

DOI: <https://doi.org/10.47234/mm.7305>

# Inferencia fiducial

Edilberto Nájera

División Académica de Ciencias Básicas,  
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco  
edilberto.najera@ujat.mx

## 1. Introducción

El propósito de este trabajo es mostrar un panorama del trabajo desarrollado por Federico en inferencia fiducial. Para ver con más detalle los resultados que aquí se presentan, así como para conocer más acerca de las ideas y concepción de Federico sobre esta área de la estadística, se recomienda leer los artículos [10], [11], y [12].

Como investigador, Federico cultivó varias áreas de la estadística. Una de ellas fue la inferencia fiducial, en la que me dirigió la tesis de doctorado. Después de terminarla continué trabajando con él en esta área. Como resultado de ello se publicaron dos artículos, uno sobre generadores fiduciales y otro sobre la distribución fiducial en una familia de series de potencias; en el segundo también colaboró la Dra. Silvia Ruiz Acosta. En este artículo voy a referirme a algunos aspectos del trabajo que hicimos en dichos artículos.

Como una alternativa al argumento bayesiano, Fisher (véase [4]) propuso el argumento fiducial. En este enfoque el propósito es obtener una distribución  $h(\theta)$  del parámetro  $\theta$ , a partir de la muestra observada  $x$ , pero, a diferencia de la inferencia bayesiana, sin considerar ninguna distribución a priori  $\pi(\theta)$ . Si  $T(X)$  es una estadística suficiente tal que su función de distribución  $G(t; \theta)$  es decreciente como función de  $\theta$ , entonces bajo ciertas condiciones de regularidad ([4]) la distribución fiducial de  $\theta$  es  $H(\theta; t) = 1 - G(t; \theta)$ . Si  $G(t; \theta)$  es creciente como función de  $\theta$ , entonces la distribución fiducial de  $\theta$  es  $H(\theta; t) = G(t; \theta)$ . Este enfoque enfrenta varias dificultades en el caso multiparamétrico, excepto cuando la distribución tiene estructura de grupo (véase [6]). Aunque Fisher y Quenouille (véase [2]), en particular, trataron de obtener un método para deducir la distribución fiducial en el caso multiparamétrico, sus resultados fueron más bien controversiales, lo que originó que

durante gran parte de la segunda mitad del siglo pasado el argumento fiducial fuera prácticamente dejado de lado. Sin embargo, aproximadamente a partir de este siglo se ha convertido otra vez en un área de investigación activa. Como resultado de ello varios autores han propuesto formas alternativas para aplicar el argumento fiducial en el caso multiparamétrico; véase, por ejemplo, [13], [14], [7], [3], y [15].

En la sección 2 se presenta el generador que se obtuvo para la distribución fiducial de los parámetros de la distribución  $Gamma(\alpha, \beta)$ , así como una comparación que se hizo de la fiducial con las distribuciones bayesianas a posteriori, cuando las distribuciones a priori son la de Jeffreys (véase [1]) y las de referencia (véase [16]). En la sección 3 se ve el generador fiducial que se dedujo en el caso de la distribución Gaussiana Inversa. También se ven ejemplos en los que las distribuciones fiduciales obtenidas se comparan con las distribuciones bayesianas a posteriori cuando las distribuciones a priori son la de Jeffreys y la de Jeffrey modificada (véase [1]); las comparaciones resultan interesantes. Por último, en la sección 4 se aborda el caso de la distribución fiducial para distribuciones discretas que pertenecen a la familia de distribuciones de series de potencias, según [8]. Los resultados obtenidos, además de ser interesantes desde un punto de vista teórico, muestran la creatividad que caracterizó a Federico como investigador.

## 2. Distribución $Gamma(\alpha, \beta)$

Recordemos que

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

es la función de densidad de la distribución gamma con parámetro de forma  $\alpha$  y parámetro de escala  $\beta$ ,  $Gamma(\alpha, \beta)$ . Aunque esta distribución satisface el criterio de Brillinger (véase [2]) para la unicidad de la distribución fiducial de  $(\alpha, \beta)$ , no tiene estructura de grupo (véase [10]), motivo por el que no es posible obtenerla en forma cerrada. Sin embargo se puede deducir su generador fiducial para poder obtener simulaciones de ella.

