Miscelánea Matemática **35** (2002) 17–40 SMM

Geodésicas y Curvatura: una introducción elemental

Santiago R. Simanca*
Institute for Mathematical Sciences
Stony Brook
NY 11794, USA
santiago@math.sunysb.edu

1 Geodésicas en superficies

Aunque nos parezca un hecho trivial, cuando consideramos una superficie S dentro de $\mathbb{R}^3$, ella adquiere una estructura métrica inducida por la métrica Euclideana en el espacio ambiente. Esto es tautológicamente obvio: dados vectores X, Y tangentes a S en un punto p, podemos pensarlos como vectores en $\mathbb{R}^3$ basados en el mismo punto, y definir su producto interno por

$$\langle X, Y\rangle_p = \langle X, Y\rangle_{\mathbb{R}^3} .$$

En particular, podemos definir la norma de X en p por la expresión

$$\|X\|_p = \langle X, X\rangle_{\mathbb{R}^3}^{\frac{1}{2}} .$$

Con esto en mente, podemos ahora plantearnos el problema de medir longitudes de curvas $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ que yacen en S, es decir, curvas para las cuales $\gamma(t) \in S$ para todo t. La solución de dicho problema es relativamente sencilla. Si consideramos un segmento de la curva γ infinitesimalmente pequeño, entre t y $t + dt$, la longitud dl de este segmento, a la cual llamaremos el elemento diferencial de longitud,

*El presente trabajo fue realizado bajo los auspicios de la Fundación Gabriella y Paul Rosenbaum.

estará dada por $dl = \|\dot{\gamma}\|_{\gamma(t)}dt$. La longitud de la curva entre los puntos $\gamma(t_0)$ y $\gamma(t_1)$ es la suma de estas contribuciones infinitesimales desde t_0 and t_1, es decir, la integral

$$L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} dl = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}\|_{\gamma(t)}dt\,. \tag{1}$$

Observe que dicha expresión tiene sentido siempre que sepamos medir la longitud del vector velocidad de la curva, independientemente de si la superficie está inmersa en el espacio Euclideano o no.

Ejemplo 1. Las curvas $\gamma_1(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ and $\gamma_2(t)=(\cos 2t, \operatorname{sen} 2t, t)$ yacen ambas en el cilindro $\{(x,y,z) : \; x^2+y^2=1\}$. Comienzan en $p=(1,0,0)$ cuando $t=0$, y pasan por el punto $q=(1,0,2\pi)$ cuando $t=2\pi$. Sus longitudes entre estos dos puntos son

$$L(\gamma_1) = 2\sqrt{2}\pi \quad \text{y} \quad L(\gamma_2) = 2\sqrt{5}\pi\,,$$

respectivamente. ¿Por qué es $L(\gamma_1)$ menor que $L(\gamma_2)$? □

Sabiendo entonces medir las longitudes de curvas en una superficie, podemos plantearnos problemas un tanto más exigentes. Entre otros, si nos damos puntos p y q en S, podemos preguntarnos si existen curvas en la superficie que unan a los puntos en cuestión, y de ser así, entre todas tales curvas, quisieramos encontrar aquella que tenga la menor longitud.

La primera parte del problema anterior es relativamente banal. A veces los puntos p y q dados no pueden conectarse por medio de curvas contínuas en la superficie, como en el caso de la superficie en $\mathbb{R}^3$ definida por la ecuación $x^2-y^2-z^2=1$, la cual posee dos hojas, y puntos en una de ellas no pueden ser unidos con puntos en la otra. Por tal motivo, nos apartaremos de trivialidades innecesarias considerando solamente superficies que sean conexas, o en el peor de los casos, considerando tan solo una componente conexa de la superficie dada. Pues si p y q yacen en la misma componente, siempre existirán curvas (contínuas) que los unan.

Bajo esta suposición, la segunda parte del problema adquiere sentido: puesto que existen curvas que unen a dos puntos dados p y q, podemos preguntarnos si existe una curva con tal propiedad cuya longitud sea lo más pequeña posible. Tal curva será, por definición, una *curva geodésica* que une a p y a q. De manera un poco más general, se define como geodésica entre p y q a cualquier curva en S que una a estos puntos y que sea un punto crítico del funcional longitud descrito en (1).

Previo al estudio de ejemplos, observemos que la solución al problema de cómo medir longitudes de curvas nos abre un gran camino de posibilidades para el estudio de la superficie S. En efecto, puesto que dados puntos p y q en S existen curvas que los unen cuyas longitudes sabemos cómo medir, podemos definir la función

$$d_S(p,q) = \inf_{\gamma} L(\gamma)\,,$$

tomando el ínfimo sobre todas las curvas en S que unen a los puntos dados. Dicha función claramente satisface las siguientes propiedades:

a) $d_S(p,q) \geq 0$, y es cero si $p = q$;

b) $d_S(p,q) = d_S(q,p)$;

c) $d_S(p,q) \leq d_S(p,r) + d_S(r,q)$.

Excepto por una propiedad que hace falta verificar, d_S define una noción de distancia en la superficie S. Tal propiedad tiene que ver con el recíproco de la propiedad indicada en (a): $d_S(p,q)$ solo puede ser cero cuando $p = q$.

Esto le confiere a la superficie S una estructura de espacio métrico. Podemos entonces preguntarnos si dicha estructura métrica determina de alguna forma cuáles son las curvas geodésicas en S. La respuesta es *sí*, y está codificada en la *desigualdad triangular* (c). Pues si definimos una noción de triángulo en la superficie cuyos lados tengan longitudes que satisfagan esta desigualdad, los segmentos de curvas que delimitan a tal triángulo son necesariamente segmentos de curvas geodésicas en el espacio métrico (S, d_S). Veamos.

Ejemplo 2. ¿Cuáles son las geodésicas en el plano con la métrica Euclideana?

