MISCELÁNEA MATEMÁTICA **36** (2002) 63–82 SMM

La función zeta de Riemann

Felipe Zaldívar
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
Apdo. Postal 55-534
09340 México, D.F.
México
fzc@xanum.uam.mx

Resumen

En 1859 Bernhard Riemann fue admitido como miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de Berlín y uno de sus primeros deberes era presentar un reporte de sus trabajos más recientes. Para este reporte [4] Riemann eligió lo que sería su único trabajo sobre teoría de números, la distribución de los números primos, donde la función zeta, que ahora lleva su nombre tiene un papel importante. En este artículo, hacemos una lectura del artículo de Riemann [4], recordando las ideas involucradas sobre la función zeta, hasta arribar a la formulación de la conjetura (hipótesis) de Riemann: los ceros no triviales de la función zeta tienen parte real $1/2$. En esencia esto ocupa menos de tres páginas del reporte de Riemann, las cuales traducimos en el apéndice, para beneficio del lector interesado.

Introducción

Pensando en la función zeta de Riemann, recuerdo el ensayo de Borges, *Kafka y sus precursores* incluido en [1], donde el punto principal es la tesis de que cada gran creador inventa a sus precursores, de tal forma que uno lee a éstos a luz de la obra actual. Que Riemann no descubrió la función que lleva su nombre es un hecho conocido; que la función zeta no es la misma en Riemann que en sus precursores, también es claro; que a partir de Riemann leamos las apariciones previas de zeta como manifestaciones primitivas de la misma, y que sólo tienen sentido a partir del único artículo [4] que Riemann escribió al respecto, es exactamente la tesis de Borges. Entre los precursores de la función zeta, bien puede incluirse el descubrimiento por los griegos de la época clásica, al menos en la forma de paradojas, de que una suma infinita, una serie, pueda tener una suma finita, por ejemplo la paradoja de *Aquiles y la tortuga* de Zenón de Elea que, según narra Aristóteles, puede resumirse así: un móvil que está en A no podrá alcanzar el punto B, porque antes deberá recorrer la mitad del camino entre los dos, y antes, la mitad de la mitad, y antes, la mitad de la mitad de la mitad, y así hasta el infinito. Dicho con símbolos, si la distancia entre A y B la llamamos una unidad, Zenón preguntaba por la suma infinita

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ \cdots$$

No debe causar asombro que éste sea el primer ejemplo, entre los precursores de Kafka, que Borges menciona en su ensayo, de tal forma que Aquiles o la flecha del eleático son los primeros personajes que aparecen como términos de una serie infinita. Sin dejar la Grecia clásica, la proposición 35 del libro IX de los Elementos de Euclides esencialmente muestra cómo sumar cualquier progresión geométrica

$$1+s+s^2+s^3+s^4+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}s^n=\frac{1}{1-s}$$

cuya razón sea $0<s<1$, el caso de la paradoja del eleático corresponde a la razón $1/2$. Más aún, Arquímedes, en su *Quadratura de la Parábola* de hecho calcula la suma de la progresión geométrica infinita de razón $1/4$. Hacia la mitad del siglo 14, en un libro que gozó de cierta popularidad, Nicola Oresme demostró que la serie armónica

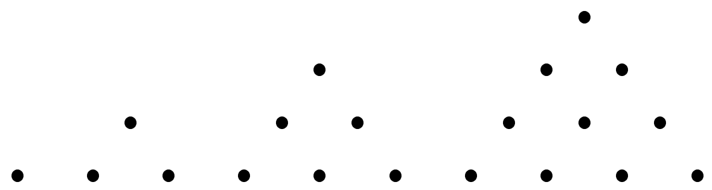
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

diverge. En el siglo 17 ya se podía probar que la serie (formalmente simétrica con respecto a la serie geométrica al intercambiar s y n):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots$$

converge para $s>1$, por ejemplo usando el criterio de la integral. Sin embargo, el cálculo de su suma, para valores enteros de $s\geq 2$, había eludido a los matemáticos de la época.

El segundo precursor que quisiera mencionar es un texto, publicado en Boloña en 1650 por Pietro Mengoli, dedicado a la teoría de series infinitas, donde, en particular, considera la suma de los recíprocos de los números triangulares. Recordemos que un *número triangular* T_n es el número natural que resulta al contar objetos, digamos piedras, colocados en un triángulo equilátero de base n:



$T_1 = 1$ $T_2 = 3$ $T_3 = 6$ $T_4 = 10$

de tal forma que el n-ésimo número triangular es la suma

$$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

por lo que la serie considerada por Mengoli es:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots$$

cuyo término n-ésimo es

$$a_n = \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1},$$

de donde se sigue que la suma parcial de los primeros n términos es

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{n-1} - \frac{2}{n}\right) + \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}\right) \\ &= \frac{2}{1} - \frac{2}{n+1}, \end{aligned}$$

y así la serie infinita converge a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2.$$

