundo, debido a que la geometría estaba todavía en sus comienzos y debido a la identificación mencionada de los dos conceptos de geometría, sólo se consideraba la noción obvia de geometría que se obtenía a partir del movimiento de cuerpos rígidos en el espacio físico.

La idea de separar los dos conceptos de geometría y admitir que ambas geometrías son igualmente válidas aparece por primera vez en el trabajo de Riemann.

Gauss fue el primero en tener una visión clara de una geometría independiente del postulado de Euclides, pero esto permaneció por más de 30 años sin publicar y sólo lo reveló después de los trabajos de Lobachevski [Lo40] y Bolyai [Bo32].

La nueva geometría fue descubierta en forma independiente por el matemático húngaro János Bolyai (1802–1860). Su investigación original del problema de las paralelas fue publicada en 1832 en la forma de un apéndice al primer volumen de un curso de matemática escrito y publicado por su padre Farkas Bolyai (1775–1856). Por lo tanto, la investigación de Bolyai entró a la historia con el nombre de Apéndice. La primera reimpresión del Apéndice apareció en 1831. El Apéndice contiene una exposición elemental de los fundamentos de la nueva geometría. Bolyai escribió este artículo en latín.

Durante el siglo XIX el concepto de espacio se generalizó profundamente. Se encontró que se podían usar suposiciones incompatibles con aquellas de Euclides como fundamento para la construcción lógicamente consistente de nuevas geometrías. Estos sistemas (particularmente los desarrollados por Bolyai y Lobachewsky) fueron llamados geometrías no–Euclideanas.

El hecho mismo de que los innumerables intentos hechos para obtener una prueba del postulado de Euclides no llevaran al resultado deseado, sugiere que su demostración es imposible. De hecho, el instinto geométrico parece darnos evidencia de que una proposición, tan simple, si es demostrable, lo debe ser por medio de un argumento de igual simplicidad. Pero tales consideraciones no se pueden usar para obtener una prueba de la imposibilidad en cuestión.

Si se deja de lado el postulado de Euclides se puede construir un sistema geométrico en el cual no hay contradicciones. Esto parece probar la posibilidad lógica de la hipótesis no–Euclideana, y que el postulado de Euclides es independiente de los primeros principios de la geometría y por lo tanto no puede ser demostrado. Sin embargo, el hecho de que no hayan contradicciones no es suficiente para probar esto; se debe estar seguros de que, procediendo a lo largo de las mismas líneas, nunca se encontrarán tales contradicciones.

Se puede buscar una prueba geométrica de la dicha independencia. Para esto es necesario comenzar del principio de que las concepciones, obtenidas a partir de nuestra intuición, en forma independiente de la correspondencia que estas encuentren el el mundo externo, son *a priori* lógicamente posibles; y de este modo que la geometría Euclideana es lógicamente posible como también las deducciones que se obtienen a partir de este.

Los fundamentos de la geometría, a la manera desarrollada por Riemann, completan la prueba de la imposibilidad de esta demostración.

La imposibilidad de probar el postulado de Euclides se podía establecer sólo descubriendo una nueva geometría, no–Euclideana. Esto fue hecho por primera vez por Lobachevski.

El hecho de que diferentes tipos de geometría hayan sido desarrollados en la matemática moderna muestra claramente que no se puede decir que la matemática afirme la verdad de ningún conjunto particular de postulados geométricos; en todo lo que está interesada la matemática pura, y todo lo que puede establecer, son las consecuencias deductivas de conjuntos dados de postulados y de este modo la verdad necesaria de los teoremas siguientes con respecto a los postulados bajo consideración.

3. Antecedentes Biográficos

Por supuesto, existen muy buenas y completas biografías de Riemann [De92]. Aquí sólo presentamos algunos antecedentes cronológicos fundamentales de la vida de Riemann. Georg Friedrich Bernhard Riemann nació en Breselenz, cerca de Hannover, el 17 de Septiembre de 1826. Su interés por las matemáticas empezó aproximadamente a los 6 años. Bernhard no sólo resolvía todos los problemas que le proponían, sino que también inventaba algunos más difíciles sólo para molestar a sus hermanos. A los 10 años empezó a recibir clases de aritmética y geometría de un enseñante profesional, un tal Schulz, que tenía fama de buen profesor. Poco tiempo después Schulz estaba a la zaga de su pupilo, quien usualmente proponía mejores soluciones.

A los 14 años entró al Gimnasio[2] de Hannover y dos años después se trasladó al Gimnasio de Lüneburg. El director del gimnasio, Schmalfuss, observó el talento de Riemann para las matemáticas, le dió permiso de utilizar su biblioteca privada y lo eximió de asistir a las clases de matemáticas. Schmalfuss le había sugerido a Riemann que tomara algún libro de matemáticas para estudiarlo en privado. A Riemann eso le pareció muy excitante y, bajo la sugerencia de Schmalfuss, llevó la *Théorie des nombres* de Legendre. Seis días después Riemann devolvió el libro. Schmalfuss le preguntó: "¿Cuánto has leído?" Riemann esquivó la pregunta y simplemente expresó su admiración por el clásico de Legendre: "Es un libro maravilloso. Lo entendí." Al parecer, Riemann no sólo había entendido el libro, sino que había visualizado la manera de obtener resultados más generales. Posiblemente este es el origen del interés de Riemann por los números primos [Rie59].

Riemann no sólo estudió los trabajos matemáticos de Legendre. También se familiarizó con el cálculo y sus ramificaciones a través del estudio de los trabajos de Euler. En 1846 Riemann se matriculó en Gotinga para estudiar filología y teología. Pero le resultó imposible mantenerse alejado de las clases de matemáticas de Stern, acerca de la teoría de ecuaciones y de las integrales definidas, de las de Gauss, acerca del método de los mínimos cuadrados, y de las de Goldschmidt, sobre el magnetismo de la tierra.

[2]En el sistema educativo alemán el gimnasio (gymnasium) corresponde a una institución de formación superior anterior a la universidad.

Después de un año en Gotinga, en 1847 se trasladó a Berlín, atraído por la fama de Dirichlet, Jacobi, Steiner y Eisenstein, para recibir su iniciación en una matemática más nueva y vital. Con Jacobi aprendió mecánica avanzada y álgebra superior, con Dirichlet teoría de los números y análisis, con Steiner geometría moderna, y con Eisenstein, sólo tres años mayor que él, aprendió funciones elípticas.

Riemann regresó a Gotinga en 1849 para completar sus estudios de matemática para el doctorado. Sus intereses eran bastante amplios y dedicaba casi tanto tiempo a la física como a la matemática. Durante los últimos tres semestres en Gotinga Riemann siguió el curso de Weber sobre física experimental. A diferencia de muchos matemáticos que escriben de física, Riemann tenía un intuición educada acerca de lo que era importante en física, y posiblemente esta intuición se debía a su trabajo en el laboratorio y a su contacto con personas que eran más físicos que matemáticos. Fascinado por la física, Riemann abandonó momentáneamente la matemática y en el otoño de 1850 se incorporó al seminario de física–matemática apenas iniciado por Weber, Ulrich, Stern y Listing.

A comienzos de Noviembre de 1851 [Rie51] Riemann entregó su disertación de doctorado para que lo examinara Gauss: *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* (*Fundamentos para una teoría general de las funciones de una variable compleja*), donde se introduce el concepto de lo que hoy se conoce como superficie de Riemann. El informe oficial de Gauss a la Facultad de Filosofía de la Universidad de Gotinga es uno de los pocos pronunciamientos formales en los cuales Gauss muestra un entusiasmo poco común en él:

La disertación entregada por Riemann ofrece evidencia convincente de las investigaciones completas y penetrantes del autor en aquellos aspectos del tema tratado en la disertación, de una mente creativa, activa, verdaderamente matemática y de una **originalidad gloriosamente fértil**. *La presentación es directa y concisa y, en partes, bella. La mayoría de los lectores habrían preferido una mayor claridad de argumentos. El todo es un trabajo sustancial, valioso, que no sólo satisface los estándares exigidos para las disertaciones doctorales, sino que los excede.*

Un mes después Riemann pasó su examen final, que incluía la formalidad de una defensa pública de su disertación. El próximo paso era ser 'habilitado'como *Privatdozent*. Para su *Habilitationsschrift*[3] Riemann planeaba entregar una memoria sobre series trigonométricas (se-

[3] La 'habilitationsschrift', o ensayo de habilitación, se trataba de una segunda

ries de Fourier). Sin embargo, todavía tendría que esperar dos años y medio. Durante el otoño de 1852 Riemann disfrutó de la presencia de Dirichlet en Gotinga. A partir de 1853 Riemann se dedicó de lleno a la física–matemática. Al final del año, y después de muchos atrasos debidos a su pasión creciente por la física, finalmente había completado su ensayo de habilitación.

Todavía quedaba una **lección de prueba** antes de que se le pudiera dar la licencia de enseñar en la universidad. Para esta prueba había enviado tres títulos para que los colegas eligieran, con la esperanza de que seleccionarían uno de los dos primeros, en los cuales se había preparado. Pero en forma ingenua incluyó como tercera oferta un tópico sobre el cual Gauss había meditado por sesenta o más años –los fundamentos de la geometría– $\cdots$ y esto no lo había preparado. Sin duda, Gauss sintió curiosidad de ver qué es lo que la **originalidad gloriosamente fértil** de Riemann haría de un tema tan profundo. Para sorpresa de Riemann, Gauss eligió el tercer tópico como aquel en el cual Riemann debía probar su habilidad como enseñante ante el crítico profesorado.