Primero que todo, podemos cambiar de coordenadas si es necesario, para que en el nuevo sistema el plano dado sea el plano xy. Y en lo que respecta a este problema, nos referiremos a dicho plano como a $\mathbb{R}^2$ con su métrica usual, olvidándonos que está incluido en $\mathbb{R}^3$. No cometemos ningún error al hacerlo pues las métricas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ son compatibles. La noción de distancia entre los puntos $p = (p_1, p_2)$ y $q = (q_1, q_2)$ está dada por $d(p,q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$.

La distancia d ha sido usada desde hace muchos siglos en el estudio de triángulos, conjuntos delimitados por tres segmentos de rectas. La longitud de un lado en un triángulo cualquiera es la distancia entre los vértices que lo definen, y las longitudes de los tres lados satisfacen la desigualdad triangular. Esto es todo lo que necesitamos para poder concluir que los segmentos de rectas son las curvas geodésicas del plano.

En efecto, dados los puntos p y q, existe una curva que los une, y puesto que las longitudes están acotadas inferiormente, podemos definir $d(p,q) = \inf_\gamma L(\gamma)$. Supongamos que dicho ínfimo es realizado por alguna curva $\gamma(t)$. Si dicha curva no es un segmento de recta, tomemos una porción suficientemente pequeña de ella, digamos entre $t = a$ y $t = b$ donde esto se manifieste. Consideremos los puntos $p_0 = \gamma(a)$ y $q_0 = \gamma(b)$, y un punto intermedio $r = \gamma(t)$ para cierto $t \in (a,b)$. Como γ no es un segmento de recta en dicho intervalo, los puntos p_0, q_0 y r definen un triángulo. Si el intervalo $[a,b]$ tiene medida muy pequeña, el segmento de recta entre p_0 y r tiene longitud l_1 aproximadamente igual a la longitud de γ entre dichos puntos. De manera similar, el segmento de recta entre r y q_0 tiene longitud l_2 aproximadamente igual a la longitud de γ entre dichos puntos. En consecuencia, la longitud de γ entre p_0 y q_0 es aproximadamente igual a $l_1 + l_2$, y la aproximación es cada vez mas exacta en la medida en que el intervalo $[a,b]$ se haga cada vez más pequeño. Pero ahora bien, si l es la longitud del segmento de recta entre p_0 y q_0, por la desigualdad triangular podemos concluir que $l < l_1 + l_2$. Luego, obtendremos una curva entre p y q de longitud estrictamente más pequeña que $L(\gamma)$ si reemplazamos a la curva γ en el intervalo $[a,b]$ por el segmento de recta que une los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$. Pero esto contradiría el hecho de que γ realiza la distancia entre p y q, y por ende no puede haber una curva entre tales puntos de longitud menor a la longitud de γ. □

Ejemplo 3. Podríamos atacar el problema planteado en el ejemplo anterior usando técnicas de Cálculo Diferencial. Nos damos la función longitud de γ, $L(\gamma)$, para una curva γ que une a p y q, y nos proponemos hayar su mínimo. Hacemos esto hayando los puntos críticos de L, es decir, aquellos puntos donde su derivada se hace cero. ¿Qué quiere decir eso? Puesto que L es una función de γ, la interpretación de este método hay que hacerla con cierta delicadeza.

Comencemos por aclarar un tanto el dominio de la función L, el cual hemos ignorado hasta el presente. Se trata del conjunto de curvas que unen a p y q. No perdemos ninguna generalidad si suponemos que tales curvas unen a dichos puntos en tiempo 1, comenzando en $t = 0$ en p y terminando en $t = 1$ en q. Y puesto que queremos calcular sus longitudes, supondremos adicionalmente que tales curvas son diferenciables con respecto a t. O dicho de otra forma, que poseen vector velocidad en cada punto. También necesitaremos que posean vector acelaración, para lo cual se requiere la existencia de segundas derivadas. Terminamos así considerando al conjunto

$$\mathcal{C}_{pq} = \{\gamma : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^2 \; C^2 \text{ diferenciable}, \;\; \gamma(0) = p, \; \gamma(1) = q\}$$

como el dominio de la función L,

$$L : \mathcal{C}_{pq} \mapsto \mathbb{R}\,,$$

de manera que si escribimos a γ en coordenadas como $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, tendremos que

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{d\gamma_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_2}{dt}\right)^2} dt\,.$$

¿Cómo podemos calcular la derivada de L? Reduciendo dicho cálculo al de la derivada de una función de variable real, como aquellas sobre las cuales aprendemos en cursos elementales. Veamos.

Sea $h : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^2$ una función cualquiera que al menos sea diferenciable dos veces, y tal que $h(0) = h(1) = (0,0)$. Para un parámetro real τ y una curva γ en $\mathcal{C}_{pq}$, la función $\gamma_\tau = \gamma + \tau h$ también será un elemento de $\mathcal{C}_{pq}$, es decir, una curva C^2 diferenciable que une a los puntos p y q.

No parece el que hayamos ganado mucho, pero el argumento aún no termina. Supongamos que γ es un punto crítico de L, y más especificamente aún, supongamos que γ es un mínimo de L. Luego, $L(\gamma) \leq L(\tilde{\gamma})$ para toda curva $\tilde{\gamma} \in \mathcal{C}_{p,q}$. En particular, para cualquier h como la del párrafo anterior, tendremos que $L(\gamma) \leq L(\gamma_\tau)$, y la función $L(\gamma_\tau)$ tiene un mínimo local en $\tau = 0$. Por lo tanto, su derivada con respecto a τ debe ser nula cuando $\tau = 0$.

Como función de τ, $L(\gamma_\tau)$ es una función como las estudiadas en cursos de Cálculo Diferencial. Determinaremos su derivada, y usaremos el resultado para deducir la conclusión apropiada con respecto al problema de minimización que originalmente nos propusimos.