Sea  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  una muestra aleatoria de la distribución gamma. A partir del hecho de que

$$T(X_1, X_2, \dots, X_n) = \left( \prod_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i \right)$$

es un estadístico suficiente minimal de  $(\alpha, \beta)$ , se obtiene el generador fiducial, el cual está dado por las ecuaciones (véase [10])

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^n F_Y^{-1}(U_i, \alpha)}{\left(\prod_{i=1}^n F_Y^{-1}(U_i, \alpha)\right)^{\frac{1}{n}}} &= \frac{T_2}{T_1^{1/n}} \\ \beta \sum_{i=1}^n F_Y^{-1}(U_i, \alpha) &= T_2, \end{aligned} \quad (1)$$

donde las  $U_i$ 's son observaciones independientes de la distribución  $U(0, 1)$ ,  $F_Y(y; \alpha)$  denota la función de distribución  $Gamma(\alpha, 1)$  y

$$(T_1, T_2) = \left( \prod_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i \right).$$

Así, dada una observación  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de la muestra aleatoria  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ , se generan  $m$  muestras de tamaño  $n$  de la distribución  $U(0, 1)$ , y para cada una de ellas se resuelve numéricamente el sistema de ecuaciones que resulta de (1); de este modo obtenemos una muestra de tamaño  $m$ ,  $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1), \dots, (\tilde{\alpha}_m, \tilde{\beta}_m)$  of  $(\alpha, \beta)$ . Con esta muestra podemos estimar numéricamente la función de densidad fiducial de  $(\alpha, \beta)$ .

**Ejemplo 2.1.** Se generó una muestra de tamaño  $n = 30$ , de la distribución  $Gamma(\alpha, \beta)$ , donde  $\alpha = 3$  y  $\beta = 5$ . Con el generador (1) se estimaron las densidades fiduciales de  $\alpha$  y  $\beta$ , cuyas gráficas aparecen como líneas continuas en las figuras 1 y 2, respectivamente. Con la misma muestra observada  $x_1, x_2, \dots, x_{30}$ , se obtuvieron las densidades bayesianas a posteriori de  $\alpha$  y  $\beta$  usando la distribución a priori no informativa de Jeffreys (véase [1]),

$$\pi(\alpha, \beta) \propto \frac{1}{\beta} (\alpha\psi'(\alpha) - 1)^{\frac{1}{2}},$$

donde  $\psi(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} (\log \Gamma(\alpha))$  y  $\psi'(\alpha) = \frac{d\psi(\alpha)}{d\alpha}$ .

Las gráficas de estas densidades a posteriori aparecen cada una como líneas punteadas y segmentadas en las figuras 1 y 2, respectivamente. Otra vez con la misma muestra  $x_1, x_2, \dots, x_{30}$  de la distribución  $Gamma(3, 5)$ , se estimaron las densidades a posteriori, pero ahora (ver [16]) primero usando como distribución a priori la de referencia cuando  $\alpha$  es el parámetro de interés y  $\beta$  el de ruido (ordenamiento  $\pi_\alpha(\alpha, \beta)$ ),

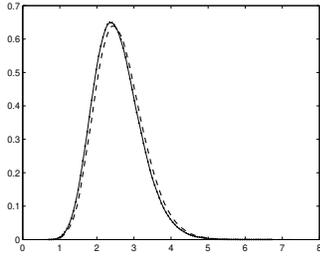
$$\pi_\alpha(\alpha, \beta) \propto \frac{1}{\beta} \left( \frac{\alpha\psi'(\alpha) - 1}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}},$$

y después cuando la distribución a priori es la de referencia cuando  $\beta$  es el parámetro de interés y  $\alpha$  es de ruido (ordenamiento  $\pi_\beta(\alpha, \beta)$ ),

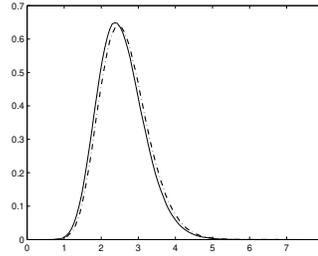
$$\pi_\beta(\alpha, \beta) \propto \frac{(\psi'(\alpha))^{\frac{1}{2}}}{\beta},$$

donde  $\psi(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} (\log \Gamma(\alpha))$ .

Las gráficas de estas densidades a posteriori de  $\alpha$  y  $\beta$  aparecen en las figuras 1 y 2 como líneas punteadas cuando la a priori es la de referencia bajo el ordenamiento  $\pi_\alpha(\alpha, \beta)$ , y como líneas segmentadas cuando la a priori es la de referencia bajo el ordenamiento  $\pi_\beta(\alpha, \beta)$ .