La recepción del ensayo de habilitación de Riemann, el 10 de Junio de 1854, fue cordial. La preparación de la clase le había costado mucho trabajo dado que Riemann debía hacerla entendible aun a aquellos miembros del profesorado que poco sabían de matemáticas. Se debe mencionar que durante el siglo XIX (incluso en parte del siglo XX) los matemáticos pertenecían a las facultades de filosofía. Además de ser una de las obras maestras de las matemáticas, el ensayo de Riemann *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (*Acerca de las hipótesis en las cuales se basa la geometría*), también es un clásico de presentación. Según cuenta Dedekind, Gauss estaba entusiasmado [De92]:

> *Contra toda tradición Gauss seleccionó el tercero de los tres tópicos enviados por el candidato, con el deseo de ver cómo un tema tan difícil sería manejado por una persona tan joven. Gauss quedó sorprendido más allá de sus expectativas y, al regresar de la reunión del profesorado, le expresó a Weber su más alta admiración por las ideas presentadas por Riemann, hablando con un entusiasmo que era raro en Gauss.*

Cuando Dirichlet sucedió a Gauss en 1855, este urgió a las autoridades para que le dieran a Riemann un cargo de profesor asistente, pero las finanzas de la Universidad no lo permitían. No obstante, se le garantizó un pequeño estipendio anual [lo cual era mejor que la incertidumbre

tesis para obtener el permiso, o habilitación, de enseñar en una universidad.

de media docena de contribuciones voluntarias de los estudiantes].

En 1857 Riemann publicó su trabajo sobre funciones abelianas [Rie57]. Ese mismo año Riemann fue nombrado profesor asistente. En 1858 produjo su artículo sobre electrodinámica [Rie58]. Dirichlet, quien siempre había apreciado a Riemann, murió en mayo de 1859. Este interés de Dirichlet y la reputación creciente de Riemann hicieron que las autoridades universitarias promovieran a Riemann, como justo sucesor de Dirichlet, a profesor ordinario. De este modo, Riemann fue el segundo sucesor de Gauss.

Legendre tenía una fórmula empírica para estimar el número aproximado de números primos menores que un cierto número. En 1859 Riemann presentó una hipótesis que mejoraba los resultados de Legendre: *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (*Acerca del número de números primos menores que un número dado*) [Rie59]. El problema era obtener una fórmula que estableciera cuántos números primos hay menores que algún número dado n. Al intentar resolver este problema Riemann se encontró con la necesidad de investigar la serie infinita

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots ,$$

en la cual $s = u + iv$ es un número complejo, y que hoy se conoce como la 'función zeta de Riemann'.

En 1860 Riemann comenzó a trabajar sobre su memoria *Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Ill^{ma} Academia Parisiensi propositae* [Rie61], en la cual desarrolló algunos detalles relativos a formas diferenciales cuadráticas (lo cual está relacionado con su trabajo sobre los fundamentos de la geometría). Este trabajo estaba dirigido a la Academia de Ciencias de París. Riemann concursó por un premio que se otorgaría al autor del mejor trabajo sobre la distribución del calor en un sólido. El premio fue declarado desierto, y el texto de Riemann fue considerado poco explícito.

A partir de 1862 la salud de Riemann, ya de naturaleza débil, empeoró notablemente. En un intento por transcurrir algunos períodos en un clima más benigno, se trasladó a Italia en dos ocasiones entre 1862 y 1863. En 1866 regresa a Italia por tercera y última vez y fallece en una villa de Selasca, cercana al Lago Maggiore, al norte de Milán, el 20 de Julio. Riemann no alcanzó a redactar en detalle las demostraciones de sus resultados.

4. Importancia de la Tesis de Riemann

En la tesis de Riemann se hace distinción entre las que ahora se llaman propiedades *topológicas* y propiedades *métricas* del espacio; esta distinción le permitió a Riemann generalizar la geometría tradicional de dos maneras. En primer lugar, incluyó el estudio de los espacios tri–dimensionales en el estudio de variedades de dimensión n; en segundo lugar, observó que una misma variedad de dimensión n puede admitir diferentes métricas, lo cual da entonces origen a diferentes geometrías. De este modo el espacio Euclideano resulta ser un caso muy especial de una variedad topológica tri–dimensional de curvatura constante con tensor de curvatura nulo. La tesis de Riemann se divide en 3 partes, en las cuales se estudian, respectivamente, las propiedades topológicas, métricas y físicas de los espacios.

La tesis de Riemann se puede considerar como una gran generalización de las *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de Gauss. Es interesante observar que Gauss estaba presente cuando Riemann leyó su tesis. Cuando finalmente se publicó la tesis de Riemann esta fue rápidamente aceptada. Beltrami (1868), Christoffel y Lipschitz (1869), Schläfli (1871), Beez (1874), Voss (1880), Ricci (1884) y Killing (1885), estuvieron entre los primeros que entraron a este campo. En 1901 Ricci y Levi–Civita publicaron un resumen de su nuevo análisis tensorial.

4.1. El Concepto de Variedad

Riemann comienza introduciendo las nociones de *variedad continua* (I, § 1) y de *variedad de n dimensiones* (I, § 2). Su tratamiento de estos tópicos es intuitivo, quizás debido a que su tesis estaba concebida para una audiencia de no–matemáticos. Pero, a partir de este trabajo y de los resultados técnicos presentados en 1861, parece que el concepto de variedad que Riemann tenía en mente era esencialmente el concepto moderno –es decir, que las variedades están completamente caracterizadas por el hecho que, localmente, se parecen a $\mathbf{R}^n$.

Una *variedad* es un conjunto tal que cualquier elemento de la variedad queda completamente especificado al asignarle ciertos números, en un orden definido, correspondientes a propiedades 'numerables'de los elementos; la asignación en el orden dado corresponde a un orden pre–asignado de las propiedades 'numerables.Áunque esto puede ser menos comprensible que la definición de Riemann, no obstante es un punto de partida adecuado para trabajar, y todo esto se reduce a que una *variedad* es un conjunto de n–uplas ordenadas de números (x^μ), donde los paréntesis () indican que los números x^μ se deben escribir en el orden dado.

El número n de parámetros que aparece en cada una de estas n–uplas ordenadas es la *dimensión* de la variedad. De este manera, es posible volver a hablar de coordenadas, tal como lo hiciera Descartes. Si cada uno de los números en (x^μ) es un entero, o si es un elemento de algún conjunto enumerable, y si lo mismo se cumple para toda n–upla en el conjunto, entonces la variedad es *discreta*. Si los números x^μ pueden tomar valores *continuos* la variedad es *continua*.

Esta definición ignora –en forma deliberada– la cuestión de si 'la variedadés el conjunto de n–uplas ordenadas o si 'la variedadés algo 'representado poréstas n–uplas. De este modo, cuando se dice que (x, y) son las coordenadas de un punto en un plano, no se está interesado en saber qué es 'un punto en un plano', sino que se procede a trabajar con estos *pares ordenados de números* (x, y) donde x, y toman valores reales en forma independiente. Por otro lado, algunas veces puede ser ventajoso fijar nuestra atención en qué es lo que *representa* un símbolo tal como (x, y). De esta misma manera, la geometría ya no se preocupa de saber qué es el "espacio". Para un matemático moderno, el "espacio" es sólo una variedad numérica de la clase descrita anteriormente, y este concepto de espacio surgió de las "variedades" de Riemann.

Cabe hacer notar que el concepto de variedad fue introducido y desarrollado paulatinamente por Gauss, Riemann y Weyl. En 1930 E. Cartan precisa, generaliza y limita el concepto de variedad. Se puede concluir por lo tanto que en 1930 todavía no había consenso acerca del concepto de variedad. Por otra parte, el concepto de variedad actual data justamente de los años 30 cuando se consolida este concepto.

4.2. El Concepto de Distancia

Pasando a la medida, Riemann establece que "la medición consiste en una superposición de las magnitudes que se van a comparar. Si esto falta, las magnitudes se pueden comparar sólo cuando una es parte de otra, y entonces sólo se puede decidir el más o el menos, pero no el cuánto."

Riemann procedió a elaborar una definición de *distancia*, extraída de su concepto de medición, el cual mostró ser extremadamente útil tanto en física como en matemática. La proposición de Pitágoras que $c^2 = a^2 + b^2$, o $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, es la fórmula fundamental para la medición de distancias en un *plano*. ¿Cómo se generaliza esto a *superficies* *curvas*? A las líneas rectas en el plano corresponden geodésicas en la superficie; pero sobre una esfera, por ejemplo, la proposición Pitagórica no es cierta. Riemann generalizó la fórmula Pitagórica a cualquier variedad suponiendo que el elemento de línea infinitesimal está dado por una expresión homogénea de primer orden en los infinitesimales de las distancias.

Riemann imaginó que un punto x, en una vecindad bastante pequeña, está caracterizado por n funciones numéricas del punto, (x^μ), que llama *coordenadas locales* (y que generalizan las *coordenadas curvilíneas*), y que un punto *infinitesimalmente vecino* se escribe $(x^\mu + dx^\mu)$, donde, bajo cambios de coordenadas locales, los dx^μ se transforman por medio de la fórmula

$$dx^\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\, dx'^\nu \,.$$

Riemann exige entonces que el *elemento de arco ds* sea una función positiva homogénea de rango 1 con respecto a los dx, y de hecho se limita al caso más simple, aquel en el cual ds está dado por la relación

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \,, \tag{1}$$

donde los $g_{\mu\nu}$ son funciones de los x^μ tales que $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, y que la forma cuadrática $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ sea positiva, salvo que los dx sean todos nulos. El arco de una curva definido por las ecuaciones $x^\mu = x^\mu(t)$, $\mu = 1, \cdots, n$, en un intervalo $[a, b]$ es entonces, por definición,

$$s = \int_a^b \left(g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu\right)^{1/2}\, dt \,.$$

Esta definición permite a Riemann definir las *geodésicas* de sus *variedades* de la misma manera que sobre una superficie.

En la segunda parte de su tesis Riemann comienza considerando el problema de determinar la longitud de una curva de una manera que sea independiente de su posición (II, § 1). Esta parte de sus tesis desarrolla en forma explícita las ideas de Gauss sobre geometría diferencial. Antes de Gauss, los matemáticos habían estudiado las superficies curvas como objetos inmersos en el espacio Euclideano tri–dimensional. Gauss mostró cómo las propiedades geométricas de una superficie se podían obtener a partir de un estudio de las propiedades intrínsecas, locales, de la superficie, sin ninguna referencia al espacio ambiente [Ga27]. No es claro si Gauss se dió cuenta de que la elección de una métrica diferente llevaría a una geometría no–Euclideana. Aparentemente, tampoco se dió cuenta de que, debido a que las propiedades geométricas se podían definir en forma intrínseca, una superficie curva se podía considerar como un espacio por sí mismo. Sin embargo, Riemann sí llegó a ambas conclusiones.