Mengoli ya sabía que la serie armónica diverge, y se pregunta por lo que sucede al considerar la suma de los recíprocos de los cuadrados de los números naturales:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

maravillándose por el hecho de que haya podido sumar los recíprocos de los números triangulares pero que no haya podido hacer lo mismo con la suma de los recíprocos de los cuadrados, lo cual, según él escribe, "requiere la ayuda de un intelecto más rico". Así, el problema de calcular la suma de la serie

$$\zeta(m) := \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m}$$

para $m \geq 2$ entero ya estaba planteado claramente y, a principios del siglo 18, varios matemáticos, incluyendo a Jacob Bernoulli, trataban de entender hacia donde convergía esta serie, un problema difícil debido a su lenta convergencia. Daniel Bernoulli y Christian Goldbach intercambiaron varias cartas con resultados preliminares sobre $\zeta(2)$, que pronto serían superados por L. Euler que, en este marco conceptual, hizo su primer contacto con la función zeta y pronto mejoraría los cálculos de sus predecesores. Finalmente, en 1735, Euler anunció que $\zeta(2) = \pi^2/6$, un resultado que contribuiría establecer su prestigio como matemático y que se difundió rápidamente entre los especialistas. Poco después, Euler anunciaría la generalización del cálculo anterior a $\zeta(2n)$, $n \geq 1$ entero, y en los siguientes 10 años, debido a críticas y dudas, de sus contemporáneos y de él mismo, revisó y dio varias demostraciones de los cálculos anteriores, de tal forma que ya pudo incluir, en su *Introductio in Analysin Infinitorum* de 1748, un tratamiento enteramente satisfactorio del tema. Es también relevante mencionar que, en un artículo presentado a la Academia de San Petersburgo en 1739, Euler obtuvo la descomposición de $\zeta(n)$ en términos de un producto que involucraba a todos los primos; este es el punto donde, más de siglo y medio después, B. Riemann comienza su único artículo [4] sobre la función que lleva su nombre y que él denotó por $\zeta(s)$, para s un número complejo. Comencemos con el resultado de Euler:

Teorema (Euler). *Si $s > 1$ es un real, entonces* $\zeta(s) = \displaystyle\prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$.

Demostración: Para cada primo $p \geq 2$ y $s > 1$, observemos que el factor de Euler $(1 - p^{-s})^{-1}$ es la suma de la serie geométrica con razón $r = p^{-s} < 1$:

$$\frac{1}{1 - p^{-s}} = 1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \cdots \tag{1}$$

Ahora, hagamos variar al primo p entre $2 \leq p \leq q$, para q otro primo, y multipliquemos las series (1) correspondientes. El término general de este producto es de la forma

$$2^{-e_2\cdot s}3^{-e_3\cdot s}\cdots q^{-e_q\cdot s} =: n^{-s},$$

donde

$$n := 2^{e_2}\cdot 3^{e_3}\cdots q^{e_q}, \quad (e_j \geq 0).$$

Obsérvese que un número n aparece de esta forma si y sólo si sus divisores primos son $\leq q$, y por el teorema fundamental de la aritmética este n aparece sólo una vez. Se sigue que

$$\prod_{p\leq q}\frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{p|n,\, p\leq q} n^{-s},$$

donde la suma es sobre aquellos enteros positivos n cuyos factores primos son $\leq q$. Observemos ahora que en la suma del lado derecho en particular aparecen todos los enteros del 1 al q; se sigue entonces que

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \sum_{p|n,\, p\leq q} n^{-s} < \sum_{n=q+1}^{\infty} n^{-s},$$

y aquí $\sum_{n=q+1}^{\infty} n^{-s} \to 0$ cuando $q\to\infty$. Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \lim_{q\to\infty}\sum_{p|n,\, p\leq q} n^{-s} = \lim_{q\to\infty}\prod_{p\leq q}\frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_{p \text{ primo}}\frac{1}{1-p^{-s}}.$$

$\square$

La expansión en producto de Euler de $\zeta(s)$ guarda el teorema fundamental de la aritmética en una sóla ecuación. Esto muestra, de inicio, la importancia aritmética de la función zeta.

La función zeta. En 1859 Bernhard Riemann fue elegido como miembro correspondiente de la Academia de Berlín y en el reporte sobre sus trabajos más recientes, que debía presentar a la Academia, Riemann eligió a la distribución de los números primos, y en su reporte [4] comienza citando el teorema de Euler sobre la descomposición de $\zeta(s)$ como un producto. Ya de entrada Riemann considera a $\zeta(s)$ como una función de una variable compleja "siguiendo" el dictum futuro, (Hadamard), de que en ocasiones la ruta a una verdad del mundo real, pasa por el mundo imaginario (complejo). Así, dados $s=\sigma+it\in\mathbb{C}$ y $k\geq 1$ un entero, se tiene que, para $\mathrm{Re}(s):=\sigma$ la parte real de $s\in\mathbb{C}$:

$$|k^s| = |\exp(s\cdot\log k)| = \exp(\mathrm{Re}(s)\cdot\log k) = k^{\mathrm{Re}(s)},$$

y consecuentemente
$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{k^s}\right| = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\mathrm{Re}(s)}},$$
por lo que, si $\mathrm{Re}(s) \geq 1+\varepsilon$, entonces
$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{k^s}\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{k^{1+\varepsilon}}\right|$$
y así la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$
converge absoluta y uniformemente en $\{s \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re}(s) \geq 1+\varepsilon\}$ y por lo tanto define una función holomorfa en el semiplano $\{s \in \mathbb{C} \ : \mathrm{Re}(s) > 1\}$ a la que Riemann denota por
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$
y a la que se suele llamar la *función zeta de Riemann.*

Una fórmula integral para la función zeta. El primer objetivo del artículo [4] de Riemann es obtener una fórmula integral para la función $\zeta(s)$ definida en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 1$ mediante la serie anterior y, usando esta fórmula, deducir que $\zeta(s)$ se extiende a una función holomorfa en todo el plano complejo excepto por un polo simple en $s = 1$. La demostración descansa en una fórmula integral para la función gamma de Euler que, para $\mathrm{Re}(s) > 0$, está definida por la integral impropia convergente
$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{s}\frac{dx}{x}$$
la cual satisface las propiedades siguientes (véase [6]):

(1) $\Gamma(s)$ es holomorfa en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 0$.