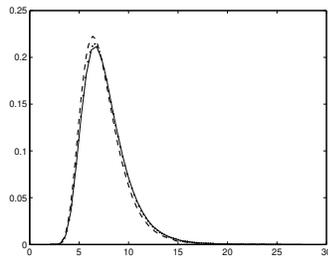


(a) Fiducial y bayesianas a posteriori con distribuciones a priori de referencia.

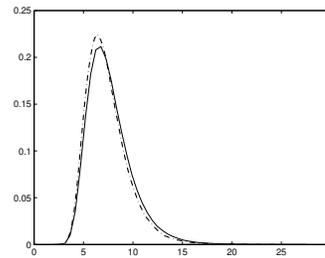


(b) Fiducial y bayesiana a posteriori con a priori de Jeffreys.

**Figura 1.** Densidades de  $\alpha$ . Gráfica con línea continua: fiducial; gráfica con línea punteada: bayesiana a posteriori con a priori de referencia cuando  $\alpha$  es el parámetro de interés; gráfica con línea segmentada: bayesiana a posteriori con a priori de referencia cuando  $\beta$  es el parámetro de interés; gráfica con línea punteada y segmentada: bayesiana a posteriori con a priori de Jeffreys.



(a) Fiducial y bayesianas a posteriori con distribuciones a priori de referencia.



(b) Fiducial y bayesiana a posteriori con a priori de Jeffreys.

**Figura 2.** Densidades de  $\beta$ . Gráfica con línea continua: fiducial; gráfica con línea punteada: bayesiana a posteriori con a priori de referencia cuando  $\alpha$  es el parámetro de interés; gráfica con línea segmentada: bayesiana a posteriori con a priori de referencia cuando  $\beta$  es el parámetro de interés; gráfica con línea punteada y segmentada: bayesiana a posteriori con a priori de Jeffreys.

### 3. Distribución Gaussiana inversa

La función de densidad de la distribución Gaussiana Inversa se puede escribir como (véase [5]),

$$f(x; \mu, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{\lambda(x - \mu)^2}{2\mu^2 x}\right), x > 0,$$

donde  $\mu > 0$  y  $\lambda > 0$  son los parámetros. Se sabe (véase [5]) que si  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  es una muestra aleatoria de la distribución Gaussiana Inversa con parámetros  $\mu$  y  $\lambda$ , que se denotará como  $IG(\mu, \lambda)$ , entonces  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  tiene distribución  $IG(\mu, n\lambda)$ ,  $V = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{X_i} - \frac{1}{\bar{X}}\right) \sim \left(\frac{1}{\lambda}\right) \chi_{(n-1)}^2$ , donde  $\sim$  significa «tiene distribución» y  $\chi_{(n-1)}^2$  denota la distribución Ji-cuadrada con  $n - 1$  grados de libertad,  $(\bar{X}, V)$  es una estadística suficiente minimal de  $(\mu, \lambda)$ , y  $\bar{X}$  y  $V$  son independientes. De este modo, aunque esta distribución tampoco tiene estructura de grupo, también satisface el criterio de unicidad de Brillinger para la unicidad de la distribución fiducial de  $(\mu, \lambda)$ . En lo que sigue por conveniencia se usa la parametrización  $(\mu, \theta)$ , con  $\theta = \frac{\lambda}{\mu}$ . Si  $\bar{Y} = \frac{1}{\lambda} \bar{X}$ , entonces  $\bar{Y} \sim IG\left(\frac{1}{\theta}, n\right)$ , pero su función de distribución también se puede escribir como

$$G(\bar{y}; \theta) = \Phi\left(-\left(\frac{n}{\bar{y}}\right)^{\frac{1}{2}} + n\theta\left(\frac{\bar{y}}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) + e^{2n\theta} \Phi\left(-\left(\frac{n}{\bar{y}}\right)^{\frac{1}{2}} - n\theta\left(\frac{\bar{y}}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