Hemos considerado apropiado incluir algunos desarrollos con respecto a la definición de distancia los cuales fueron motivados por el interés del autor en desarrollar la geometría asociada a las formas de cuarto rango [Ta93, Ta96, Ta98]. Antes de comenzar un análisis es necesario advertir que el concepto de distancia que se usa en geometría diferencial es distinto del concepto más tradicional de distancia para el cual es válida la desigualdad triangular. De hecho, la desigualdad triangular es válida en espacios Euclideanos y otros espacios con propiedades similares pero esto es sólo una propiedad de estos espacios más que una condición que permita elaborar una definición adecuada de distancia.

Sean A y B dos puntos cualquiera sobre una variedad $\mathcal{M}$, y sean x^μ_A y x^μ_B sus coordenadas locales en un cierto sistema de coordenadas x^μ. A continuación consideremos una curva γ que una estos dos puntos. En coordenadas locales la curva γ está dada por $x^\mu(t)$, donde t es algún parámetro monótono (siempre creciente o decreciente) a lo largo de esta curva, y tal que

$$\begin{aligned} x^\mu(t_A) &= x^\mu_A\,, \\ x^\mu(t_B) &= x^\mu_B\,. \end{aligned}$$

A continuación se exige que la distancia sea aditiva. Esto significa que la distancia entre los dos puntos, A y B, medida a lo largo de la curva, se puede descomponer en la suma de las distancias entre A y un punto intermedio C, y entre C y el punto B, de modo tal que

$$d_{AB} = d_{AC} + d_{CB}\,.$$

Si se itera este procedimiento se concluye que d_{AB} se puede considerar como la suma de elementos infinitesimales de distancia y la expresión final, en el límite, debe estar dada por una integral

$$d_{AB}[t] = \int_A^B f[x(t)]\,dt\,, \tag{2}$$

donde $f[x(t)]$ es una función que depende del punto sobre la curva γ, es decir de las coordenadas x^μ, y posiblemente de las derivadas de x^μ con respecto a t, $\dot{x}^\mu = dx^\mu/dt, \ddot{x}^\mu = d^2x^\mu/dt^2, \cdots$; esta última dependencia se indica a través del paréntesis cuadrado.

El problema, por lo tanto, se traduce en determinar la función f (o funcional, debido a la aparición de derivadas de orden superior de x^μ) que aparece en (2). En otras palabras, se debe determinar cómo la función f depende de la curva γ. Para hacer esto se deben imponer algunas restricciones sobre f. En primer lugar, se supone que la distancia entre A y B no depende de la parametrización que se use a lo largo de la curva γ. Para esto se considera una segunda parametrización de la curva γ, $x^\mu(\tau)$, en términos de un parámetro τ. Entonces, se tiene

$$d_{AB}[\tau] = \int_A^B f[x(\tau)]\, d\tau\,.$$

Por lo tanto, la condición de independencia de la parametrización se escribe como

$$\int_A^B f[x(\tau)]\, d\tau = \int_A^B f[x(t)]\, dt\,.$$

Para que τ sea una parametrización válida de la curva γ es necesario que $\tau = \tau(t)$ sea una función suave y monótona de t. Esto nos permite escribir

$$\int_A^B f[x(\tau(t))] \left(\frac{d\tau}{dt}\right) dt = \int_A^B f[x(t)]\, dt\,.$$

Dado que el intervalo de integración es arbitrario, se debe tener

$$f[x(t)] = f[x(\tau(t))] \left(\frac{d\tau}{dt}\right)\,. \tag{3}$$

Para determinar la forma funcional de f recordemos la manera en que x^μ y sus derivadas se transforman bajo un cambio de parametrización. Se tiene

$$\begin{aligned}
x^\mu(t) &= x^\mu(\tau)\,,\\
\left(\frac{dx^\mu}{dt}\right)(t) &= \left(\frac{d\tau}{dt}\right)\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)(\tau)\,,\\
\left(\frac{d^2x^\mu}{dt^2}\right)(t) &= \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\right)(\tau) + \left(\frac{d^2\tau}{dt^2}\right)\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)(\tau)\,,
\end{aligned}$$

etc. Las derivadas de orden segundo y superior de x^μ involucran derivadas de orden segundo y superior de τ con respecto a t. Dado que en la condición (3) sólo aparecen primeras derivadas de τ con respecto a t la solución más sencilla es de la forma

$$f = f(x,\, \dot{x})\,.$$

Por lo tanto

$$f\left(x(t),\, \left(\frac{dx}{dt}\right)(t)\right) = f\left(x(\tau),\, \left(\frac{d\tau}{dt}\right)\left(\frac{dx}{d\tau}\right)(\tau)\right)\,,$$

y utilizando la condición (3) se obtiene la condición

$$f\left(x(\tau),\, \left(\frac{d\tau}{dt}\right)\left(\frac{dx}{d\tau}\right)(\tau)\right) = f\left(x(\tau),\, \left(\frac{dx}{d\tau}\right)(\tau)\right)\left(\frac{d\tau}{dt}\right)\,,$$

lo cual significa que f es una función homogénea de primer grado en los $\dot{x}$.

$$f(x,\, \lambda\, \dot{x}) = \lambda\, f(x,\, \dot{x})\,,$$

Ahora la relación para la distancia, ec. (2), se puede reescribir como

$$d_{AB} = \int_A^B f(x,\, \dot{x})\, dt = \int_A^B f(x,\, dx)\,.$$

Esta relación expresa el hecho de que la distancia es independiente de la parametrización de la curva y depende sólo de los puntos extremos. La relación anterior nos permite introducir la distancia infinitesimal

$$ds = f(x,\, dx)\,,$$

o *elemento de línea*. El elemento de línea es una función $f(x, dx)$ que satisface la condición de homogeneidad

$$f(x,\, \lambda\, dx) = \lambda\, f(x,\, dx)\,. \tag{4}$$

Un requisito adicional necesario es que la distancia sea una cantidad definida positiva

$$f(x,\, dx) > 0\,.$$

La condición anterior fue escrita en un momento histórico en el cual las distancias todavía eran, por así decirlo, positivas. Esto garantiza que la distancia medida en una dirección a lo largo de una curva sea igual a aquella medida en el sentido opuesto. Sin embargo, la condición anterior se puede relajar para permitir distancias definidas negativas con la condición adicional de que sigan siendo siempre negativas, es decir, que no haya cambio de signo. Por lo tanto, se puede imponer la condición más débil

$$f(x,\, -dx) = f(x,\, dx)\,.$$

Para que esta condición sea compatible con la condición de homogeneidad (4) se debe tener

$$f(x,\, \lambda\, dx) = |\lambda|\, f(x,\, dx)\,,$$

sin ninguna restricción sobre el signo de λ. Esta última condición es la forma más general para definir un elemento de línea, o distancia. Los elementos de línea en los cuales f puede cambiar de signo se pueden usar para describir fenómenos de histéresis y de catástrofe (*véase* [As85]).

Por supuesto, existen muchas soluciones a la condición anterior. Para fijar las ideas consideremos funciones monómicas de la forma

$$ds = \left[G_{\mu_1 \cdots \mu_r}(x)\, dx^{\mu_1} \,\cdots\, dx^{\mu_r}\right]^{1/r}\,,$$

donde r es un entero positivo. La homogeneidad está garantizada por construcción. Para que esta forma tenga un signo definido es necesario que r sea un número par. La posibilidad más sencilla es $r = 2$ y en este caso se obtiene (1), lo cual corresponde a lo que hoy conocemos como geometría de Riemann. La siguiente posibilidad es $r = 4$ y en este caso se tiene

$$ds^4 = G_{\lambda\mu\nu\rho}(x)\, dx^\lambda\, dx^\mu\, dx^\nu\, dx^\rho\,.$$

Esta posibilidad fue mencionada por Riemann en su tesis pero no la estudió en mayor profundidad. Recientemente esta geometría se ha utilizado en la construcción de una teoría alternativa de la gravedad [Ta93, Ta96, Ta98].

Un caso bastante excepcional de geometría, en el cual el elemento de línea no es monómico, fue considerado por Randers [Ra41] y está caracterizado por

$$ds = \left[g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu\, dx^\nu\right]^{1/2} + A_\mu(x)\, dx^\mu\,.$$

Esta geometría se puede usar como un modelo para describir el comportamiento de una partícula cargada en un campo electromagnético. Sin embargo, este elemento de línea no posee un signo definido y por lo tanto no es adecuado para la descripción de fenómenos físicos.

Un enfoque distinto con respecto a la definición de distancia fue considerado por Finsler [Fi18]. En este caso el punto de partida es una función homogénea de segundo orden en el elemento infinitesimal de distancia

$$F(x,\, dx) = f^2(x,\, dx)\,,$$

donde f es la misma función que hemos considerado anteriormente. Para nuestros propósitos es conveniente introducir

$$F = F(x,\, \dot{x}) = f^2(x,\, \dot{x})\,,$$

La función F es homogénea de segundo rango en $\dot{x}$, esto es

$$F(x,\, \lambda\, \dot{x}) = \lambda^2\, F^2(x,\, \dot{x})\,.$$

A continuación se define la métrica de Finsler por medio de la fórmula

$$F_{\mu\nu}(x,\, \dot{x}) = \frac{1}{2}\, \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu}\,.$$

Obviamente, la intención de Finsler era recuperar la geometría Riemanniana y de hecho para (1) se obtiene $F_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$. Para mayores detalles acerca de la geometría de Finsler recomendamos los libros de Rund [Ru59] y de Asanov [As85].

La condición (3) también se puede satisfacer si aparecen derivadas de orden superior, si es que éstas aparecen en las combinaciones adecuadas. Esto lleva a las condiciones de Zermelo [Ze94]; véase [Mu98] para mayores detalles.