Usemos la notación $\dot{\gamma}$ para referirnos a derivadas con respecto a t, el argumento de la curva γ (o de h). Usando la regla de la cadena, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} L(\gamma + \tau h) \mid_{\tau=0} &= \frac{d}{d\tau} \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{d(\gamma_1 + \tau h_1)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(\gamma_2 + \tau h_2)}{dt}\right)^2} dt \mid_{\tau=0} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|} (\dot{\gamma}_1 \dot{h}_1 + \dot{\gamma}_2 \dot{h}_2) dt\,.
\end{aligned}$$

Ahora podemos integrar por partes. Puesto que $h(0) = h(1) = (0,0)$, los términos de borde se anulan, y obtenemos por resultado

$$\frac{d}{d\tau} L(\gamma_\tau) \mid_{\tau=0} = -\int_0^1 \left(h_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\gamma}_1}{\|\dot{\gamma}\|} \right) dt + h_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\gamma}_2}{\|\dot{\gamma}\|} \right) \right) dt\,.$$

Para que $\gamma = \gamma_0$ sea un mínimo de L, la expresión anterior debe ser identicamente nula para cualquier $h = (h_1, h_2)$ del tipo considerado. Escojamos a h de la forma

$$h = \eta(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|} \right)\,,$$

donde $\eta(t)$ es una función no negativa en $[0,1]$ que se anula en 0 y en 1, y que es identicamente igual a 1 en *casi todo* el resto del intervalo. Concluimos, por positividad del integrando, que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|} \right) = 0\,. \tag{2}$$

Podemos re-escribir el resultado anterior con respecto a un parámetro más conveniente que el parámetro t. Después de todo, t fue seleccionado arbitrariamente y, por conveniencia, podemos cambiarlo a nuestro antojo. En efecto, consideremos el parámetro *longitud de arco* s, relacionado con t por la ecuación diferencial

$$\frac{ds}{dt} = \|\dot{\gamma}(t)\|\,.$$

Notemos que como función de s, el vector velocidad de γ tiene norma 1. De hecho,

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}\,,$$

lo cual hace manifiestamente obvio lo afirmado. La ecuación (2) es equivalente a

$$\frac{d^2\gamma}{ds^2} = 0\,.$$

En otras palabras, como función de la longitud de arco, $\gamma(s)$ tiene aceleración nula, y por lo tanto, debe ser una función lineal en s. Puesto que une a los puntos p y q, si l es la longitud de γ entre dichos puntos, tendremos que

$$\gamma(s) = \frac{l-s}{l} p + \frac{s}{l} q\,.$$

Nótese como $\dot{\gamma}(s) = (q-p)/l$ es un vector de norma 1 pues $l = \|q-p\|$. Y observe que en este caso, la unicidad del punto crítico del funcional L en (1) es suficiente para concluir que la curva γ es en realidad su mínimo.

Las geodésicas en el plano que pasan a través de un punto dado jamás vuelven a tocarse. Por otro lado, dada una geodésica y un punto exterior a ella, existe una única geodésica que contiene a dicho punto y que no intersecta a la geodésica inicial. □

Ejemplo 4. ¿Cuáles son las geodésicas de la esfera de radio a? Responderemos a esta pregunta de manera muy sencilla, utilizando nuevamente el argumento del Ejemplo 2.

El radio a caracteriza a la esfera da una manera esencial. Y por estar incluida en $\mathbb{R}^3$, la esfera hereda una noción de distancia inducida por la noción de distancia en dicho espacio. De hecho, aprendemos sobre esta noción muy rápidamente, en cursos de Geometría Euclideana. Pues dado puntos p y q en la esfera de radio a, la distancia entre ellos es igual a $a\theta$, donde θ es el ángulo que sustenta el arco de p a q sobre el *meridiano* definido por dichos puntos. Llamamos meridiano de una esfera a cualquier circunferencia que tenga el mismo radio y centro de la esfera en cuestión. Ellos son el resultado de intersectar la esfera con planos que contienen a su centro. Dos puntos distintos de la esfera determinan un meridiano de manera única, pues ellos, junto con el centro, determinan de manera única un plano.

De esta manera, ya sabemos medir las distancias entre puntos de una esfera dada. Ahora podemos definir un triángulo esférico. Comenzaremos por decir que tres puntos de la esfera p, q y r no son colineales si los tres no yacen simultaneamente sobre el mismo meridiano. Dado tales puntos, el triángulo esférico que ellos definen es el conjunto de puntos de la esfera acotado por los arcos de los meridianos determinados por p y q, q y r, y r y p, respectivamente.

Las longitudes de los lados de triángulos esféricos satisfacen la desigualdad triangular. En consecuencia, repitiendo el argumento del Ejemplo 2, podemos concluir que las geodésicas de la esfera son sus segmentos de meridianos.

Las geodésicas esféricas (en otras palabras, los meridianos) que pasan a través de un punto vuelven a encontrarse en el punto antipodal. Por otro lado, dada una geodésica y un punto exterior a ella, no existe ninguna otra geodésica que contenga a dicho punto y que no intersecte a la geodésica inicial. □

Ejercicio 5. Convénzase de que los triángulos esféricos satisfacen la desigualdad triangular (relacione este hecho con propiedades de los conos sólidos sustentados por triángulos esféricos).

Ejercicio 6. Dé una demostración de que las geodésicas esféricas son segmentos de meridianos mayores usando un principio variacional, como el utilizado en el Ejemplo 3. ¿Qué sistema de coordenadas sería conveniente utilizar? ¿Cómo debe ser el vector aceleración de una geodésica esférica en relación con la esfera misma?

Ejemplo 7. Finalmente consideramos un caso muy interesante, el cual nos servirá de mucho. Por ahora nos ilustrará la dependencia estrecha que hay entre la noción de geodésica y la métrica subyacente sobre la superficie en cuestión.