donde  $\Phi$  denota la función de distribución normal estándar. Se puede demostrar que  $G$  es decreciente como función de  $\theta$ , pero que  $\lim_{\theta \rightarrow 0} G(\bar{y}; \theta) = 2\Phi\left(-\left(\frac{n}{\bar{y}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ ; así, dada una observación  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de la muestra aleatoria  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ , para un valor dado  $\lambda^*$  de  $\lambda$  la distribución fiducial de  $\theta$  tiene en  $\theta = 0$  una masa fiducial dada por  $\delta(\bar{x}, \lambda^*) = 1 - 2\Phi\left(-\left(\frac{n\lambda^*}{\bar{x}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ . En este caso, teniendo en cuenta que  $G(\bar{Y}; \theta) \sim U(0, 1)$ , el generador de la distribución fiducial de  $(\theta, \lambda)$  está dado por las relaciones

$$\Phi\left(-\left(\frac{n}{\bar{Y}}\right)^{\frac{1}{2}} + n\theta\left(\frac{\bar{Y}}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) + e^{2n\theta} \Phi\left(-\left(\frac{n}{\bar{Y}}\right)^{\frac{1}{2}} - n\theta\left(\frac{\bar{Y}}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = U, \tag{2}$$

donde  $U$  es una variable aleatoria con distribución  $U(0, 1)$ . Así, dada una observación  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de la muestra aleatoria  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ , de la distribución  $IG(\mu, \lambda)$ , primero se encuentra el valor  $v = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{\bar{x}}\right)$  de  $V$ . Posteriormente se repite el siguiente procedimiento  $m$  veces: Se generan una observación de la distribución

$U(0, 1)$  y una observación de la distribución  $\chi_{(n-1)}^2$ , para las que se resuelve numéricamente el sistema de ecuaciones que resulta de (2). De este modo obtenemos una muestra de tamaño  $m$ ,  $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\lambda}_1), \dots, (\tilde{\theta}_m, \tilde{\lambda}_m)$  de  $(\theta, \lambda)$ . Con esta muestra podemos estimar numéricamente la función de densidad fiducial de  $(\theta, \lambda)$ .

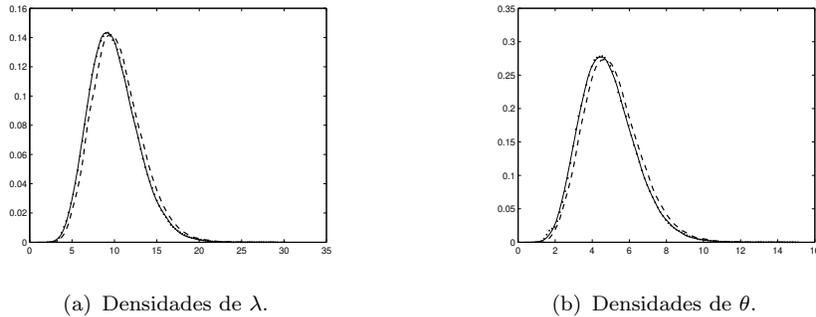
**Ejemplo 3.1.** Se generó una muestra aleatoria de tamaño  $n = 25$  de la distribución  $IG(2, 10)$ , (es decir,  $\theta = 5$ ). Usando el generador fiducial (2) se obtuvieron 100,000 valores  $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\lambda}_1), (\tilde{\theta}_2, \tilde{\lambda}_2), \dots, (\tilde{\theta}_{100000}, \tilde{\lambda}_{100000})$  de  $(\theta, \lambda)$ , con los que se estimaron las densidades marginales de  $\lambda$  y  $\theta$ . Sus gráficas están en líneas continuas en la figura 3. Con la misma muestra observada  $x_1, x_2, \dots, x_{25}$ , se obtuvieron las distribuciones bayesianas a posteriori de  $\lambda$  y  $\theta$ , usando la distribución a priori no informativa de Jeffreys

$$\pi(\mu, \lambda) \propto \lambda^{-1/2} \mu^{-3/2}.$$

Sus gráficas aparecen en líneas segmentadas en la figura 3. Otra vez con la misma muestra observada  $x_1, x_2, \dots, x_{25}$  de la distribución  $IG(2, 10)$ , se estimaron las densidades bayesianas a posteriori de  $\lambda$  y  $\theta$ , pero ahora usando la distribución a priori modificada de Jeffreys, la cual es

$$\pi_{mj}(\mu, \lambda) \propto \lambda^{-1} \mu^{-3/2}.$$

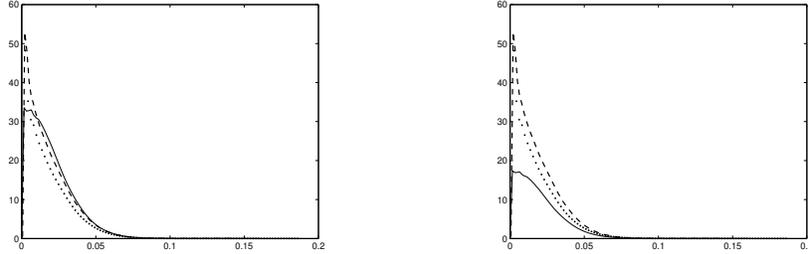
Sus gráficas están en líneas punteadas en la figura 3.