4.3. El Concepto de Curvatura

La curvatura, como la concibió Riemann (y antes que él, Gauss), es otra generalización de la experiencia común. Una línea recta tiene curvatura cero; la "medida" de la cantidad por la cual una línea curva se separa de la línea recta puede ser la misma para cada punto de la curva (como para el círculo), o puede variar de punto a punto de la curva, en cuyo caso se hace necesario expresar la "magnitud de la curvatura" a través del uso de cantidades infinitesimales. Para las superficies curvas, la curvatura se mide en forma similar por la cantidad de desviación con respecto a un plano, el cual tiene curvatura cero, con el uso de los radios de curvatura. Esto se puede generalizar y hacer más preciso como sigue. Por simplicidad establecemos primero la situación para un espacio bi–dimensional, a saber para una superficie tal como ordinariamente nos imaginamos las superficies. A partir de la relación $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ es posible calcular la medida de la curvatura de cualquier punto de la superficie *completamente en términos de las funciones dadas* $g_{\mu\nu}$. El resultado es que la curvatura es el producto de los inversos de los radios de curvatura.

Riemann, generalizando a Gauss, procedió de la misma manera *matemática* para construir una expresión que involucrara a *todos* los $g_{\mu\nu}$ en el caso general de un espacio de n dimensiones, que fuese *matemáticamente de la misma clase* que la expresión Gaussiana para la curvatura de una *superficie*, y esta expresión generalizada es lo que Riemann llamó la *medida de la curvatura* del espacio.

Otro problema que atrajo la atención de Riemann es la generalización del concepto de *aplicabilidad*, un problema que Riemann plantea de la siguiente manera: bajo cuáles condiciones un $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ se puede transformar en otro $ds^2 = h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ a través de un cambio de *coordenadas locales*.

Dado que se tienen $n(n+1)/2$ funciones $g_{\mu\nu}$ de n variables independientes y dado que se dispone de n funciones arbitrarias para el cambio de coordenadas, Riemann conjeturó que $n(n-1)/2$ funciones debían determinar el ds^2 buscado. Inspirándose en los métodos de Gauss, Riemann utilizó un sistema de coordenadas locales (actualmente conocidas como coordenadas *normales*). Riemann muestra entonces que en la vecindad de cualquier punto p_0 de la variedad, el desarrollo de ds^2 con respecto a las coordenadas normales x^μ, $\mu = 1, \cdots, n$, se puede escribir como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu + R_{\mu\lambda\nu\rho}(0)\, y^\lambda\, y^\rho\, dx^\mu\, dx^\nu\,, \tag{5}$$

donde

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\lambda\rho} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu \partial x^\rho} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\rho} - \frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}\right) \\ &\quad + g_{\sigma\tau}\left(\left\{ {\sigma \atop \mu\lambda} \right\}\left\{ {\tau \atop \nu\rho} \right\} - \left\{ {\sigma \atop \mu\rho} \right\}\left\{ {\tau \atop \nu\lambda} \right\}\right)\,, \end{aligned}$$

que es el tensor de Riemann–Christoffel, donde

$$\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2}\, g^{\lambda\rho}\left(\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right)\,,$$

son los símbolos de Christoffel. El segundo término en (5) representa el *defecto o desviación de la planitud* de la variedad, donde y^μ es un vector tangente al punto p_0, tal como lo es dx^μ. Consideremos a continuación una base de vectores tangentes a p_0, $X^\mu_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \cdots, n$. Si elegimos dos de estos vectores entonces se genera una superficie bi–dimensional y la desviación con respecto al espacio plano estará dada por la proyección del segundo término en (5) sobre esa superficie bi–dimensional. Entonces, la curvatura de Gauss de esta superficie en p_0, con la misma notación, es

$$R_{(\alpha\beta)} = -\frac{3}{4}\,\frac{R_{\mu\lambda\nu\rho}(X^\mu_{(\alpha)}X^\lambda_{(\beta)} - X^\lambda_{(\alpha)}X^\mu_{(\beta)})(X^\nu_{(\alpha)}X^\rho_{(\beta)} - X^\rho_{(\alpha)}X^\nu_{(\beta)})}{(\eta_{\mu\nu}X^\mu_{(\alpha)}X^\nu_{(\beta)})^2}\,,$$

donde se ha dividido por el área de la superficie del triángulo generado por $X^\mu_{(\alpha)}$ y $X^\mu_{(\beta)}$. Estas curvaturas seccionales, $R_{(\alpha\beta)}$, $n(n-1)/2$ en total, caracterizan completamente la superficie dada. Por otra parte, estas curvaturas seccionales son escalares y por lo tanto no dependen del sistema de coordenadas utilizado para determinarlas. Por lo tanto, dos variedades que posean las mismas curvaturas seccionales se pueden obtener una a partir de la otra a través de un cambio de coordenadas.

La última contribución importante de Riemann a la geometría diferencial es la solución que da al problema de bajo cuáles condiciones la expresión de un $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ se puede, bajo una transformación de coordenadas, transformar en el $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ del espacio Euclideano. Debido al resultado anterior, acerca de las curvaturas seccionales, Riemann obtiene como condiciones necesarias y suficientes las relaciones $R_{\mu\nu\lambda\rho} = 0$.

4.4. Geometría y Física

Gauss todavía se adhiere demasiado a la aprioricidad de la geometría: Toda la estructura métrica del espacio depende de la experiencia. Mucho menos puede prever que la cuestión de la verdad del espacio físico, incluyendo mediciones geométricas a través de líneas rectas reales (geodésicas) o reglas o rayos de luz, podría depender del tiempo o de la velocidad o de las propiedades mecánicas de las entidades que llenaran o constituyeran el espacio y soportaran los instrumentos de medición; es decir, de las propiedades elásticas de las reglas y de las propiedades ópticas de los rayos de luz. Riemann fue el primero en formular esta posibilidad y Einstein el primero en llevarla a cabo.

Finalmente, Riemann observa que, debido a que una variedad topológica tri–dimensional puede admitir diferentes métricas, las propiedades geométricas del espacio no pueden ser determinadas sólo por sus propiedades topológicas, sino que deben ser determinadas por la observación y el experimento.

El artículo de Riemann dio origen a una serie de trabajos concernientes a cuál es la geometría que se da en la naturaleza. Este problema se conoce como *das Raumproblem*. El primero en abordarlo fue von Helmholtz [He68]. Posteriormente fue reconsiderado por Finsler [Fi18] y finalmente por Weyl [We27].

A continuación se incluye una traducción de algunos apartes del artículo de Clifford *On the space–theory of matter* [Cl70], en el cual se presenta el espíritu de la geometría Riemanniana. El lector familiarizado con la teoría de la relatividad general y con la mecánica cuántica reconocerá aquí varias ideas.

Riemann ha mostrado que, tal como hay diferentes tipos de líneas y superficies, también hay diferentes tipos de espacios de tres dimensiones; y que sólo a través del experimento se puede determinar a cuál de estos espacios pertenece aquel en que vivimos. En particular, los axiomas de la geometría plana son válidos dentro de los límites de experimentos sobre la superficie de una hoja de papel, aunque sabemos que la hoja está realmente cubierta por una cantidad de valles y colinas sobre los cuales (dado que la curvatura total no es cero) estos axiomas no son ciertos. Similarmente, dice, aunque los axiomas de la geometría sólida son ciertos dentro de los límites del experimento para porciones finitas de nuestro espacio, aún no se tiene una razón para concluir que estos son ciertos para porciones muy pequeñas; y si alguna ayuda se puede obtener de ahí para explicar los fenómenos físicos, se puede tener razón en concluir que estos no son ciertos para porciones muy pequeñas del espacio.

Aquí deseo indicar una manera en la cual estas especulaciones se pueden aplicar a la investigación de los fenómenos físicos. De hecho se cumple:

1. *Que las pequeñas porciones del espacio de hecho son de una naturaleza análoga a pequeñas colinas sobre una superficie que en promedio es plana; a saber, que las leyes ordinarias de la geometría no son válidas en éstas.*

2. *Que esta propiedad de estar curvado o distorsionado cambia continuamente de una porción del espacio a otra de la misma manera que una onda.*

3. *Que esta variación de la curvatura del espacio es lo que realmente sucede en el fenómeno de movimiento de materia, sea ponderable o etérea.*

4. *Que en el mundo físico nada tiene lugar fuera de esta variación sujeta (posiblemente) a la ley de continuidad.*

Estoy esforzándome de una manera general para explicar las leyes de la refracción doble sobre esta hipótesis, pero todavía no he llegado a ningún resultado suficientemente decisivo que merezca ser comunicado.

Riemann también creía que su nueva geometría resultaría ser de importancia científica, como lo muestra la conclusión de su tesis.

La geometría de Riemann no sólo ha tenido una influencia fundamental en el desarrollo de teorías gravitacionales, donde el espacio adquiere nuevas propiedades. También parece ser relevante en los desarrollos recientes con respecto a la geometría no–conmutativa. Riemann enfatiza que el comportamiento microscópico de la geometría puede ser completamente distinto a aquel que conocemos a la escala de distancias de nuestra vida diaria. De hecho, la mecánica cuántica, a través de su principio de incertidumbre, impone restricciones acerca de la posibilidad de determinar en forma exacta el valor de dos cantidades en el mismo instante. Si este principio de incertidumbre se extiende a la determinación de las coordenadas de posición de una partícula, la geometría diferencial desarrollada por Riemann deja de ser válida. Las coordenadas del espacio siguen siendo variables continuas pero estas ya no conmutan. Es notable que Riemann mismo haya advertido que sus desarrollos no se podían extender en forma directa al mundo microscópico. Una referencia *standard*, y bastante actualizada, para geometrías no conmutativas y su importancia en la física es [Ma99].

5. Antecedentes Bibliográficos

Riemann presentó su tesis el 10 de Junio de 1854, sin embargo, no fue ampliamente conocida hasta su publicación en 1868, dos años después de su muerte. A esta tesis se le ha asignado esta última fecha con el fin de no crear confusiones acerca de la demora de la influencia de Riemann sobre los geómetras del siglo XIX. La primera traducción al inglés fue realizada por Clifford [Cl73]. La tesis de Riemann ha sido reimpresa en sus obras completas [Rie92]. Otras traducciones al inglés han aparecido en [Wh29] y [Sp79]. La primera traducción al español se encuentra en [Vi58].

Agradecimientos

A los evaluadores del manuscrito original cuyos comentarios han sido, sin duda, enriquecedores.