Por razones históricas, imitaremos la notación usada en Física. Miraremos el conjunto de puntos $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{2+1}$ que satisfacen la relación $x^2 + y^2 - t^2 = -a^2$ para cierto número real $a > 0$:

$$H_a = \{(x, y, t) : \; x^2 + y^2 - t^2 = -a^2\} .$$

Sin embargo, le daremos a éste conjunto una estructura métrica que no es la inducida por la métrica Euclideana en $\mathbb{R}^3$. Veamos.

Dar una métrica en una superficie es darse una manera de medir el producto interno de vectores tangentes a la superficie en cualquier punto de ella. Si $U = u_1\partial_x + v_1\partial_y + w_1\partial_t$ y $V = u_2\partial_x + v_2\partial_y + w_2\partial_t$ son vectores tangentes a $\mathbb{R}^3$, definiremos la forma bilineal Q por la expresión

$$Q(U, V) = u_1u_2 + v_1v_2 - w_1w_2 .$$

A $\mathbb{R}^3$ provisto con esta estructura le llamaremos *espacio-tiempo*, terminología usada por los Físicos, y análoga al concepto de espacio Euclideano, término usado por los Matemáticos para referirse a $\mathbb{R}^3$ provisto con su estructura métrica habitual. Usando esta forma cuadrática, el conjunto H_a se torna en la Q-esfera de radio $\sqrt{-a^2}$.

Q no es un producto interno porque en general $Q(U, U)$ no es mayor o igual que cero. De hecho, podemos clasificar los vectores tangentes en tres tipos: decimos que U es un vector *espacial* si $Q(U, U) > 0$; U es un vector *temporal* si $Q(U, U) < 0$; y U es un vector *nulo* ó en el *cono de luz* si $Q(U, U) = 0$.

Le daremos a H_a la métrica que la forma bilineal Q induce sobre la superficie. Es decir, definiremos el producto interno en H_a por la expresión

$$\langle U, V \rangle \stackrel{def}{=} Q(U, V) . \tag{3}$$

¡Un momento! ¿Por qué es esto un producto interno sobre H_a? Para ello todos los vectores no triviales tangentes a H_a tendrían que ser espaciales, y eso no parece obvio, ¿verdad?

En efecto, no es obvio, pero lo podemos verificar. Consideremos un vector tangente a H_a en el punto (x, y, t):

$$U = u\partial_x + v\partial_y + w\partial_t \,.$$

Puesto que U es tangente a H_a en (x, y, t), tenemos que

$$xu + yv - tw = 0 \,,$$

y por ende,

$$\begin{aligned}
\langle U, U \rangle &= uu + vv - ww \\
&= u^2 + v^2 - \frac{(xu + yv)^2}{t^2} \\
&\geq \frac{t^2(u^2 + v^2) - (u^2 + v^2)(x^2 + y^2)}{t^2} \\
&= \frac{a^2}{t^2}(u^2 + v^2) \,.
\end{aligned}$$

En la obtención de este resultado, hemos apelado al uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

La cota inferior en la expresión anterior solo puede ser cero si $u = v = 0$, y en tal caso, w es cero también. En otras palabras, $\langle U, U \rangle \geq 0$, y puede ser igual a 0 solamente cuando U es el vector nulo. ¡Eureka! Sobre la superficie H_a, (3) define un producto interno en el espacio tangente en cada punto.

Ahora sabemos cómo medir la longitud del vector tangente a una curva en cada uno de sus puntos, y usando (1), podemos calcular su longitud. ¿Cuáles son entonces las curvas que minimizan este funcional en H_a? La respuesta es bastante sencilla, y la daremos usando un método variacional.

Puesto que H_a no es conexo, consideraremos su componente H_a^+ consistente de puntos (x, y, t) en este conjunto para los cuales $t > 0$. Y llamaremos s al parámetro de la curva $\gamma(s) = (x(s), y(s), t(s))$ que une a dos puntos dados p y q en H_a^+. La expresión $\dot{f}$ indicará la derivada de la función f con respecto a s, y por ahora, tomaremos el parámetro s de manera tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$. Luego, si $h = (h_1(s), h_2(s), h_3(s))$ es cualquier función tal que

$$x(s)h_1(s) + y(s)h_2(s) - t(s)h_3(s) = 0 \,, \tag{4}$$

y tal que $h(0) = h(1) = (0,0,0)$, entonces $\gamma_\tau = \gamma + \tau h$ define una familia de curvas en H_a que conecta a p con q, y que coincide con γ cuando $\tau = 0$. De tal manera que si γ es un punto crítico de (1), luego de una integración por partes, obtenemos que

$$0 = \frac{d\gamma_\tau}{d\tau} \mid_{\tau=0} = \int_0^1 (h_1 \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{x}}{\|\dot{\gamma}\|}\right) + h_2 \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{y}}{\|\dot{\gamma}\|}\right) - h_3 \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{t}}{\|\dot{\gamma}\|}\right)) ds\,,$$

donde $\|\dot{\gamma}\|$ es medida usando (3). Reparametricemos ahora la curva como hicimos en el Ejemplo 3, y usemos la longitud de arco, parámetro al cual llamaremos s también para evitar cambios innecesarias. En tal caso, $\|\dot{\gamma}\| = 1$, y en vista del multiplicador de Lagrange (4), la ecuación anterior, que se debe satisfacer para todo un tal h, implica que $\ddot{\gamma} = \frac{d\dot{\gamma}}{ds} = \lambda\gamma$. En otras palabras, el vector aceleración de una curva crítica debe ser proporcional al vector posición. Ahora bien, puesto que $\langle \gamma, \gamma \rangle = -a^2$, tenemos que $\langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle = 0$, y por lo tanto, $\langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle + \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0 = -\lambda a^2 + 1$. De tal manera que $\lambda = 1/a^2$. Luego, la ecuación geodésica, escrita con respecto a la longitud de arco, está dada por