(2) $\Gamma(s)$ admite una continuación meromorfa a todo el plano complejo y sus únicos polos son simples en $s = -n$, $n \geq 0$ entero, y no tiene ceros.

(3) $\Gamma(s)$ satisface las ecuaciones funcionales siguientes:

(i) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

(ii) $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi s)}$.

(4) $\Gamma(s)$ tiene los valores especiales siguientes:

(i) $\Gamma(1) = 1$, lo cual se sigue directo de la definición.

(ii) $\Gamma(n+1) = n!$, $n \geq 1$ entero, se sigue aplicando 3(i) y 4(i).

Para relacionar la función gamma con la función zeta, Riemann comienza con la definición de gamma:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^s \frac{dx}{x}, \quad \text{para } \operatorname{Re}(s) > 1$$

y hace la substitución $x \mapsto nx$, para $n \geq 1$ entero, lo cual da la ecuación

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-nx}(nx)^s \frac{ndx}{nx} = n^s \int_0^\infty e^{-nx} x^s \frac{dx}{x},$$

i.e.,

$$\Gamma(s)\frac{1}{n^s} = \int_0^\infty e^{-nx} x^s \frac{dx}{x}$$

y luego sumando sobre $n \geq 1$ e intercambiando la integral y la suma, gracias al teorema de Fubini, se obtiene

$$\Gamma(s)\,\zeta(s) = \Gamma(s) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nx} x^s \frac{dx}{x} = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-nx} x^s \frac{dx}{x},$$

y usando el hecho de que $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty r^{-n} = (r-1)^{-1}$ con $r = e^x$ se sigue que

$$\Gamma(s)\,\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{1}{e^x - 1} x^s \frac{dx}{x} = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx. \tag{2}$$

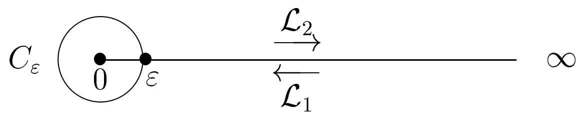
La igualdad (2) anterior, que se obtuvo usando operaciones elementales a partir de la función exponencial, bien podría haber sido obtenida antes de Riemann, para $s > 0$ real. Sin embargo, en este punto Riemann ya sabía cómo definir la integral en (2) para una variable compleja s, reemplazando la integral impropia de (2) por una integral de línea alrededor del punto de ramificación del integrando. Veamos cómo procede Riemann: pongamos

$$F(z) := \frac{z}{1 - e^{-z}} \quad \text{y} \quad G(z) := \frac{1}{e^z - 1}$$

y observe que $F(-z) = zG(z)$. Las funciones $F(z)$ y $G(z)$ son meromorfas en $\mathbb{C}$ con polos en $z = 2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$. Fijemos ahora un real ε tal que $0 < \varepsilon < 2\pi$ y sea

$$C = (\infty, \varepsilon] + C_\varepsilon + [\varepsilon, \infty)$$

la trayectoria dada por la semirecta $\mathcal{L}_1$ de ∞ a ε, luego sobre la circunferencia C_ε : $z = \varepsilon^{-it}$, $0 \le t \le 2\pi$, en sentido negativo y finalmente sobre la semirecta $\mathcal{L}_2$ de ε a ∞:



Consideremos ahora la integral, para $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\int_C G(z)z^{s-1}dz = \int_{\mathcal{L}_1} G(z)z^{s-1}dz + \int_{\mathcal{L}_2} G(z)z^{s-1}dz + \int_{C_\varepsilon} G(z)z^{s-1}dz,$$

donde $z^{s-1} := e^{(s-1)\log z}$, para el valor principal de $\log z$ dado por

$$\log z = \begin{cases} \log t & \text{para } z = t \in (\infty, \varepsilon) \\ \log t + 2\pi i & \text{para } z = t \in (\varepsilon, \infty). \end{cases}$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}_1} G(z)z^{s-1}dz &= \int_\infty^\varepsilon G(t)t^{s-1}dt = -\int_\varepsilon^\infty G(t)t^{s-1}dt, \\ \int_{\mathcal{L}_2} G(z)z^{s-1}dz &= \int_\varepsilon^\infty e^{2\pi is}G(t)t^{s-1}dt = e^{2\pi is}\int_\varepsilon^\infty G(t)t^{s-1}dt, \end{aligned}$$

ya que, en $\mathcal{L}_2$, $z = t^{s-1} = e^{(s-1)[\log t + 2\pi i]} = t^{s-1}e^{2\pi is}e^{-2\pi i} = t^{s-1}e^{2\pi is}$, y