ACERCA DE LAS HIPÓTESIS EN LAS CUALES SE BASA LA GEOMETRÍA

Bernhard Riemann

Plan de la Investigación

Se sabe que la geometría presupone, como cosas dadas a un mismo tiempo, el concepto de espacio y los primeros principios de construcciones en espacios. La geometría provee definiciones de estos conceptos que son meramente nominales, mientras que las determinaciones verdaderas aparecen sólo en la forma de axiomas. En consecuencia, la relación de estas suposiciones permanece en la oscuridad; no percibimos si su conexión es necesaria y en qué medida, ni, *a priori*, si es posible.

Desde Euclides hasta Legendre (para mencionar al más famoso de los geómetras reformistas) esta oscuridad no fue aclarada ni por los matemáticos ni por aquellos filósofos que se preocuparon del tema. La razón de esto es, sin duda, que el concepto general de magnitudes[4] multi–dimensionales (en las cuales se incluyen las magnitudes espaciales) permaneció completamente ignorada. Por lo tanto, en primer lugar me he propuesto la tarea de construir el concepto de una magnitud multi–dimensional a partir de nociones generales de magnitud. A partir de esto se sigue que en una magnitud multi–dimensional es posible introducir diferentes relaciones métricas[5] y, en consecuencia, que el *espacio*[6] es sólo un caso particular de una magnitud tri–dimensional.[7] Pero entonces aparece, como una consecuencia necesaria, que las proposiciones de la geometría no se pueden obtener a partir de conceptos generales de magnitud, sino que las propiedades que distinguen al espacio de otras magnitudes tri–dimensionales que se puedan concebir sólo se pueden deducir a partir de la experiencia. De este modo se llega al problema: descubrir los hechos más simples a partir de las cuales se pueden determinar las relaciones métricas del espacio; un problema que, dada la naturaleza del caso, no está completamente determinado, dado que

[4]En varios apartes del texto se alude, a veces explícitamente y en otras en forma indirecta, al concepto de variedad, con distintos términos (magnitud, extensión, agregado, etc.) que sin perder el sentido del texto se pueden todos traducir como 'variedad'.

[5]Una variedad puede soportar varias estructuras métricas.

[6]Aquí se refiere al espacio físico tri–dimensional.

[7]La traducción más cercana al original sería "magnitud triplemente extendida". Creemos que nuestra traducción no traiciona el concepto que se intenta aludir.

puede haber varios sistemas de hechos más simples que pueden ser suficientes para determinar las relaciones métricas del espacio –el sistema más importante para nuestro propósito actual es aquel que Euclides nos ha dado como fundamento. Estos hechos no son –como todos los hechos– necesarios, sino sólo certeza empírica; son hipótesis. Por lo tanto, se puede investigar su probabilidad, la cual, dentro de los límites de la observación, es, por supuesto, muy grande, e investigar la validez de su extensión más allá de los límites de la observación, a la vez desde la perspectiva de lo inconmensurablemente grande y de lo inconmensurablemente pequeño.[8]

I. El concepto de magnitud de dimensión n

Al intentar la solución del primero de estos problemas, el desarrollo del concepto de una magnitud multi–dimensional, pienso que puedo solicitar una crítica indulgente dado que no estoy acostumbrado a tales prácticas de una naturaleza filosófica donde la dificultad yace más en los conceptos mismos que en su construcción; y que, salvo algunas indicaciones muy breves de mi consejero privado Gauss en su segunda memoria sobre restos bicuadráticos, en el *Göttingen Gelehrte Anzeige*,[9] y en su libro de Aniversario[10], y algunas investigaciones filosóficas de Herbart, no puedo hacer uso de trabajos anteriores.

§ 1. Las nociones de magnitud son posibles sólo donde hay un concepto general anterior que admita varios casos. De acuerdo con el hecho de si existe entre estos casos una trayectoria continua desde una a otra o no, éstas forman una variedad *continua* o *discreta*: en el primer caso los modos individuales son llamados puntos de la variedad y, en el segundo caso, elementos. Los conceptos cuyos casos forman una variedad *discreta* son tan comunes que, al menos en los lenguajes cultos, para cualquier cosa dada siempre es posible encontrar un concepto en el cual éste esté incluído. (Por lo tanto, los matemáticos pueden sin duda encontrar la teoría de magnitudes discretas en el postulado de que ciertas cosas dadas se deben considerar como de la misma especie.)

[8] En un lenguaje contemporáneo esto correspondería a lo macroscópico y a lo microscópico.

[9] Se refiere a una especie de periódico interno donde se publicaban algunas noticias eruditas. Gauss nada publicó académicamente sobre geometrías no–Euclideanas.

[10] Se refiere a *Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen* [*Contribuciones a la Teoría de Ecuaciones Algebraicas*].

Por otro lado, tan pocas y escasas son las ocasiones para formar conceptos cuyos casos constituyan una variedad *continua*, que las únicas nociones simples cuyos casos forman una variedad multi–dimensional son las posiciones de los objetos percibidos y los colores. Ocasiones más frecuentes para la creación y desarrollo de estas nociones ocurren primero en la matemática superior.

Las porciones definidas de una variedad, distinguidas por una marca o un contorno, son llamadas *quanta*. Su comparación con respecto a cantidad se consigue contando, en el caso de magnitudes discretas, y midiendo, en el caso de magnitudes continuas. La medida consiste en la superposición de las magnitudes que se van a comparar; por lo tanto, se requiere de un medio para transportar una magnitud para que sirva de patrón para las otras. En la ausencia de esto, dos magnitudes sólo se pueden comparar cuando una es parte de la otra; en cuyo caso también podemos sólo determinar el *más* o el *menos* pero no el *cuánto*. En este caso las investigaciones que se pueden instituir acerca de éstos forman una división general de la ciencia de la magnitud en la cual las magnitudes se consideran no como existentes en forma independiente de la posición ni como expresables en términos de una unidad, sino como regiones en una variedad. Tales investigaciones han llegado a ser una necesidad para muchas áreas de la matemática, por ejemplo, para el tratamiento de funciones analíticas multi–valuadas; y la insuficiencia de éstas es sin duda una de las causas principales por las cuales el célebre teorema de Abel, y los logros de Lagrange, Pfaff y Jacobi, para la teoría general de ecuaciones diferenciales, han permanecido sin fruto por tanto tiempo. Aparte de esta área general de la ciencia de las magnitudes extendidas, la cual procede sin otras suposiciones, será suficiente para el propósito actual poner de relieve dos puntos: el primero se relaciona con la construcción del concepto de una variedad multi–dimensional; el segundo se relaciona con la reducción de determinaciones de posición en una variedad dada a la determinación de cantidad, y hará claro el carácter verdadero de una extensión de n dimensiones.

§ 2. En un concepto cuyos casos forman una variedad continua, si uno pasa de un caso a otro en una forma bien determinada, los casos a través de los cuales uno ha pasado forman una variedad continua de extensión simple,[11] cuyo carácter verdadero es que, en ésta, un progreso continuo desde un punto es posible sólo en dos direcciones, hacia atrás o hacia adelante. Si ahora uno supone que esta variedad a su vez se transforma en otra completamente diferente, y nuevamente de una

[11] Uni–dimensional.

manera definida, a saber, que cada punto pasa a un punto bien determinado de la otra, entonces todos los casos así obtenidos forman una variedad bi–dimensional.[12] De una manera similar uno obtiene una variedad tri–dimensional, si uno se imagina una variedad bi–dimensional que se transforma de una manera definida en otra completamente diferente; y es fácil ver cómo se puede continuar esta construcción. Si uno considera el proceso como uno en el cual el objeto varía, en vez de considerar el concepto como fijo, esta construcción se puede describir como una composición de una *variabilidad*[13] de $(n+1)$ dimensiones a partir de una variabilidad de n dimensiones y de una variabilidad de una dimensión.

§ 3. Ahora mostraré cómo, a la inversa, una variabilidad cuya región está dada se puede descomponer en una variabilidad de una dimensión y una variabilidad de dimension inferior.[14] Para este propósito supongamos una porción variable de una variedad de una dimensión –contado desde un origen fijo– de manera tal que estos valores se puedan comparar entre sí; supongamos que esta porción tiene un valor definido para cada punto de la variedad dada – que varía en forma continua con el punto, o, en otras palabras, tomemos una función continua de la posición dentro de la variedad dada, la cual, además, no sea constante en ninguna parte de esa variedad. Cada sistema de puntos donde la función tenga un valor constante, forma entonces una variedad continua de dimensión inferior a la dada. Estas variedades pasan continuamente de una en otra a medida que la función cambia; por lo tanto se puede suponer que las otras proceden de una de ellas, y hablando generalmente esto puede ocurrir de manera tal que cada punto pasa a un punto bien determinado de la otra; aquí podemos no considerar los casos excepcionales (cuyo estudio también es importante). De aquí en adelante, la determinación de la posición en la variedad dada se reduce a una determinación de cantidad y a una determinación de posición en una variedad de menos dimensiones. Ahora es fácil mostrar que esta variedad tiene $(n-1)$ dimensiones cuando la variedad dada es de n dimensiones. Repitiendo entonces esta operación n veces, la determinación de la posición en la variedad de n dimensiones se reduce a n determinaciones de cantidad, y por lo tanto la determinación de la

[12] El desplazamiento de un punto genera una línea, mientras que el desplazamiento de una línea genera una superficie, etc.

[13] La traducción más cercana sería variedad.

[14] Foliación. Aquí es importante señalar las limitaciones que tiene la noción de variedad en Riemann que, definitivamente, no considera este concepto en toda su extensión moderna.

posición en una variedad dada se reduce a un número finito de determinaciones de cantidad *cuando esto es posible.*[15] Hay variedades en las cuales la determinación de la posición requiere no un número finito, sino una serie interminable o una variedad continua de determinaciones de cantidad. Tales variedades son, por ejemplo, las posibilidades para una función en una región dada, las posibles formas de una figura sólida, etc.