$$\ddot{\gamma} = \frac{d\dot{\gamma}}{ds} = \frac{1}{a^2}\gamma\,,$$

y su solución es la curva

$$\gamma(s) = p \cosh\left(\frac{s}{a}\right) + av \operatorname{senh}\left(\frac{s}{a}\right),$$

donde el vector velocidad inicial v, el cual satisface $\langle v, v \rangle = 1$, se escoge de tal manera que $\gamma(l) = q$ para cierto número real positivo l, la longitud de γ entre p y q. Vemos entonces que

$$v = \frac{a^2 q + \langle p, q \rangle p}{a\sqrt{\langle p, q \rangle^2 - a^4}}\,,$$

y que la longitud de γ entre los puntos p y q es

$$l = a \log\left(\frac{-\langle p, q \rangle + \sqrt{\langle p, q \rangle^2 - a^4}}{a^2}\right).$$

En estas expresiones, $\langle p, q \rangle = Q(p,q)$ cuando vemos a p y a q como vectores tangentes en el espacio-tiempo.

Recordemos que las geodésicas esféricas se pueden obtener como intersecciones de la esfera con planos que pasan por su centro. Las geodésicas de la pseudo-esfera H_a se pueden obtener de manera similar, intersectando con planos. Sean p y q puntos distintos en H_a^+. Ellos junto con $(0,0,0)$ definen de manera única un plano. La geodésica en H_a que une a p y q es un segmento de la curva que se obtiene intersectando dicho plano con H_a. Tal afirmación se puede demostrar a partir de la expresión para la geodésica $\gamma(s)$ encontrada anteriormente, la cual, para cada valor de s, es una combinación lineal de los vectores p y q que yace en H_a.

La pseudoesfera H_a tiene una realización *visualmente* acotada. Consideremos la rama H_a^+, y miremos al mapa

$$(x, y, t) \mapsto (u, v) = \left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) .$$

Este es un difeomorfismo entre H_a^+ y el disco $D_a = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < a^2\}$, provisto con la métrica[1]

$$ds^2 = \frac{(1 - \frac{1}{a^2}(u^2+v)^2)(du^2+dv^2) + \frac{1}{a^2}(udu+vdv)^2}{(1-\frac{1}{a^2}(u^2+v)^2)^2}, \tag{5}$$

y las geodésicas vistas en D_a son segmentos de rectas. Sin embargo, desde el punto de vista métrico, el disco D_a no es acotado. Su métrica (5) difiere notablemente de $du^2 + dv^2$, la estructura inducida por la métrica habitual del plano, y bajo ella, el borde ∂D_a está a una distancia infinita de cualquiera de sus puntos interiores.

Las geodésicas en H_a se comportan de una manera interesante. Dada una geodésica y un punto exterior a ella, existe un número infinito de geodésicas a través de dicho punto que no intersectan a la geodésica original. □

Los ejemplos discutidos anteriormente tienen un comportamiento radicalmente distinto. Esto se debe a una propiedad que estudiaremos en la próxima sección, y que ya se manifiesta en las cosas que hemos hecho hasta ahora.

[1]La expresión ds^2 es una manera clásica de referirse al producto interno de vectores, de tal forma que si $U = \alpha(u,v)\partial_u + \beta(u,v)\partial_v$ y $V = \tilde{\alpha}(u,v)\partial_u + \tilde{\beta}(u,v)\partial_v$ son vectores tangentes a D_a en el punto (u,v), su producto interno en la métrica (5) es la función

$$\frac{(1-\frac{1}{a^2}(u^2+v)^2)(\alpha\widetilde{\alpha}+\beta\widetilde{\beta}) + \frac{1}{a^2}(u\alpha+v\beta)(u\widetilde{\alpha}+v\widetilde{\beta})}{(1-\frac{1}{a^2}(u^2+v)^2)^2}.$$

Cuando $U = V$ es el vector tangente a una curva, la raiz cuadrada de dicha expresión, es decir ds, produce el elemento diferencial de longitud de la curva.

En efecto, a manera de ejemplo ilustrativo, consideremos la esfera $\mathbb{S}^2$ de radio 1, el plano Euclideano $\mathbb{R}^2$, y la pseudo-esfera H de (pseudo) radio $\sqrt{-1}$. En cada uno de estos casos, miremos circunferencias en estos espacios, y calculemos sus longitudes. Por definición, las circunferencias se describen dando un punto en el espacio, su centro, y un número real positivo r, su radio, y consisten en el conjunto de puntos en la superficie que distan r unidades de su centro. Para los ejemplos escogidos, las longitudes de tales circunferencias no dependen del punto escogido como centro, y resultan ser iguales a $2\pi \operatorname{sen} r$, $2\pi r$ y $2\pi \operatorname{senh} r$, respectivamente.

En el caso de $\mathbb{S}^2$, el radio puede variar en el intervalo $(0, \pi)$, y la longitud de la circunferencia de radio r es una función acotada que alcanza su máximo cuando $r = \pi/2$, es decir, cuando se trata del meridiano ecuatorial, visto considerando su centro como uno de los polos esféricos.

Para el plano, las circunferencias de radio r tienen longitudes que varían linealmente con r, y puesto que este varía en $(0, \infty)$, dichas longitudes no están acotadas.

Para la pseudo-esfera H, el radio puede variar en $(0, \infty)$ y la función longitud de una circunferencia de radio r no está acotada tampoco, así como ocurre en el caso del plano. Sin embargo, esta vez tal longitud crece exponencialmente con el radio.