**Figura 3.** Gráficas en líneas continuas: fiduciales; gráficas en líneas punteadas: bayesianas a posteriori con a priori modificada de Jeffreys; gráficas en líneas segmentadas: bayesianas a posteriori con a priori de Jeffreys.

**Ejemplo 3.2.** Ahora se observó una muestra de tamaño  $n = 35$  de la distribución Gaussiana Inversa para la cual  $\theta = 0.01$ . Los resultados aparecen en la figura 4, donde solo se muestran las gráficas para  $\theta$  debido a la importancia en ellas de la masa fiducial. En la primera gráfica la densidad fiducial se normalizó de modo tal que su integral sea 1, mientras que en la segunda aparece tal y como fue generada

directamente. En esta figura se aprecia la diferencia entre la densidad fiducial y las densidades bayesianas a posteriori obtenidas.



(a) Densidad fiducial dividida entre 0.5176.

(b) La densidad fiducial tiene en cero una masa empírica de 0.4824; la masa teórica de de 0.4859.

**Figura 4.** Densidades de  $\theta$ . Gráficas en líneas continuas: fiduciales; gráficas en líneas punteadas: bayesianas a posteriori con a priori modificada de Jeffreys; gráficas en líneas segmentadas: bayesianas a posteriori con a priori de Jeffreys.

#### 4. Distribución fiducial en una familia de series de potencias

Sea  $T$  una estadística suficiente minimal del parámetro  $\eta$ , tal que  $T$  es una variable aleatoria discreta y su distribución pertenece a la familia Exponencial Natural

$$g(t; \eta) = a(\eta)b(t) \exp(t\eta), \eta \in (\underline{\eta}, \bar{\eta}).$$

Si  $G(t; \eta)$  es su función de distribución, entonces  $G(t; \eta)$  es decreciente como función de  $\eta$ ,  $\lim_{\eta \rightarrow \underline{\eta}} G(t; \eta) = 1$  y  $\lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} G(t; \eta) = 0$ . Sin embargo, la función de distribución de  $T$  continua por la izquierda,  $G^-(t; \eta)$ , también satisface estas propiedades, es decir,  $G(t; \eta)$  y  $G^-(t; \eta)$  satisfacen las propiedades de monotonía y de límite establecidas por Fisher (véase [4]) para la distribución fiducial. Así, en este caso se pueden obtener funciones de distribución fiduciales  $H_\gamma$  combinando  $G(t; \eta)$  y  $G^-(t; \eta)$  como sigue:

$$H_\gamma(\eta; t) = \gamma(1 - G(t; \eta)) + (1 - \gamma)(1 - G^-(t; \eta)), \text{ con } \gamma \in [0, 1].$$

Cuando el rango de valores de  $T$  es acotado, digamos  $\{0, 1, \dots, M\}$ , se tiene que para los valores extremos de  $T$  ( $0$  o  $M$ ) solo una de las funciones de distribución acumuladas,  $G$  y  $G^-$ , es no constante, de modo que excepto para estos casos la distribución fiducial que resulta para  $\gamma = \frac{1}{2}$  es la única elección de  $\gamma$  para la que se cumple que la distribución

fiducial que se obtiene es invariante en el sentido de la definición 4.2. A esta distribución se le llamará la *distribución fiducial corregida a la mitad*.

#### 4.1 Familia de series de potencias

**Definición 4.1.** Se dice que una distribución es de serie de potencias si su función de densidad se puede escribir como

$$f(x; \theta) = \frac{B_x \theta^x}{A(\theta)},$$

donde el parámetro  $\theta > 0$ , la variable aleatoria  $X$  toma valores en  $\{0, 1, \dots\}$ ,  $B_x \geq 0$  para  $x = 0, 1, \dots$ , y  $A(\theta) = \sum_x B_x \theta^x$ .