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &:= \int_{C_\varepsilon} G(z)z^{s-1}dz = \int_0^{2\pi} G(\varepsilon e^{-it})\varepsilon^{s-1}e^{(s-1)(-it)}(-\varepsilon ie^{-it})dt \\ &= -i\int_0^{2\pi} \varepsilon^s G(\varepsilon e^{-it})e^{-sit}dt, \end{aligned}$$

ya que para $z = \varepsilon e^{-it}$, $dz = -\varepsilon ie^{-it}dt$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \int_C G(z)z^{s-1}dz &= -\int_\varepsilon^\infty G(t)t^{s-1}dt + e^{2\pi is}\int_\varepsilon^\infty G(t)t^{s-1}dt + I(\varepsilon) \\ &= [e^{2\pi is} - 1]\int_\varepsilon^\infty G(t)t^{s-1}dt + I(\varepsilon), \end{aligned}$$

y como $\mathrm{Re}(s) > 1$, entonces la integral $I(\varepsilon) \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$. Finalmente, como la integral $\int_C G(z)z^{s-1}dz$ no depende de ε, pasando al límite cuando $\varepsilon \to 0$, se tiene que

$$\int_C G(z)z^{s-1}dz = [e^{2\pi is} - 1]\int_0^\infty G(t)t^{s-1}dt.$$

Pongamos ahora

$$H(s) = \int_{-C} F(z)z^{s-1}\frac{dz}{z},$$

La integral que define a $H(s)$ converge absolutamente para toda $s \in \mathbb{C}$ y por lo tanto define una función entera. Es claro que $H(s)$ no depende del valor ε entre 0 y 2π.

Haciendo el cambio de variable $z \mapsto -z$ y notando que si $z = |z|e^{i\theta}$, entonces $-z = |z|e^{i\theta - i\pi}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} (-z)^{s-1} &= e^{(s-1)(\log|z| - i\pi)} = e^{(s-1)\log|z|}e^{(s-1)(-i\pi)} \\ &= z^{s-1}e^{-i\pi s}e^{i\pi} = -e^{-\pi is}z^{s-1} \end{aligned}$$

y así, como bajo $z \mapsto -z$ se tiene que $-C \mapsto C$, entonces

$$\begin{aligned} H(s) &= \int_C F(-z)(-z)^{s-1}\frac{d(-z)}{-z} = \int_C F(-z)(-z)^{s-1}\frac{dz}{z} \\ &= \int_C F(-z)z^{s-1}(-e^{-\pi is})\frac{dz}{z} = -e^{-\pi is}\int_C F(-z)z^{s-1}\frac{dz}{z} \\ &= -e^{-\pi is}\int_C zG(z)z^{s-1}\frac{dz}{z} = -e^{-\pi is}\int_C G(z)z^{s-1}dz. \end{aligned}$$

Así, para $\mathrm{Re}(s) > 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} H(s) &= -e^{-\pi is}\int_C G(z)z^{s-1}dz = -e^{-\pi is}[e^{2\pi is} - 1]\int_0^\infty G(t)t^{s-1}dt \\ &= -[e^{\pi is} - e^{-\pi is}]\int_0^\infty G(t)t^{s-1}dt = -[e^{\pi is} - e^{-\pi is}]\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}dt \\ &= -2i\,\mathrm{sen}(\pi s)\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}dt \\ &= -2i\,\mathrm{sen}(\pi s)\zeta(s)\Gamma(s) \quad \text{por (2)}, \end{aligned}$$

de donde se sigue que

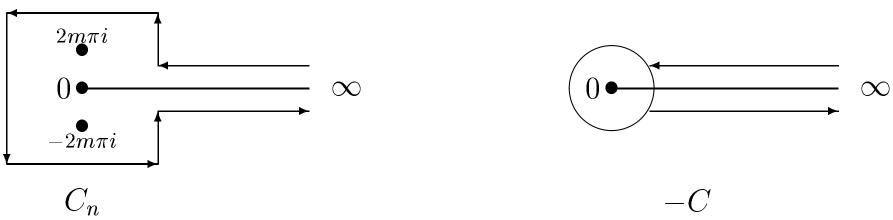
$$H(s) = -2i\,\mathrm{sen}(\pi s)\zeta(s)\Gamma(s) = \frac{-2\pi i\zeta(s)}{\Gamma(1-s)},$$

por la propiedad 3(ii) de Γ. Multiplicando por i y despejando se obtiene

$$\zeta(s) = \frac{i}{2\pi}\Gamma(1-s)\int_C \frac{(-z)^{s-1}dz}{e^z-1}.$$

Observe ahora que la fórmula anterior es válida para toda $s \in \mathbb{C}$, excepto $s = 1$, ya que la integral que define a $H(s)$ converge para todos los valores de s porque e^z crece más rápido que z^s, cuando $z \to \infty$, y la convergencia es uniforme en dominios compactos; se sigue que $H(s)$ es holomorfa. Por otra parte, $\Gamma(s-1)$ es meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos $s = 1, 2, 3, \ldots$ y como, para $\mathrm{Re}(s) > 1$, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ no tiene polos, entonces la integral $H(s)$ debe tener ceros en $s = 2, 3, 4, \ldots$ que cancelan los polos correspondientes de $\Gamma(s-1)$ en esos valores. Finalmente, para $s = 1$ se tiene que $\lim_{s\to 1}\zeta(s) = \infty$. Resumiendo, la fórmula integral para $\zeta(s)$ anterior muestra que $\zeta(s)$ se extiende a una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ y tiene un polo simple en $s = 1$.