Por ejemplo, si escojemos al metro como unidad de longitud, las circunferencias de radio $\pi/2$ en cada uno de estos tres casos tendrán longitudes $6,283$ m, $9,870$ m, y $14,459$ m, respectivamente. Si escojemos un radio de 20 metros, la circunferencia correspondiente en H tendrá una longitud del orden de 10^9 m, es decir, del orden de un millón de kilometros. En el plano, tal circunferencia tendrá una longitud del orden de 125 m. En $\mathbb{S}^2$, un tal radio es excesivamente grande, y no podemos hablar de una circunferencia con estas características. De cualquier manera, ya sabemos que ahí la mayor longitud posible es de $6,283$ m.

Los resultados anteriores no dependen del punto escogido como centro porque las superficies estudiadas poseen una gran cantidad de simetrías. Cerca de cualquier punto, dichas superficies lucen métricamente de la misma manera como lucirían si cambiásemos el punto en cuestión.

2 Curvatura.

En las tres superficies distintas analizadas en la sección anterior, las geodésicas exhiben un comportamiento completamente distinto. Para la esfera, las geodésicas a través de un punto inicialmente se separan para luego enfocarse nuevamente en el punto antipodal. Para el plano, las geodesicas a través de un punto nunca vuelven a encontrarse, y la longitud de la circunferencia con centro en dicho punto crece proporcionalmente con la distancia a él. En el hiperboloide o pseudo-esfera, las geodésicas a través de un punto común tampoco vuelven a encontrarse, pero esta vez la longitud de la circunferencia centrada en dicho punto crece exponencialmente con la distancia al punto en cuestión. ¿Qué propiedad de la superficie es responsable por este comportamiento tan distinto de las geodésicas que pasan por un punto común?

La propiedad en cuestión es local, es decir, lo que contribuye a este comportamiento es algo intrínseco a la superficie cuyo efecto en un punto dado solo depende de lo que pasa métricamente *cerca* del punto. El efecto neto que produce *enfocamiento* o *dispersión* de las geodésicas es la "suma de estas contribuciones locales" cuando nos movemos a lo largo de la curva. Por ahora nos concentraremos en la definición y estudio de esta propiedad local, o *curvatura*.

El término es apropiado. Analicemos el concepto primeramente a través del estudio de una superficie S dentro del espacio Euclideano $\mathbb{R}^3$, dada por la ecuación $z = f(x, y)$. Queremos ver cómo se deforma dicha superficie en el punto $(0, 0, f(0, 0))$.

Por simplicidad, redefinimos las coordenadas, si es necesario, para ponernos en la situación donde $f(0, 0) = 0$. Luego, el plano tangente en el punto $(0, 0, 0)$, cuya ecuación es $xf_x(0, 0) + yf_y(0, 0) - z = 0$, nos permite aproximar linealmente la superficie. En otras palabras, si intentamos encontrar puntos (x, y, z) en S con x y y muy cercanos a cero, la mejor aproximación lineal es la dada por $z = xf_x(0, 0) + yf_y(0, 0)$ donde (x, y) varía en el entorno de $(0, 0)$ donde hacemos la aproximación. Eso está muy bien, pero dicha aproximación solo refleja la estructura lineal de la superficie S en el punto $(0, 0, 0)$. Y queremos ver la deformación de S en $(0, 0, f(0, 0))$ que nos indique su curvatura.

Parece entonces razonable estudiar la diferencia $z = f(x, y) - xf_x(0, 0) - yf_y(0, 0)$, y ver el comportamiento de la superficie resultante cerca de $(0, 0, 0)$. Puesto que hemos removido los términos que aproximan linealmente la superficie S en $(0, 0, 0)$, el estudio de esta nueva ecuación nos permitirá entender la deformación de S cerca de $(0,0,0)$ que no es lineal, y por ende, envuelve la contorsión local que la superficie experimenta. Tal contorsión dependerá de los términos cuadráticos de la función que define la superficie S en $(0,0,0)$, y resultará inexistente si estos se anulan en el punto. El concepto es uno de orden al menos 2.

Así pues, supongamos que

$$z = f(x,y)\,, \tag{6}$$

donde

$$f(0,0) = 0\,, \quad (f_x(0,0), f_y(0,0)) = (0,0)\,. \tag{7}$$

¿En qué sentido es esta superficie S curva en $(0,0,0)$?

En vista de las condiciones en (7), el plano tangente a S en el punto $(0,0,0)$ es horizontal (y coincide con el plano xy). La convexidad de S mide su curvatura en $(0,0,0)$, siendo positiva, como la de una esfera, cuando todos los puntos de S cerca de $(0,0,0)$ yacen en el mismo lado del plano tangente, ó negativa si en cualquier entorno de $(0,0,0)$ hay puntos que yacen en distintos lados de dicho plano. Esta explicación heurística adquiere precisión si definimos la curvatura K en $(0,0,0)$ por

$$K = \det \begin{pmatrix} \partial_x\partial_x f(0,0) & \partial_y\partial_x f(0,0) \\ \partial_x\partial_y f(0,0) & \partial_y\partial_y f(0,0) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

el determinante del Hessiano de la función f en el origen.

Puesto que el Hessiano es una matriz simétrica, se puede diagonalizar. Si λ_1 y λ_2 son sus autovalores, $K = \lambda_1\lambda_2$. Luego, $K > 0$ si ambos autovalores son no nulos del mismo signo, $K < 0$ si los autovalores son no nulos de signos distintos, y $K = 0$ si al menos uno de los autovalores es nulo. La explicación heurística del concepto de curvatura dada en el párrafo anterior queda perfectamente clara si escojemos las coordenadas (x,y,z) de tal forma que $f(x,y) = \frac{1}{2}\lambda_1 x^2 + \frac{1}{2}\lambda_2 y^2 + o(x^2+y^2)$, y estudiamos el gráfico de $z = f(x,y)$ en un entorno suficientemente pequeño del origen.