Una distribución de serie de potencias pertenece a la familia Exponencial Natural, con parámetro  $\eta = \log \theta$ . Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  es una muestra aleatoria de una distribución de serie de potencias, entonces  $T = \sum_{i=1}^n X_i$  es una estadística suficiente minimal, y su distribución también es de serie de potencias (véase [8]).

Un caso muy especial ocurre cuando el rango de valores de  $X$  es acotado, digamos  $\{0, 1, \dots, K\}$ .

**Definición 4.2. (Invarianza bajo reflexión de datos).** Si la distribución fiducial para  $\theta$  que se infiere de  $T$ , la cual tiene soporte finito  $\{0, 1, \dots, M\}$  y distribución con parámetro  $\theta$ , es la misma que la distribución fiducial obtenida transformando la distribución fiducial para  $\theta^*$  inferida de  $M - T$ , la cual tiene distribución con parámetro  $\theta^*$ , entonces el método de inferencia es invariante bajo reflexión de datos.

La demostración de los resultados que se enunciarán de aquí en adelante se pueden consultar en [11].

**Lemma 4.3.** Sean  $X_i, i = 1, \dots, n$ , variables aleatorias discretas independientes idénticamente distribuidas con rango acotado de valores  $\{0, 1, \dots, K\}$ , y sea  $T = \sum_{i=1}^n X_i$ . Si la distribución de las  $X_i$ 's es de serie de potencias con parámetro  $\theta$ , entonces la estadística  $V = M - T$ , donde  $M = nK$ , también tiene una distribución de serie de potencias con parámetro  $\theta^{-1}$ .

El siguiente teorema establece la invarianza bajo la reflexión de datos de la distribución fiducial corregida a la mitad.

**Teorema 4.4.** Sea  $X$  una variable aleatoria con rango finito  $0, 1, \dots, K$ , tal que su distribución es de serie de potencias con parámetro  $\theta$ , y sea  $T = \sum_{i=1}^n X_i$ , donde las  $X_i, i = 1, \dots, n$  son independientes con la misma distribución de  $X$ . Entonces la distribución fiducial corregida a

la mitad para  $\theta$  que se infiere habiendo observado  $T = t$ , y la distribución fiducial corregida a la mitad que se infiere habiendo observado  $V = v$ , donde  $V$  tiene la misma distribución de  $nK - T$ , coinciden si  $v = nK - t$ . Por lo tanto, el método para obtener la distribución fiducial corregida a la mitad es invariante bajo reflexión de datos.

**Ejemplo 4.5. (Distribución Bernoulli).** El ejemplo más sencillo de una distribución de serie de potencias con rango finito, el cual es  $\{0, 1\}$ , es la Bernoulli. La función de densidad  $h(\theta; t)$  que corresponde a la función de distribución fiducial corregida a la mitad,  $H(\theta; t)$ , es

$$h(\theta; t) = \begin{cases} c_n(\theta) \binom{n}{t} \theta^t & \text{si } t = 0, \\ \frac{1}{2} (c_n(\theta) \binom{n-1}{t} \theta^t) + \frac{1}{2} (c_n(\theta) \binom{n-1}{t-1} \theta^{t-1}) & \text{si } t = 1, \dots, n-1, \\ c_n(\theta) \binom{n-1}{t-1} \theta^{t-1} & \text{si } t = n, \end{cases}$$

donde  $c_n(\theta) = \frac{n}{(1+\theta)^{n+1}}$  y  $\theta = \frac{p}{1-p}$ .

En este caso la invarianza bajo reflexión de datos se refiere a invarianza cuando se intercambian éxito y fracaso, es decir,  $p$  por  $q$  y  $T$  por  $V$ , donde  $q = 1 - p$ . En [11] se pueden ver más propiedades de esta distribución fiducial.

#### 4.2 Serie de potencias: Caso no acotado

Por conveniencia, nos referiremos ahora a la distribución de  $T = \sum_{i=1}^n X_i$  con distribución de serie de potencias, donde ahora  $T$  toma valores  $0, 1, \dots$ , y donde el parámetro es  $\theta > 0$ . Sea

$$g(t; \theta) = \frac{B_t e^{t\theta}}{A(\theta)},$$

con  $A(\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j e^{j\theta}$ , su función de densidad.

**Definición 4.6. (Invarianza asintótica bajo reflexión de datos).** Supongamos que un modelo de la estadística suficiente  $T$ , con soporte discreto pero infinito, es el límite de una sucesión de modelos con soporte finito en los que el método de inferencia es invariante bajo reflexión de datos. Si las distribuciones inferidas para el parámetro convergen, se dice que el método es asintóticamente invariante bajo reflexión de datos.