La ecuación funcional. El segundo objetivo del artículo de Riemann [4] es mostrar que $\zeta(s)$ satisface una ecuación funcional que relaciona $\zeta(s)$ con $\zeta(1-s)$, donde esta última expresión tiene sentido ya que $\zeta(s)$ se extiende a todo el plano complejo como mostramos antes. Para obtener la relación deseada, consideremos las dos trayectorias siguientes



donde el cuadrado tiene vértices $\pm(2n+1)\pi \pm (2n+1)\pi i$, la circunferencia tiene radio $\varepsilon < 2\pi$ y las semirectas horizontales recorren el semieje real de $+\infty$ a ε y de ε a $+\infty$ como se indica. Nótese que C, cambiando la orientación de $-C$, es la trayectoria que se usó para definir a la integral $H(s)$ anteriormente. Consideremos ahora el ciclo $C_n - C$ y observemos que este ciclo rodea una sóla vez a cada uno de los puntos $\pm 2m\pi i$, para $1 \leq m \leq n$ y es claro que la función $f(z) = (-z)^{s-1}/(e^z-1)$ tiene polos simples con residuos $(\mp 2m\pi i)^{s-1}$ en cada uno de estos puntos. Por el teorema del residuo se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n-C}\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz &= \sum_{m=1}^{n} n(\pm 2m\pi i; C_n+C)\mathrm{Res}(f(z);\pm 2\pi i)\\ &= \sum_{m=1}^{n}\left[(-2m\pi i)^{s-1}+(2m\pi i)^{s-1}\right]\\ &= \sum_{m=1}^{n}(2m\pi)^{s-1}\left[(-i)^{s-1}+(i)^{s-1}\right]\end{aligned}$$

y observamos que $i=e^{\pi i/2}$ y $-i=e^{-\pi i/2}$, por lo que

$$\begin{aligned}\left[(-i)^{s-1}+(i)^{s-1}\right] &= e^{\pi i(s-1)/2}+e^{-\pi i(s-1)/2}=2\cos\left(\pi(s-1)/2\right)=\\ &= 2\,\mathrm{sen}(\pi s/2)\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$(*)\qquad \begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n-C}\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz &= \sum_{m=1}^{n} m^{s-1}(2\pi)^{s-1}2\,\mathrm{sen}(\pi s/2)\\ &= 2(2\pi)^{s-1}\,\mathrm{sen}(\pi s/2)\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^{1-s}}.\end{aligned}$$

Escribamos ahora la curva $C_n=C_n'+C_n''$, donde C_n' es el cuadrado y C_n'' son las semirectas de $+\infty$ a $(2n+1)\pi$. Para comenzar observemos que, en C_n', $|e^z-1|\geq$ una constante que no depende de n. Por otra parte, en C_n', $|(-z)^{s-1}|$ está acotada por un múltiplo de $n^{\sigma-1}$, donde $s=\sigma+it$. Se sigue que

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_n'}\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz\right| &\leq \mathrm{long}(C_n')\sup\left\{\left|\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}\right| \;:\; z\in C_n'\right\}\\ &\leq \mathrm{long}(C_n')(\text{constante})\; n^{\sigma-1}\\ &\leq Kn^{\sigma},\end{aligned}$$

la última desigualdad porque la longitud del cuadrado $\mathrm{long}(C_n')=16n+8$ y así K es una constante que no depende de n también. De la desigualdad anterior, si la parte real σ de s es tal que $\sigma<0$, entonces $Kn^{\sigma}\to 0$ cuando $n\to\infty$. Se sigue que la integral anterior tiende a 0 cuando $n\to\infty$. En forma similar se prueba que la integral sobre C_n'' tiende a 0 cuando $n\to\infty$. Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n-C}\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{-C}\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz=-\frac{1}{2\pi i}H(s).$$

Así, para el lado izquierdo de $(*)$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n - C} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{-C} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}dz = -\frac{1}{2\pi i}H(s)$$

y, para el lado derecho de $(*)$,

$$\lim_{n\to\infty} 2(2\pi)^{s-1}\operatorname{sen}(\pi s/2)\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^{1-s}} = 2(2\pi)^{s-1}\operatorname{sen}(\pi s/2)\zeta(1-s),$$

de donde se sigue que

$$-\frac{1}{2\pi i}H(s) = 2^s\pi^{s-1}\operatorname{sen}(\pi s/2)\zeta(1-s).$$

Ahora, como probamos antes,

$$H(s) = \frac{-2\pi i\zeta(s)}{\Gamma(1-s)},$$

que, junto con lo anterior nos da

$$\zeta(s) = -\frac{H(s)\Gamma(1-s)}{2\pi i} = 2^s\pi^{s-1}\operatorname{sen}(\pi s/2)\zeta(1-s)\Gamma(s-1)$$

o, usando la identidad $\Gamma(s)\Gamma(s-1) = \pi/\operatorname{sen}(\pi s)$, la igualdad anterior se puede reescribir como

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos(\pi s/2)\zeta(s),$$

y hemos así obtenido la ecuación funcional de la función zeta:

Teorema (Riemann). *La función zeta es una función meromorfa en* $\mathbb{C}$*, con un único polo simple en* $s = 1$*, y satisface la ecuación funcional*

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos(\pi s/2)\zeta(s).$$

□

Valores especiales de la función zeta. Por la descomposición en producto de Euler, no debiera ser una sorpresa que al evaluar la función zeta en ciertos enteros los resultados tengan significado aritmético especial. Comenzamos observando que la función

$$f(z) := F(-z) = zG(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

es una función meromorfa con polos en $z = 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, por lo que tiene una expansión en una vecindad de $z = 0$, de hecho en el disco $|z| < 2\pi$, de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

y notamos ahora que $\dfrac{z}{e^z - 1} + \dfrac{z}{2}$ es una función par, y por lo tanto en la expansión anterior los coeficientes $B_n = 0$ para toda $n > 1$ impar. Algunos valores de los números B_n, llamados *números de Bernoulli*, son

$$B_0 = 1,\ B_1 = -1/2,\ B_2 = 1/6,\ B_4 = -1/30,\ B_6 = 1/42,\ B_8 = -1/30, \text{ etc.}$$

Teorema. *Para todo entero $n > 0$ se tiene que*

$$\zeta(1-n) = (-1)^{n-1} \frac{B_n}{n} \quad \text{para } n > 0 \text{ entero.}$$

Demostración: Para la función $f(z)$ que define a los números de Bernoulli, obsérvese que $(n-1)! f(z) z^{-n-1}$ tiene un polo en $z = 0$ cuyo residuo se calcula fácilmente

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=0}\big((n-1)! f(z) z^{-n-1}\big) &= \text{coeficiente de } z^{-1} \text{ en } (n-1)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^{k-n-1} \\ &= \frac{B_n}{n}, \end{aligned}$$

así basta probar que

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) z^{-n-1} := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} f(z) z^{-n-1} dz = -\frac{\zeta(1-n)}{(n-1)!},$$

para $0 < \varepsilon < 2\pi$ y donde el círculo $|z| = \varepsilon$ está orientado positivamente. Recordemos ahora la función

$$H(s) = \int_{C_\varepsilon} F(-z) z^{s-1} \frac{dz}{z}$$

que apareció en el cálculo de la fórmula integral para zeta:

$$(*) \qquad \zeta(s) = -\frac{H(s)\Gamma(1-s)}{2\pi i},$$

de tal forma que la integral que aparece en el cálculo del residuo anterior es precisamente el valor de $H(s)$ en $s = 1 - n$, por lo que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z=0} F(z)z^{-n-1} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} F(z)z^{-n-1}dz = \frac{1}{2\pi i} H(1-n) \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\frac{2\pi i\,\zeta(1-n)}{\Gamma(n)} \quad \text{por } (*) \\
&= -\frac{\zeta(1-n)}{(n-1)!},
\end{aligned}$$

como se quería. □

Usando el teorema anterior y la ecuación funcional obtenida por Riemann, para $s = 2n$ con $n \geq 1$, se obtiene la igualdad

$$(-1)^{2n-1}\frac{B_{2n}}{2n} = \zeta(1-2n) = 2(2\pi)^{-2n}\,\Gamma(2n)\,\cos\left(\frac{2n\pi}{2}\right)\zeta(2n),$$

de donde se sigue que

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}B_{2n}}{2\cdot(2n)!}$$

que recupera la fórmula de Euler mencionada previamente, en particular, si $n = 1$, como $B_2 = 1/6$, se obtiene que $\zeta(2) = \pi^2/6$. Nótese que esta fórmula de Euler no se ve fácil de deducir de la fórmula integral para zeta que Riemann obtuvo al principio; quizá el problema de derivar la fórmula de Euler llevó a Riemann al descubrimiento de la ecuación funcional para la función zeta.

Los ceros triviales de zeta. De la igualdad

$$\zeta(1-n) = (-1)^{n-1}\frac{B_n}{n} \quad \text{para } n > 0 \text{ entero}$$

y como los números de Bernoulli de índice impar > 1 son cero, se sigue que

$$0 = \zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = \cdots = \zeta(-2n), \quad \text{para toda } n \geq 1.$$

A los números de la forma $s = -2n$, $n \geq 1$, se les llama los *ceros triviales* de la función zeta.

Los otros ceros de zeta. De la expansión en producto de Euler

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1-p^{-s}}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1,$$

se sigue que $\zeta(s)$ no tiene ceros en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 1$. Ahora, como $\Gamma(s)$ no tiene ceros, de la ecuación funcional de la función zeta, descontando los ceros triviales se sigue que s es un cero de $\zeta(s)$ si y sólo si $1-s$ lo es, y consecuentemente $\zeta(s)$ tampoco tiene ceros en el semiplano $\mathrm{Re}(s) < 0$, y por lo tanto todos los ceros no triviales de $\zeta(s)$ están en la franja $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ y, más aún, estos ceros están distribuidos simétricamente con respecto a la recta vertical $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

En este punto del artículo de Riemann, al final de la tercera página (de un total de 8), conjetura que *todos* los ceros no triviales de $\zeta(s)$ están en la recta $\mathrm{Re}(s) = 1/2$. Esta es la célebre *hipótesis de Riemann*, de la cual él mismo dice, en el artículo en cuestión, que "le gustaría tener una demostración rigurosa, pero que tiene que ponerla a un lado, después de unos intentos vanos, porque no es necesaria para su objetivo inmediato", a saber la demostración de su fórmula para el número de primos menores que una cantidad x dada.