Usemos (8) para calcular la curvatura del plano. Esto es relativamente elemental. Dado cualquier punto p en el plano xy, pensado como un plano inmerso en $\mathbb{R}^3$, podemos escoger las coordenadas de tal forma que p corresponda a $(0,0,0)$ y que z esté dada por la función $f(x,y) \equiv 0$. El Hessiano de tal función es cero. Luego, $K(p) = 0$ para cualquier p, lo cual era de esperarse pues el plano es exactamente eso, plano.

Ahora usemos (8) para calcular la curvatura del la esfera de radio a. Podemos hacerlo pues la esfera también está sumergida en $\mathbb{R}^3$ y tiene la métrica que dicho espacio induce. El centro de la esfera es irrelevante, y dado un punto p cualquiera en ella, escogemos las coordenadas (x, y, z) de tal forma que p se corresponda con $(0,0,0)$ y la esfera esté dada localmente por $z = -a + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Luego,

$$K(p) = \det \begin{pmatrix} \partial_x\partial_x f(0,0) & \partial_y\partial_x f(0,0) \\ \partial_x\partial_y f(0,0) & \partial_y\partial_y f(0,0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{a} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{a} \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2}\,.$$

Este resultado muestra que la curvatura de la esfera es positiva y no depende del punto donde se calcule. Su valor a^{-2} disminuye cuadráticamente con el radio, lo cual es bastante razonable. Una esfera de radio cada vez más y más grande luce cada vez más y más plana. La Tierra, una (casi) esfera con un radio de aproximadamente $6378,15$ km, se creía plana hasta hace relativamente poco tiempo. Esto no es sorprendente. Su curvatura (en km^{-2}) es del orden de $3,46 \times 10^{-8}$.

Ejercicio 8. Considere las superficies en $\mathbb{R}^3$ definidas por las ecuaciones

$$z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \quad \text{and} \quad z = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\,.$$

Por la definición anterior, sabemos que sus curvaturas en el punto $(0,0,0)$ son 1 y -1, respectivamente. Calcule la curvatura de cada una de estas superficies en cualquiera de sus puntos. ¿Qué signo tienen los resultados?

Ejercicio 9. Demuestre que la curvatura de un cilindro en cualquiera de sus puntos es cero. ¿Por qué tiene el cilindro la misma curvatura que el plano?

A pesar del avance que hemos hecho en el estudio del concepto de curvatura, la definición se ha dado tan solo para superficies dentro del espacio Euclideano, hecho no aplicable a la pseudo-esfera H_a discutida en el Ejemplo 7. ¿Cómo podremos dar una definición intrínseca, es decir, una definicón que solo dependa de S y no del espacio ambiente donde S pueda estar incluida? Podemos responder dicha pregunta de varias formas, y por supuesto, todas involucran a la estructura métrica de la superficie.

Una primera forma consiste en definir la curvatura en un punto p por la expresión

$$K(p) = -3 \lim_{r \to 0} \Delta(\log r)\,. \tag{9}$$

Aquí, Δ es el Laplaciano de la métrica en S, y $r = r(q)$ es la distancia geodésica de q al punto p. El Laplaciano es aplicado a la función $\log r$ como función de q.

Veamos lo que (9) nos da en el caso del plano. La distancia geodésica de q a un punto fijo p es la longitud Euclideana del vector $q-p$. Tomemos coordenadas que identifiquen a p con el origen. Luego, $r = \|q\|$ es la distancia geodésica entre p y q. Ahora bien, en coordenadas polares (r, θ), el Laplaciano Δ es el operador dado por

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 \,.$$

Para funciones que sólo dependen del radio, el Laplaciano solo involucra el cálculo de dos de sus derivadas con respecto a r. De tal forma que

$$-3\Delta(\log r) = -3\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r\right)\log r = -3\left(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\right) = 0\,,$$

y por ende, $K(p) = 0$, como ya sabíamos.

Miremos ahora lo que (9) nos da en el caso de la esfera de radio a. Sea p un punto dado, y escojamos *coordenadas polares* (r, θ) en la esfera: r es la distancia geodésica al punto p, el cual tomamos como uno de los polos de la esfera, y θ es el ángulo longitudinal del punto, medido modulo 2π desde un meridiano fijo. En estas coordenadas, el Laplaciano de la esfera es el operador

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{\cos\left(\frac{r}{a}\right)}{a\,\mathrm{sen}\left(\frac{r}{a}\right)}\partial_r + \left(\frac{1}{a\,\mathrm{sen}\left(\frac{r}{a}\right)}\right)^2 \partial_\theta^2 \,.$$

Para calcular $\Delta(\log r)$ podemos ignorar nuevamente el término que envuelve a las derivadas con respecto a θ. Obtenemos

$$\Delta(\log r) = \left(\partial_r^2 + \frac{\cos\left(\frac{r}{a}\right)}{a\,\mathrm{sen}\left(\frac{r}{a}\right)}\partial_r\right)\log r = -\frac{1}{r^2} + \frac{\cos\left(\frac{r}{a}\right)}{ar\,\mathrm{sen}\left(\frac{r}{a}\right)} = -\frac{1}{3a^2} + O(r^2)\,,$$

donde la última igualdad se obtiene usando una expansión de Taylor en torno a $r = 0$. Luego,

$$K(p) = -3\lim_{r\to 0}\Delta(\log r) = \frac{1}{a^2}\,,$$

reproduciendo el resultado para la curvatura de la esfera de radio a obtenido con anterioridad.

Ejemplo 10. Puesto que (9) parece funcionar bien para calcular la curvatura del plano y la esfera, usemos dicha definición para calcular la curvatura de H_a en un punto p.