II. Posibles relaciones métricas para una variedad de n dimensiones en el supuesto que las líneas tengan una longitud independiente de la posición y, en consecuencia, que cada línea pueda ser medida por otra

Habiendo construido el concepto de una variedad de n dimensiones, y habiendo encontrado que su carácter esencial consiste en la propiedad que la determinación de la posición en ésta se puede reducir a n determinaciones numéricas, se llega al segundo de los problemas propuestos anteriormente, a saber, el estudio de las relaciones métricas que son posibles para tal variedad, y de las condiciones que son suficientes para determinarlas. Estas relaciones métricas sólo se pueden estudiar en términos abstractos, y su interdependencia sólo se puede representar por fórmulas. Bajo ciertas suposiciones, sin embargo, éstas se pueden descomponer en relaciones que, tomadas separadamente, son factibles de una representación geométrica; y de este modo llega a ser posible expresar en forma geométrica los resultados calculados. De esta manera, para venir a tierra firme, no podemos, es cierto, evitar consideraciones abstractas en nuestras fórmulas, pero al menos los resultados del cálculo pueden posteriormente ser presentados en una forma geométrica. Los fundamentos de estas dos partes de la pregunta se establecen en la célebre memoria de Gauss, *Disquisitiones circa superficies curvas.*

§ 1. Las determinaciones de medida requieren que la magnitud sea independiente de la posición, lo cual puede suceder de varias maneras. La hipótesis que primero se presenta a sí misma, y que desarrollaré aquí, es aquella de acuerdo a la cual la longitud de las líneas es independiente de su posición, y en consecuencia cada línea es medible por medio de cada una de las otras. Fijar la posición se reduce a fijar la cantidad y, en consecuencia, la posición de un punto en la variedad de n dimensiones se expresa por medio de n variables $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$; la determinación

[15]Se acaba de introducir el concepto de coordenadas locales.

de una línea resulta en dar estas cantidades como funciones de una variable. El problema consiste entonces en establecer una expresión matemática para la longitud de una línea, y para este fin debemos considerar que las cantidades x se pueden expresar en términos de ciertas unidades. Consideraré este problema sólo bajo ciertas restricciones, y me concentraré, en primer lugar, en líneas para las cuales las razones de los incrementos dx de las variables respectivas varían en forma continua. Entonces se puede pensar que estas líneas se dividen en elementos, dentro de los cuales las razones de las cantidades dx se pueden considerar como constantes; y entonces el problema se reduce a establecer para cada punto una expresión general para el elemento lineal ds a partir de ese punto, expresión que de este modo contendrá las cantidades x y las cantidades dx. Supondré, en segundo lugar, que la longitud del elemento lineal, a primer orden, no cambia cuando todos los puntos de este elemento realizan el mismo desplazamiento infinitesimal, lo cual implica, al mismo tiempo, que si todas las cantidades dx se aumentan en la misma razón, el elemento lineal variará tambien en la misma razón. Bajo estas suposiciones, el elemento lineal puede ser cualquier función homogénea de primer grado en las cantidades dx, la cual no cambia cuando se cambian los signos de todos los dx, y en la cual las constantes arbitrarias son funciones continuas de las cantidades x. Para encontrar los casos más simples, buscaré primero una expresión del elemento de línea para las variedades de $(n-1)$ dimensiones que en todo punto sea equidistante del origen; esto es, buscaré una función continua de la posición cuyos valores los distinguen uno del otro. Yendo hacia afuera a partir del origen, éste debe o aumentar en todas las direcciones o disminuir en todas las direcciones; supondré que aumenta en todas las direcciones, y que por lo tanto tiene un mínimo en ese punto. Entonces, si el primero y segundo coeficientes diferenciales de esta función son finitos, su primer diferencial se debe anular, y el segundo diferencial no puede ser negativo; supondré que es siempre positivo. Entonces, esta expresión diferencial de segundo orden permanece constante cuando ds permanece constante, y aumenta cuadráticamente cuando el dx, y por lo tanto también ds, se aumentan en la misma proporción; por lo tanto, debe ser ds^2 multiplicado por una constante, y consecuentemente ds es la raíz cuadrada de una función homogénea de segundo orden en los dx, siempre positiva, en la cual los coeficientes son funciones continuas de las cantidades x. Para el *espacio*,[16] cuando la posición de los puntos está expresada en coordenadas rectilíneas, $ds = \sqrt{\sum(dx)^2}$; por

[16]Se refiere al espacio tri–dimensional usual. Dado que a la época era el único espacio con significado físico se enfatiza este hecho.

lo tanto, el *espacio* está incluido en este caso simple. El siguiente caso en simplicidad incluye aquellas variedades en las cuales el elemento de línea[17] se puede expresar como la raíz cuarta de una expresión diferencial cuártica. La investigación de esta clase más general no requeriría principios realmente diferentes, pero tomaría un tiempo considerable y daría poca luz nueva sobre la teoría del espacio, especialmente debido a que los resultados no se pueden expresar geométricamente; por lo tanto, me limitaré a aquellas variedades en las cuales el elemento de línea se expresa como la raíz cuadrada de una expresión diferencial cuadrática. Tal expresión se puede transformar en otra similar si las n variables independientes se sustituyen por funciones de n nuevas variables independientes. De esta manera, sin embargo, no cualquier expresión se puede transformar en otra; dado que la expresión contiene $n(n+1)/2$ coeficientes que son funciones arbitrarias de las variables independientes; ahora, por medio de la introducción de nuevas variables sólo se pueden satisfacer n condiciones, y por lo tanto hacer que no más de n de los coeficientes sean iguales a cantidades dadas. Los restantes $n(n-1)/2$ están entonces completamente determinados por la naturaleza de la variedad que se representa, y consecuentemente se requieren $n(n-1)/2$ funciones de las posiciones para la determinación de sus relaciones métricas. Por lo tanto, las variedades en las cuales, como en el plano y en el espacio, el elemento de línea se puede reducir a la forma $\sqrt{\sum dx^2}$ son sólo un caso particular de las variedades que se investigarán aquí; éstas requieren un nombre especial, y por lo tanto estas variedades en las cuales el cuadrado del elemento de línea se puede expresar como la suma de los cuadrados de diferenciales completos lo llamaré *plano*. Para inspeccionar ahora las diferencias esenciales de las variedades representables en la forma dada, es necesario eliminar las características que dependen de su modo de representación, lo cual se logra eligiendo las variables de acuerdo con un cierto principio.

§ 2. Para este propósito imaginemos que a partir de cualquier punto dado se construye el sistema de líneas más cortas[18] que salen de éste; entonces, la posición de un punto arbitrario se puede determinar por la dirección inicial de la línea más corta en la cual yace, y por su distancia medida a lo largo de esa línea desde el origen. Por lo tanto se puede expresar en términos de los radios dx_0 de las cantidades dx en esta línea más corta, y de la longitud s de esta línea. Ahora introduzcamos en vez

[17]Primera vez que se utiliza 'elemento de líneaén vez de 'elemento lineal.'

[18]En un lenguaje contemporáneo esto correspondería a las líneas geodésicas. Sin embargo, el uso de la palabra 'geodésica'para denotar el concepto de línea geodésica se adoptó sólo en 1864.

de dx_0 funciones lineales dx de estos, de modo tal que el valor inicial del cuadrado del elemento de línea sea igual a la suma de los cuadrados de estas expresiones, de manera tal que las variables independientes sean ahora la longitud s y los radios de las cantidades dx. Finalmente, tomemos, en vez de los dx, cantidades $(x_1, x_2, x_3, \cdots x_n)$ proporcionales a estos, pero tal que la suma de sus cuadrados sea s^2. Cuando se introducen estas cantidades, el cuadrado del elemento de línea es $\sum dx^2$ para valores infinitesimales de los x, pero el término del siguiente orden en él es igual a una función homogénea de segundo orden de las $n(n-1)/2$ cantidades $(x_1 dx_2 - x_2 dx_1), (x_1 dx_3 - x_3 dx_1) \cdots$, por lo tanto un infinitesimal de cuarto orden; de modo tal que obtenemos una cantidad finita al dividir esto por el cuadrado del triángulo infinitesimal, cuyos vértices son $(0, 0, 0, \cdots), (x_1, x_2, x_3, \cdots), (dx_1, dx_2, dx_3, \cdots)$. Esta cantidad mantiene el mismo valor en tanto que los x y los dx se incluyan en la misma forma lineal binaria, o en tanto que las dos líneas más cortas de 0 a x y de 0 a dx permanezcan en el mismo elemento de superficie; por lo tanto depende sólo del lugar y la dirección. Obviamente es cero cuando la variedad representada es plana, es decir, cuando el elemento de línea cuadrado es reducible a $\sum dx^2$, y por lo tanto se puede considerar como la medida de la desviación de la variedad de la planitud en el punto dado en la dirección de la superficie dada. Multiplicado por $-3/4$ resulta ser igual a la cantidad que Gauss ha llamado la curvatura de la superficie. Para la determinación de las relaciones métricas de una variedad factible de representarse en la forma supuesta, se encuentra que son necesarias $n(n-1)/2$ funciones de la posición; por lo tanto, si se da la curvatura en cada punto en $n(n-1)/2$ direcciones de la superficie, las relaciones métricas de la variedad se pueden determinar a partir de éstas –si es que no hay relaciones de identidad entre estos valores, lo que de hecho, para hablar en forma general, no es el caso. De esta manera, las relaciones métricas de una variedad en la cual el elemento de línea es la raíz cuadrada de un diferencial cuadrático se puede expresar de un manera completamente independiente de la elección de las variables independientes. Para este propósito un método completamente similar se puede aplicar también a las variedades en las cuales el elemento de línea tiene una expresión menos simple, por ejemplo, la raíz cuarta de un diferencial cuártico. En este caso el elemento de línea, generalmente hablando, ya no es reducible a la forma de la raíz cuadrada de una suma de cuadrados, para la cual la desviación de la planitud (en el elemento de línea cuadrado) es un infinitesimal de segundo orden, mientras que en estas variedades será de cuarto orden. De este modo, esta propiedad de la variedad últimamente mencionada se puede llamar planitud de las partes más pequeñas. La propiedad más importante de estas variedades para nuestro propósito actual, y sólo para cuya obtención se investigan aquí, es que las relaciones de los variedades bi–dimensionales se pueden representar geométricamente por superficies, y las de más dimensiones se pueden reducir a aquellas de las superficies incluidas en ellas, lo cual ahora requiere una pequeña discusión adicional.