Hadamard demostró que $\zeta(s)$ no tiene ceros en la recta $\mathrm{Re}(s) = 1$ y, por la ecuación funcional, consecuentemente tampoco tiene ceros en el eje $\mathrm{Re}(s) = 0$. De hecho, Hadamard y de la Vallée-Poussin demostraron, independientemente, en 1896, que la ley de distribución de primos es equivalente a la afirmación de que la función zeta de Riemann no tiene ceros con parte real igual a 1, y consecuentemente obtienen el teorema de los números primos.

En 1914, G. Hardy [3] demostró que $\zeta(s)$ tiene un número infinito de ceros en la recta $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

Observación. En [4] Riemann da dos demostraciones de la ecuación funcional de la función zeta y aquí hemos reproducido la primera de ellas. Uno podría preguntarse por qué Riemann hace esto en un artículo de corte resumido. Una posible respuesta sería la siguiente: la primera demostración, que hemos reproducido arriba, tiene la ventaja de que en el transcurso de la misma se obtiene una fórmula integral para la función zeta que después se usa para recuperar los cálculos de Euler para $\zeta(2n)$. La segunda demostración no muestra ninguna bondad inmediata, y parte de la misma idea ahora con la substitución $x \mapsto \pi n^2 x$ en la fórmula integral para la función gamma de Euler, para después obtener la igualdad

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s) = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x} x^s \frac{dx}{x},$$

donde el integrando proviene de la serie theta de Jacobi

$$\theta(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i n^2 z},$$

es decir,

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s) = \int_0^\infty \frac{1}{2}(\theta(ix)-1)x^s\frac{dx}{x}$$

y haciendo la substitución $s \mapsto s/2$ esto se puede escribir como

$$\Lambda(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{1}{2}(\theta(ix)-1)x^{s/2}\frac{dx}{x},$$

y entonces Riemann nos recuerda, citando a Jacobi (que a su vez cita a Poisson) que la función theta de Jacobi representa una función holomorfa en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ y además satisface la ecuación funcional:

$$\theta(-1/z) = \sqrt{z/i}\,\theta(z).$$

De aquí Riemann deduce la ecuación funcional de la función zeta en la forma $\Lambda(s) = \Lambda(1-s)$. Desde un punto de vista conceptual ésta es una demostración más satisfactoria ya que nos dice que la función zeta satisface la ecuación funcional correspondiente porque es la *transformada de Mellin* de una función modular, a saber la función theta de Jacobi, una idea que resonará en la teoría de números en los años siguientes, tanto en el siglo 19 como en el siglo 20, hasta culminar con la demostración de la conjetura de Fermat a finales del siglo pasado.

Referencias

[1] J. L. Borges, *Kafka y sus precursores*, 107-109, en *Otras inquisiciones.* Alianza Editorial-Emecé Editores, Madrid, 1976.

[2] J. Hadamard, *Sur la distribution des zeros de la fonction $\zeta(s)$ et ses consequences arithmétiques.* Bull. Soc. Math. France **24**, 199-220 (1896).

[3] G. H. Hardy, *Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.* C.R. Acad. Sci. Paris, **158**, 1012-1014, 1914.

[4] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, incluido en *Gesammelte Mathematische Werke*, Dover, New York, 1953, 145-155.

[5] A. Weil, *Number theory: An approach through history from Hammurapi to Legendre.* Birkhäuser Verlag, Boston, 2001.

[6] E. Whittaker, & G. Watson, *A Course of Modern Analysis.* 4th Ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1950.

Apéndice. Ofrecemos a continuación una traducción de las primeras tres páginas del artículo [4] de Riemann de tal manera que el lector podrá verificar qué tan cerca seguimos el original de Riemann en la lectura que hicimos en nuestra exposición.

Sobre el número de primos menores que una cantidad dada[1]

Bernhard Riemann

Creo que la mejor manera de expresar mi gratitud por el honor que la Academia [de Berlín] me ha conferido al nombrarme uno de sus miembros correspondientes, es usar el privilegio que esta membresía conlleva para comunicar una investigación sobre la distribución de los números primos, un tema que atrajo la atención de Gauss y Dirichlet durante muchos años.

En esta investigación tomaré como punto de partida la observación de Euler de que el producto

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_n \frac{1}{n^s},$$

donde p recorre todos los números primos y n recorre todos los números naturales. A la función de una variable compleja s que estas dos expresiones definen cuando convergen, la denotaré por $\zeta(s)$. Estas expresiones convergen sólamente cuando la parte real de s es mayor que 1; sin embargo es fácil encontrar una expresión de esta función que siempre es válida. [En efecto,] usando la ecuación

$$\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx = \frac{\Gamma(s)}{n^s}$$

[1] Traducción de F. Zaldívar de las primeras páginas de *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, incluido en *Gesammelte Mathematische Werke*, reimpreso por Dover, New York, 1953, 145-155.

uno encuentra que

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x - 1}.$$

Si ahora uno considera la integral [de línea]

$$\int \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x - 1}$$

de $+\infty$ a $+\infty$ en el sentido positivo a lo largo de la frontera de un dominio que contiene al 0 pero ninguna otra singularidad del integrando en su interior, entonces fácilmente se ve que esta integral es igual a

$$(e^{-\pi is} - e^{\pi is}) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x - 1},$$

si en la función multivaluada $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$ el logaritmo de $-x$ está determinado de tal manera que es real para valores negativos de x. Así,

$$2\operatorname{sen}(\pi s)\Gamma(s)\zeta(s) = i \int_\infty^\infty \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x - 1}$$

donde la integral se definió arriba.