Ahora se da la versión del teorema 4.4 para una distribución de serie de potencias con soporte infinito. Cuando el rango es no acotado no hay variable aleatoria  $V$  «complementaria».

**Teorema 4.7.** *Sea  $T$  una estadística con rango de valores en  $\{0, 1, \dots\}$ . Si su distribución pertenece a la familia de serie de potencias con parámetro  $\theta$ , entonces la distribución fiducial corregida a la mitad que se induce es el límite de las correspondientes distribuciones fiduciales corregidas*

a la mitad, que se obtienen al condicionar el rango a  $\{0, 1, \dots, M\}$  cuando  $M \rightarrow \infty$ , de modo que el método seguido para obtener la distribución fiducial corregida a la mitad es asintóticamente invariante bajo reflexión de datos.

Enseguida vemos dos ejemplos de distribuciones muy conocidas, las cuales también pertenecen a la familia de distribuciones de series de potencias.

**Ejemplo 4.8. (Distribución de Poisson).** Sea  $G(t; \lambda) = \sum_{j=0}^t \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!}$  la función de distribución de una variable aleatoria  $T$  con distribución de Poisson. La sucesión límite de  $G(t; \lambda)$

$$G_M(t; \lambda) = \begin{cases} \frac{\sum_{j=0}^t \frac{\lambda^j}{j!}}{\sum_{j=0}^M \frac{\lambda^j}{j!}} & \text{si } t = 0, 1, \dots, M, \\ 1 & \text{si } t = M + 1, \dots, \end{cases}$$

satisface que  $G_M(t; \lambda)$  es decreciente como función de  $\lambda$ ,  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} G_M(t; \lambda) = 1$  y  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} G_M(t; \lambda) = 0$ .

Por el teorema 4.7, la distribución fiducial corregida a la mitad que se obtiene es asintóticamente invariante bajo reflexión de datos. La función de distribución fiducial es

$$H(\lambda; t) = \begin{cases} 1 - G(t; \lambda) & \text{si } t = 0, \\ \frac{1}{2}(1 - G(t; \lambda)) + \frac{1}{2}(1 - G^-(t; \lambda)) & \text{si } t = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

y la función de densidad fiducial corregida a la mitad es

$$h(\lambda; t) = \begin{cases} e^{-\lambda} & \text{si } t = 0, \\ \frac{1}{2} \left( \frac{e^{-\lambda} \lambda^{t-1}}{(t-1)!} + \frac{e^{-\lambda} \lambda^t}{t!} \right) & \text{si } t = 1, 2, \dots. \end{cases}$$

**Ejemplo 4.9. (Distribución Binomial Negativa).** Sea  $r \geq 1$  un entero conocido. La densidad de la Binomial Negativa con parámetro desconocido  $p \in (0, 1)$  es

$$g(t; p) = p^r \binom{t+r-1}{r-1} (1-p)^t, \quad t = 0, 1, \dots.$$

La función de distribución  $G(t; p)$  es no decreciente como función de  $p$  y la sucesión límite de  $G(t; p)$  es

$$G_M(t; p) = \begin{cases} \frac{\sum_{j=0}^t \binom{j+r-1}{r-1} (1-p)^j}{\sum_{j=0}^M \binom{j+r-1}{r-1} (1-p)^j} & \text{si } t = 0, 1, \dots, M, \\ 1 & \text{si } t > M. \end{cases}$$

La sucesión correspondiente de funciones de distribución fiduciales corregidas a la mitad es

$$H_M(p; t) = \begin{cases} G_M(t; p) & \text{si } t = 0, \\ \frac{1}{2}G_M(t; p) + \frac{1}{2}G_M^-(t; p) & \text{si } t = 1, \dots, M - 1, \\ G_M^-(t; p) & \text{si } t = M, \end{cases}$$

la que satisface

$$\lim_{p \rightarrow 1} H_M(p; t) = 1 \text{ y } \lim_{p \rightarrow 0} H_M(p; t) = \frac{\sum_{j=0}^t \binom{j+r-1}{r-1}}{\sum_{j=0}^M \binom{j+r-1}{r-1}} > 0,$$

de modo que  $H_M(p; t)$  tiene una masa positiva en  $p = 0$  para cada  $M$ . Pero