§ 3. En la idea de superficies, junto con las relaciones métricas intrínsecas en las cuales se considera sólo la longitud de las líneas sobre las superficies, siempre se mezclan las posiciones de los puntos que yacen fuera de la superficie. Sin embargo, se puede abstraer de las relaciones externas si se considera que tales deformaciones no alteran la longitud de las líneas –es decir, si se considera a la superficie doblada de cualquier manera sin estiramiento, y a todas las superficies así obtenidas una de otra, como equivalentes. De este modo, por ejemplo, cualquier superficie cilíndrica o cónica se considera como equivalente a un plano, dado que se pueden construir a partir de uno simplemente doblando, con lo cual se conservan las relaciones métricas intrínseca y todos los teoremas acerca de un plano –por lo tanto toda la planimetría– conservan su validez. Por otro lado, éstas se consideran como esencialmente diferentes de la esfera, la cual no se puede cambiar en un plano sin deformación. De acuerdo a nuestra investigación anterior las relaciones métricas intrínsecas de una extensión bi–dimensional en la cual el elemento de línea se puede expresar como la raíz cuadrada de un diferencial cuadrático, lo cual es el caso con las superficies, están caracterizados por la curvatura total. Ahora esta cantidad, en el caso de las superficies, es factible de una interpretación visible, *a saber.*, es el producto de las dos curvaturas de la superficie, o multiplicado por el área de un pequeño triángulo construido a partir de líneas más cortas, es igual al exceso esférico de la misma. La primera definición supone la proposición de que el producto de los dos radios de curvatura no es alterado por el solo doblado; la segunda, que en el mismo lugar el área de un pequeño triángulo es proporcional a su exceso esférico. Para dar un significado tangible a la curvatura de una extensión de n dimensiones en un punto dado y en una dirección dada a lo largo de la superficie, se debe comenzar a partir del hecho de que una línea más corta que proviene de un punto está completamente determinada cuando se da su dirección inicial. De acuerdo con esto se obtiene una superficie determinada si se prolongan todas las líneas más cortas que provienen del punto dado y que yacen inicialmente en la superficie dada; esta superficie tiene en el punto dado una curvatura definida, la cual es también la curvatura de la variedad de n dimensiones en el punto dado en la dirección de la superficie dada.

§ 4. Antes de realizar la aplicación al espacio, son necesarias algunas consideraciones generales acerca de las variedades planas en general; es decir, de aquellas variedades en las cuales el cuadrado del elemento de línea es expresable como una suma de cuadrados de diferenciales completos.

En una extensión de n dimensiones plana la curvatura es cero en todos los puntos en cualquier dirección; sin embargo, para la determinación de las relaciones métricas es suficiente saber (de acuerdo con la investigación anterior) que en cada punto la curvatura es cero en $n(n-1)/2$ direcciones de superficie independientes. Las variedades cuya curvatura es cero se pueden considerar como un caso especial de aquellas cuya curvatura es constante. El carácter común de estas variedades cuya curvatura es constante también se puede expresar de este modo, que las figuras se pueden mover en ellas sin deformación.[19] Dado que claramente las figuras no se pueden desplazar arbitrariamente y dar vueltas en ella si la curvatura en cada punto no fuera la misma en todas las direcciones. Sin embargo, por otro lado, las relaciones métricas de las variedades están completamente determinadas por la curvatura; por lo tanto, éstas son exactamente las mismas en todas las direcciones en un punto como en otro, y en consecuencia se pueden hacer las mismas construcciones a partir de cualquiera: por lo tanto, se sigue que en agregados con curvatura constante las figuras pueden tener una posición arbitraria dentro de ellas. Las relaciones métricas de estas variedades dependen sólo del valor de la curvatura, y en relación a la expresión analítica se puede decir que si este valor se denota por α, la expresión para el elemento de línea se puede escribir como[20]

$$\frac{1}{1+\frac{1}{4}\alpha\sum x^2}\sqrt{\sum dx^2}\,.$$

§ 5. La teoría de *superficies* de curvatura constante servirá para una ilustración geométrica. Es fácil ver que las superficies cuya curvatura es positiva siempre se pueden enrollar sobre una esfera cuyo radio sea el recíproco de la raíz cuadrada de la curvatura; pero para revisar la multiplicidad de estas superficies dejemos que una de éstas tenga la forma de una esfera y el resto la forma de superficies de revolución que la tocan en el ecuador. Las superficies con curvatura mayor que esta esfera tocarán entonces la esfera internamente, y toman una forma similar a

[19]Esta propiedad se daba por descontada en la elaboración de la geometría Euclideana.

[20]La única fórmula que aparece en el trabajo de Riemann.

la porción exterior (desde el eje) de la superficie de un anillo; éstas se pueden enrollar en zonas de esferas que tienen menores radios, pero irán alrededor más de una vez. Las superficies con curvatura positiva menor se obtienen a partir de esferas de radios mayores cortando la luna acotada por los dos semi–círculos mayores y juntando las líneas de sección. La superficie con curvatura cero será un cilindro tangente en el ecuador; las superficies con curvatura negativa tocarán el cilindro externamente y tendrán una forma similar a la porción interna (hacia el eje) de la superficie de un anillo. Si consideramos estas superficies como *locus in quo* para regiones de la superficie que se mueven en ellas, como el espacio es el *locus in quo* para los cuerpos, las regiones de la superficie se pueden mover en todas estas superficies sin deformación. Las superficies con curvatura positiva siempre se pueden formar de manera tal que los pedazos de superficie también se puedan mover en forma arbitraria sobre éstas sin *doblado*, a saber (éstas se pueden constituir) en superficies esféricas; pero no aquellas con curvatura negativa. Aparte de la independencia de la posición de las regiones de la superficie, hay en las superficies de curvatura cero también una independencia de la *dirección* de la posición, lo cual en las superficies anteriores no existe.[21]

III. Aplicaciones al Espacio

§ 1. Por medio de estas investigaciones en la determinación de las relaciones métricas de una extensión de n dimensiones se pueden establecer las condiciones que son necesarias y suficientes para determinar las propiedades métricas del espacio, si se supone la independencia de la longitud de la línea de la posición y la expresabilidad del elemento de línea como la raíz cuadrada de un diferencial cuadrático, es decir, planitud en las partes más pequeñas.

Primero, éstas se pueden expresar de este modo: que la curvatura en cada punto es cero en tres direcciones de la superficie; y por lo tanto las propiedades métricas del espacio están determinadas si la suma de los ángulos de un triángulo es siempre igual a dos ángulos rectos.

Segundo, si se supone, tal como lo hace Euclides, no sólo la existencia de líneas independientes de la posición, sino que también de cuerpos, se sigue que la curvatura es constante en todo punto; y entonces la suma de los ángulos está determinada en todos los triángulos cuando se conoce en uno.

[21] Homogeneidad e isotropía.

Tercero, en vez de tomar la longitud de las líneas independiente de la posición y de la dirección, también se puede suponer una independencia de su longitud y dirección de la posición. De acuerdo con esta concepción los cambios o diferencias de posición son magnitudes complejas expresables en tres unidades independientes.

§ 2. En el curso de nuestras investigaciones anteriores, primero ya habíamos hecho distinción entre las relaciones de extensión o partición y las relaciones métricas, y se encontró que, con las mismas propiedades extensivas, eran concebibles diferentes relaciones métricas; entonces se investigaron los sistemas de especificaciones métricas simples por los cuales las relaciones métricas del espacio están completamente determinadas, y de las cuales todas las proposiciones acerca de ellos son una consecuencia necesaria; queda por discutir la cuestión de cómo, en qué grado, y hasta qué medida estas suposiciones son avaladas por la experiencia. Con respecto a esto, hay una distinción real entre meras relaciones extensivas y relaciones métricas; en las primeras, donde los casos posibles forman una variedad discreta, las afirmaciones de la experiencia son de hecho no muy ciertas, pero todavía no inexactas; mientras que en la última, en la cual los casos posibles forman una variedad continua, cada determinación a partir de la experiencia permanece siempre inexacta: aun cuando la probabilidad sea tan grande que es casi exacta. Esta consideración resulta ser importante en las generalizaciones de estas determinaciones empíricas más allá de los límites de la observación a lo infinitamente grande y a lo infinitamente pequeño; dado que lo último puede resultar ser claramente más inexacto más allá de los límites de la observación, pero no así en el primer caso.

Cuando las construcciones del espacio se extienden a lo infinitamente grande, debe distinguirse entre *no–acotado* e *infinito*, lo primero pertenece a las relaciones de extensión, lo último a las relaciones métricas. Que el espacio sea una variedad tri–dimensional no–acotada, es una suposición que se desarrolla para toda concepción del mundo externo; de acuerdo a la cual en todo instante la región de percepción real es completada y las posiciones posibles de un objeto buscado se construyen, y en estas aplicaciones se confirma constantemente. De este modo, el hecho que el espacio sea no–acotado posee una gran certeza empírica más que cualquier experiencia externa. Pero su extensión infinita de ninguna manera se sigue de esto; por el contrario, si se supone independencia de los cuerpos de la posición, y por lo tanto se adscribe al espacio de curvatura constante, necesariamente debe ser finito en tanto que esta curvatura tuviera siempre un valor positivo muy pequeño. Si se prolongan todas las líneas más cortas que comienzan en un elemento de superficie dado, se debe obtener una superficie no–acotada de curvatura constante positiva, es decir, una superficie que en una variedad *plana* de tres dimensiones tomará la forma de una esfera, y en consecuencia será finita.

§ 3. Las preguntas acerca de lo infinitamente grande son, para la interpretación de la naturaleza, preguntas inútiles. Pero este no es el caso con las preguntas acerca de lo infinitamente pequeño.[22] Es de la exactitud con la cual seguimos los fenómenos de lo infinitamente pequeño de lo que esencialmente depende nuestro conocimiento de sus relaciones causales. El progreso de los siglos recientes en el conocimiento de la mecánica depende casi enteramente de la exactitud de la construcción que ha llegado a ser posible a través de la invención del cálculo infinitesimal, y a través de principios simples descubiertos por Arquímedes, Galileo, y Newton, y usados por la física moderna. Pero en las ciencias naturales que todavía necesitan principios simples para tales construcciones, se busca descubrir las relaciones causales siguiendo los fenómenos con gran minuciosidad, hasta donde el microscopio lo permite. Por lo tanto, preguntas acerca de las relaciones métricas del espacio en lo infinitamente pequeño no son preguntas superfluas.