Esta ecuación define la función $\zeta(s)$ para todos los complejos s y muestra que es univaluada y finita para todos los valores de s diferentes de 1 y que se anula cuando s es un entero par negativo.

Cuando la parte real de s es negativa, la integral se puede tomar, en lugar de en el sentido positivo a lo largo de la frontera del dominio dado, en el sentido negativo a lo largo de la frontera del complemento de este dominio porque en este caso [cuando $\operatorname{Re}(s) < 0$] la integral sobre valores con módulos infinitamente grandes es infinitamente pequeña. Pero, dentro de este dominio complementario las únicas singularidades del integrando son los múltiplos enteros de $2\pi i$, y por lo tanto la integral es igual a la suma de las integrales tomadas alrededor de estas singularidades en el sentido negativo. Como la integral alrededor del valor $n2\pi i$ es $(-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$, esto nos da

$$2\operatorname{sen}(\pi s)\Gamma(s)\zeta(s) = (2\pi)^s \sum n^{s-1}[(-i)^{s-1} + i^{s-1}],$$

y por lo tanto [nos da] una relación entre $\zeta(s)$ y $\zeta(1-s)$, la cual, por las propiedades conocidas de la función Γ, se puede formular como la afirmación de que

$$\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s)$$

permanece invariante cuando s se reemplaza por $1-s$.

Esta propiedad de la función me motivó a considerar la integral $\Gamma(s/2)$ en lugar de la integral $\Gamma(s)$ en el término general de $\sum n^{-s}$, lo cual lleva a una expresión muy conveniente de la función $\zeta(s)$. De hecho,

$$\frac{1}{n^s}\Gamma(s/2)\pi^{-s/2} = \int_{\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{s}{2}-1} dx;$$

de tal forma que si uno pone

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} = \psi(x)$$

se sigue que

$$\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \int_0^{\infty} \psi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx$$

o, ya que

$$2\psi(x) + 1 = x^{-1/2}[2\psi(1/x) + 1] \qquad \text{(Jacobi, Fund., p. 184)},$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s) &= \int_1^{\infty} \psi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx + \int_0^1 \psi(1/x) x^{\frac{1}{2}(s-3)} dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}(s-3)} - x^{\frac{s}{2}-1} \right) dx \\
&= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} \psi(x) \left(x^{\frac{s}{2}-1} - x^{-(1+s)/2} \right) dx.
\end{aligned}$$

Si ahora ponemos $s = \frac{1}{2} + ti$ y

$$\Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right)(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \xi(t)$$

de tal forma que

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - (t^2 + \frac{1}{4}) \int_1^{\infty} \psi(x) x^{-3/4} \cos(\frac{t}{2}\log x) dx$$

o también

$$\xi(t) = 4\int_1^{\infty} \frac{d[x^{3/2}\psi'(x)]}{dx} x^{-1/4} \cos(\frac{t}{2}\log x) dx.$$

Esta función es finita para todos los valores finitos de t y se puede desarrollar como una serie de potencias en t^2 que converge rápidamente.

Ahora, como para valores de s con parte real mayor que 1, $\log\zeta(s) = -\sum\log(1-p^{-s})$ es finito, y ya que lo mismo es válido para los otros factores de $\xi(t)$, entonces la función $\xi(t)$ se anula sólo cuando la parte imaginaria de t está entre $\frac{1}{2}i$ y $-\frac{1}{2}i$. El número de raíces de $\xi(t)=0$ cuya parte real está entre 0 y T es aproximadamente

$$= \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$$

porque la integral $\int d\log\xi(t)$ tomada en el sentido positivo alrededor del dominio que consiste de todos los valores cuyas partes imaginarias están entre $\frac{1}{2}i$ y $-\frac{1}{2}i$ y cuyas partes reales están entre 0 y T (salvo una fracción de orden de magnitud $1/T$) es igual a $[T\log(T/2\pi)-T]i$ y, por otro lado, es igual a $2\pi i$ veces el número de raíces de $\xi(t)=0$ en el dominio. De hecho, se prueba que hay aproximadamente el mismo número de raíces reales[2] dentro de esta frontera y *es muy posible que todas las raíces sean reales.*[3] Me gustaría tener una demostración rigurosa de esto, pero he puesto a un lado su búsqueda después de algunos intentos vanos, ya que no es necesaria para el objetivo inmediato de mi investigación.

[2]En una carta citada en las observaciones al final del artículo de Riemann, por los editores de sus obras completas, en la página 149, Riemann dice que esta afirmación no ha podido probarla. Hasta la fecha permanece conjetural.

[3]La parte enfatizada (por el traductor) es, por supuesto, la célebre *hipótesis de Riemann.*