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^t \binom{j+r-1}{r-1}}{\sum_{j=0}^M \binom{j+r-1}{r-1}} = 0.$$

Así, la función de distribución fiducial corregida a la mitad es

$$H(p; t) = \begin{cases} G(t; p) & \text{si } t = 0, \\ \frac{1}{2}G(t; p) + \frac{1}{2}G^-(t; p) & \text{si } t = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

y la densidad fiducial es

$$h(p; t) = \begin{cases} \beta(p; r, t + 1) & \text{si } t = 0, \\ \frac{1}{2} \beta(p; r, t + 1) + \frac{1}{2} \beta(p; r, t) & \text{si } t = 1, 2, \dots. \end{cases}$$

Por el teorema 4.7, esta distribución fiducial es asintóticamente invariante bajo reflexión de datos.

En [11] se pueden ver más propiedades de las distribuciones fiduciales de los ejemplos 4.8 y 4.9.

## 5. Comentarios finales

Federico tenía confianza en el futuro de la inferencia fiducial. Los hechos parecen haberle dado la razón, como se puede constatar de acuerdo a los trabajos sobre esta área publicados en la literatura estadística. Ejemplo de ello son [3], [9], y [15], por citar solo algunos.

## 6. Agradecimientos

Agradezco a los revisores anónimos sus valiosas sugerencias, las cuales contribuyeron a mejorar significativamente la versión final de este manuscrito.

## Bibliografía

- [1] J. M. Bernardo y A. F. M. Smith, *Bayesian theory*, John Wiley & Sons, England, (2004).
- [2] D. R. Brillinger, «Examples Bearing on the Definition of Fiducial Probability with a Bibliography», *Ann. Math. Stat.*, vol. 4, núm. 33, 1962, 1349–1355.
- [3] P. Chen y Z. S. Ye, «Approximate Statistical Limits for a Gamma Distribution», *Journal of Quality Technology*, vol. 49, núm. 1, 2017, 64–77, <https://doi.org/10.1080/00224065.2017.11918185>.
- [4] R. A. Fisher, «Inverse Probability», *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, núm. 26, 1930, 528–535.
- [5] J. Folks y R. Chhikara, «The Inverse Gaussian Distribution and Its Statistical Application—A Review», *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 40, núm. 3, 1978, 263–289.
- [6] D. A. S. Fraser, «The Fiducial Method and Invariance», *Biometrika*, núm. 48, 1961, 261–280.
- [7] J. H. Hannig, I. R. C. Lai y T. C. Lee, «Generalized Fiducial Inference: A Review and new Results», *Journal of American Statistical Association*, vol. 111, núm. 515, 2016, 1346–1361.
- [8] N. Johnson, S. Kotz y W. Kemp, *Univariate Discrete Distributions*, John Wiley & Sons. New York, 1992.
- [9] K. Krishnamoorthy y X. Wang, *Fiducial confidence limits and prediction limits for a gamma distribution: Censored and uncensored cases*, *Environmetrics*, 2016, <https://doi.org/10.1002/env.2408>.
- [10] E. Nájera y F. O'Reilly, «On fiducial Generators», *Communications in Statistics-Theory and Methods*, vol. 46, núm. 5, 2017, 2232–2248.
- [11] E. Nájera, F. O'Reilly y S. Ruiz-Acosta, «Fiducial distribution in a power series family», *Communications in Statistics-Theory and Methods*, vol. 48, núm. 23, 2019, 5796–5808.
- [12] F. O'Reilly y R. Rueda, «Fiducial Inference for the Truncated Exponential Distribution», *Communications in Statistics-Theory and Methods*, vol. 36, núm. 12, 2007, 2207–2212.
- [13] G. Taraldsen y B. H. Lindqvist, «Fiducial Theory and Optimal Inference», *The Annals of Statistics*, vol. 41, núm. 1, 2013, 323–341.
- [14] P. Veronese y E. Melilli, «Fiducial and Confidence Distributions for Real Exponential Families», *Scandinavian Journal of Statistics*, vol. 45, núm. 2, 2015, 471–484.
- [15] X. Wang, C. Zou, L. Yi, J. Wang y X. Li, «Fiducial inference for gamma distributions: two-sample problems», *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 2019, 811–821, <http://doi.org/10.1080/03610918.2019.1568471>.
- [16] R. Yang y J. O. Berger, *A catalog of noninformative priors. ISDS Discussion paper*, Institute of Statistics and Decision Sciences, Duke University, 1997.