Si suponemos que los cuerpos existen en forma independiente de la posición, la curvatura es constante en todo lugar, y entonces resulta de las mediciones astronómicas que no puede ser diferente de cero; o en todo caso su recíproco debe ser un área en comparación con la cual se puede despreciar el rango de nuestros telescopios. Pero si no hubiera esta independencia de los cuerpos con respecto a la posición, no se podrían sacar conclusiones de las relaciones métricas de lo grande, a aquellas de lo infinitamente pequeño; en ese caso la curvatura en cada punto puede tener un valor arbitrario en tres direcciones, si es que la curvatura total de cada porción medible del espacio no difiere sensiblemente de cero. Relaciones aun más complicadas pueden existir si dejamos de suponer que el elemento de línea es expresable como la raíz cuadrada de un diferencial cuadrático. Ahora parece que las nociones empíricas sobre las cuales se basan las determinaciones métricas del espacio, el concepto de un cuerpo sólido y la de un rayo de luz, dejan de ser válidas para lo infinitamente pequeño. Por lo tanto, tenemos la suficiente libertad

[22] Riemann en forma notable se adelanta a su tiempo. Los desarrollo de la mecánica cuántica imponen un principio de incertidumbre en la determinación de las posiciones de las partículas a nivel microscópico. Esto lleva a la necesidad de considerar geometrías no–conmutativas.

para suponer que las relaciones métricas del espacio en lo infinitamente pequeño no obedecen las hipótesis de la geometría; y debemos de hecho suponerlo, si queremos como consecuencia obtener una explicación más simple de los fenómenos.

La pregunta de la validez de las hipótesis de la geometría en lo infinitamente pequeño está relacionada con la pregunta del fundamento de las relaciones métricas del espacio. En esta última pregunta, que todavía podemos considerar como perteneciente al estudio del espacio, se aplica la observación hecha anteriormente: que en una variedad discreta, el fundamento de sus relaciones métricas está dado en el concepto de ésta, mientras que en una variedad continua, este fundamento debe venir desde afuera. Por lo tanto, o la realidad que subyace al espacio debe formar una variedad discreta, o debemos buscar el fundamento de sus relaciones métricas fuera de él, en fuerzas de ligadura que actúan sobre él.

La respuesta a estas preguntas sólo se puede obtener comenzando a partir de la concepción de los fenómenos que han sido hasta ahora justificados por la experiencia, para los cuales Newton estableció su fundamento, y modificándolos gradualmente de acuerdo a los hechos que no puedan ser explicados. Las investigaciones que comienzan a partir de nociones generales, como la investigación que hemos apenas realizado, sólo pueden ser útiles en prevenir que este trabajo esté restringido por visiones demasiado estrechas, y el progreso en el conocimiento de la interdependencia de las cosas no sea obstruido por los prejuicios tradicionales.

Esto nos lleva al dominio de otra ciencia, la física, en la cual la naturaleza de la presente ocasión no nos permite adentrarnos.

Sinopsis

Plan de la investigación:

I. El Concepto de magnitud de dimensión n.

§ 1. Variedades continuas y discretas. Las partes definidas de una variedad se llaman quanta. División de la teoría de magnitudes continuas en:

(1) De sólo relaciones de regiones, en las cuales no se supone una independencia de las magnitudes con respecto a la posición;

(2) De relaciones de tamaño, en la cuales se debe suponer tal independencia.

§ 2. Construcción del concepto de variedad uni–dimensional, bi–dimensional y de n dimensiones.

§ 3. Reducción de la fijación de una posición en una variedad dada a fijaciones de cantidades.

II. Posibles relaciones métricas para una variedad de n dimensiones en el supuesto que las líneas tengan una longitud independiente de la posición y, en consecuencia, que cada línea pueda ser medida por otra.

§ 1. Expresión para el elemento de línea. Variedades planas en las cuales el elemento de línea se puede expresar como la raíz cuadrada de una suma de cuadrados de diferenciales exactos.

§ 2. Investigación de la variedad de dimensión n en la cual el elemento de línea se puede representar como la raíz cuadrática de un diferencial cuadrático. Medida de la desviación de la planitud (curvatura) en un punto dado en una dirección dada de la superficie. Para la determinación de estas relaciones métricas es permisible y suficiente que la curvatura esté arbitrariamente dada en cada punto en $n(n-1)/2$ direcciones de la superficie.

§ 3. Ilustración geométrica.

§ 4. Variedades planas (en las cuales la curvatura es siempre cero) se pueden tratar como una caso especial de las variedades de curvatura constante. Estas también se pueden definir como aquellas que admiten una independencia de la posición de las variedades de n dimensiones en ellas (posibilidad de movimiento sin deformación).

§ 5. Superficies con curvatura constante.

III. Aplicaciones al Espacio.

§ 1. Sistema de hechos que son suficientes para determinar las relaciones métricas del espacio supuesto en la geometría.

§ 2. ¿Cuál es la validez de estas determinaciones empíricas más allá de los límites de la observación hacia lo infinitamente grande?

§ 3. ¿Cuán válida hacia lo infinitamente pequeño? Conexión de esta pregunta con la interpretación de la naturaleza.

Referencias

[As85] G. S. Asanov, *Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories* (Reidel, Dordrecht, 1985).

[Be37] E. T. Bell, *Men of Mathematics* (Simon and Schuster, New York, 1937); cap. 26, p. 484, *Anima Candida.*

[Bo32] J. Bolyai, *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI: Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem: adjecta ad casun falsitatis quadratura circuli geometrica* (1932); traducción al inglés *The Science of Absolute Space* en [Bo12].

[Bo12] R. Bonola, *Non–Euclidean Geometry* (Open Court, 1912; Dover, New York, 1955).

[Cl70] W. K. Clifford, *On the space–theory of matter*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **2**, 157 (1870).

[Cl73] W. K. Clifford, *On the hypothesis which lie at the bases of geometry*, Nature **7**, 14–17, 36, 37, 183–184 (1873); traducción de [Rie68], reimpreso en [Cl82], p. 55.

[Cl82] W. K. Clifford, *Mathematical Papers*, ed. by R. Tucker (MacMillan, London, 1882).

[De92] R. Dedekind, *Bernhard Riemann Lebenslauf* (1892); en [Rie92].

[Ew96] W. Ewald, *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics* (Clarendon Press, Oxford, 1996).

[Fi18] P. Finsler, *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen*, Dissertation, Göttingen (1918).

[Ga27] C. F. Gauss, *Disquisitiones generales circa Superficies Curvas*, Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores **6** (1827).

[He68] H. von Helmholtz, *Über die Tatsachen die der Geometrie zum Grunde Liegen*, Nachrichten, Göttingen (1868).

[Lo40] N. I. Lobachevski, *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (Fincke, Berlin, 1840); traducción al inglés *Geometrical Researches on the Theory of Parallels* en [Bo12].

[Ma99] J. Madore, *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).

[Mo87] M. Monastyrsky, *Riemann, Topology and Physics* (Birkhäuser, Boston, 1987).

[Mu98] J. Muñoz M. and L. M. Pozo C., *Parameter–invariant second–order variational problems in one variable*, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 6225 (1998).

[Ra41] G. Randers, *On an Asymmetrical Metric in the Four–Space of General Relativity*, Phys. Rev. **59**, 195 (1941).

[Rie51] B. Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* (1851); reimpreso en [Rie92].

[Rie57] B. Riemann, *Theorie der Abel'schen Functionen*, Borchardt's (Crelles) Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 54 (1857); reimpreso en [Rie92].

[Rie58] B. Riemann, *Ein Beitrag zur Elektrodynamik*, Poggendroff's Annalen der Physik und Chemie, Bd. CXXXI (1858); reimpreso en [Rie92].

[Rie59] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie (1859); reimpreso en [Rie92].

[Rie61] B. Riemann, *Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Ill^{ma} Academia Parisiensi propositae* (1861); reimpreso en [Rie92].

[Rie68] B. Riemann, *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde Liegen*, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **13**, 133–152 (1868); reimpreso en [Rie92]; traducciones al inglés en [Cl73], [Wh29] y [Sp79]; traducción al español en [Vi58].

[Rie92] B. Riemann, *Gesammelte matematische Werke* (Teubner, Leipzig, 1892); reimpresión (Dover, New York, 1953).

[Ru59] H. Rund, *The Differential Geometry of Finsler Spaces* (Springer, Berlin, 1959).

[Sp79] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* (Publish or Perich, Houston, 1979); p. 132, traducción de [Rie68].

[Ta93] V. Tapia, *Integrable Conformal Field Theory in Four Dimensions and Fourth–Rank Geometry*, Int. J. Mod. Phys. D **2**, 413 (1993).

[Ta96] V. Tapia, D. K. Ross, A. L. Marrakchi and M. Cataldo, *Renormalizable Conformally Invariant Model for the Gravitational Field*, Class. Quantum Grav. **13**, 3261 (1996).

[Ta98] V. Tapia and D. K. Ross, *Conformal Fourth–Rank Gravity, Non–Vanishing Cosmological Constant, and Anisotropy*, Class. Quantum Grav. **15**, 245 (1998).

[Vi58] E. Vidal A., *Sobre las Hipótesis que Sirven de Fundamento a la Geometría*, en *Estado Actual, Métodos y Problemas de la Geometría Diferencial*, Revista de Matemática Hispano Americana **18**, 28–70 (1958). Traducción de [Rie68].

[We27] H. Weyl, *Space, Time and Matter* (Dover, New York, 1927).

[Wh29] H. S. White, in *A Source Book of Mathematics*, ed. by D. E. Smith (McGraw–Hill, New York, 1929); p. 411, traducción de [Rie68].

[Ze94] E. Zermelo, *Untersuchungen zur variationsrechnung*, Dissertation, Berlin (1894).