En *coordenadas polares* centradas en p, la métrica de H_a se escribe como

$$ds^2 = dr^2 + a^2 \mathrm{senh}^2 \left(\frac{r}{a}\right) d\theta^2 \, .$$

Implícitamente hemos visto tal cosa al calcular la longitud de la circunferencia de radio geodésico igual a r para esta superficie. En vista de ello, el Laplaciano de H_a está dado por

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{\cosh\left(\frac{r}{a}\right)}{a \,\mathrm{senh}\left(\frac{r}{a}\right)}\partial_r + \left(\frac{1}{a \,\mathrm{senh}\left(\frac{r}{a}\right)}\right)^2 \partial_\theta^2 \, ,$$

análogo al Laplaciano de la esfera con el rol de las funciones trigonométricas jugado esta vez por las funciones trigonométricas hiperbólicas. Luego,

$$\Delta(\log r) = \left(\partial_r^2 + \frac{\cosh\left(\frac{r}{a}\right)}{a \,\mathrm{senh}\left(\frac{r}{a}\right)}\partial_r\right) \log r = -\frac{1}{r^2} + \frac{\cosh\left(\frac{r}{a}\right)}{ar \,\mathrm{senh}\left(\frac{r}{a}\right)} = \frac{1}{3a^2} + O(r^2) \, ,$$

y por ende,

$$K(p) = -3 \lim_{r \to 0} \Delta(\log r) = -\frac{1}{a^2} \, .$$

Así pues, la curvatura de la pseudo-esfera H_a no depende del punto donde se le calcula, y es igual a la constante negativa $-1/a^2$. □

Ejercicio 11. ¿Qué pasa con los Laplacianos de la esfera de radio a y de H_a cuando $a \to \infty$? ¿Por qué ocurre esto?

Ejercicio 12. El ejercicio anterior sugiere el que podemos ver al plano como un cierto límite de superficies de curvatura positiva, y como un cierto límite de superficies de curvatura negativa. ¿Qué propiedad topológica permitiría diferenciar dichos límites?

Los resultados anteriores indican que las expresiones (8) y (9) producen resultados coherentes. ¿Cómo podremos justificar la equivalencia entre ambos conceptos? Responderemos a esta pregunta usando un argumento elemental, justificando nuestra respuesta a traves del uso de dos sistemas de coordenadas muy útiles.

Observemos que el plano tangente a la superficie S en el punto $(0, 0, 0)$ coincide con el plano xy, y las direcciones a lo largo de los ejes de coordenadas son *perpendiculares*. Tomemos el vector $u\partial_u + v\partial_v$ en el punto $(u,v,0)$, y por traslación pensémoslo como un vector en $(0,0,0)$. Queremos hallar la geodésica $\gamma(s)=(x(s),y(s),f(x(s),y(s))$ que en el origen tiene a dicho vector como su vector velocidad.

Puesto que S es una superficie dentro de $\mathbb{R}^3$, tiene completo sentido el calcular $\ddot{\gamma}$, y podemos definir tal expresión como el vector aceleración de la curva γ. Un argumento sencillo demuestra que la curva es una geodésica si y solo si su aceleración es perpendicular a la superficie, y como los vectores $\partial_x + f_x\partial_z$ y $\partial_y + f_y\partial_z$ son tangentes a S en $(x,y,f(x,y))$, concluimos que las ecuaciones para las componentes $x(s)$ y $y(s)$ de una geodésica están dadas por

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \frac{f_x(f_{xx}\dot{x}^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}\dot{y}^2)}{1+f_x^2+f_y^2} &= 0\,,\\ \ddot{y} + \frac{f_y(f_{xx}\dot{x}^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}\dot{y}^2)}{1+f_x^2+f_y^2} &= 0\,.\end{aligned}$$

Usamos dicho resultado para hallar el desarrollo en serie de Taylor de $\dot{x}(s)$ y $\dot{y}(s)$ de orden 2, y tomando el valor de γ correspondiente al parámetro $s=1$, obtenemos un punto de la superficie S cuyas coordenadas x y y tienen expansiones dadas por

$$\begin{aligned}x = x(u,v) &= u - \frac{(f_{xx}u^2 + 2f_{xy}uv + f_{yy}v^2)(f_{xx}u + f_{xy}v)}{6} + o((u^2+v^2)^{\frac{3}{2}})\,,\\ y = y(u,v) &= v - \frac{(f_{xx}u^2 + 2f_{xy}uv + f_{yy}v^2)(f_{xy}u + f_{yy}v)}{6} + o((u^2+v^2)^{\frac{3}{2}})\,,\end{aligned} \tag{10}$$

donde las derivadas de f son todas evaluadas en $(0,0)$.

Lo que el resultado anterior nos dice es que si tomamos el punto de coordenadas (u,v) en el plano tangente en el origen y nos movemos a lo largo de la geodésica $\gamma(s)$ cuyo vector velocidad inicial es $u\partial_u + v\partial_v$, cuando $s=1$ obtenemos el punto p de la superficie S cuyas coordenadas x y y poseen las expansiones dadas por (10). Decimos entonces que p tiene *coordenadas normales* (u,v), y las expansiones nos dan las aproximaciones cúbicas en u y v de las coordenadas $x(p)$ y $y(p)$ de p como un punto en $\mathbb{R}^3$.

Podemos ahora proceder de dos maneras distintas. En coordenadas normales, el Laplaciano en $(0,0)$ está dado por el operador $\partial_u^2 + \partial_v^2$. De tal manera que para calcular (9) y demostrar su equivalencia con (8), podríamos escribir a la distancia geodésica r como función de (u,v) y usar (10) para hallar su expansión en serie de Taylor de orden 3, a partir de la cual sería sencillo el obtener $\lim_{r\to 0}\Delta(\log r)$. En lugar de ello, demostraremos la equivalencia entre los dos conceptos usando a un argumento que involucra las *coordenadas polares*, justificando de paso la manera como fueron presentados los cálculos en donde utilizamos la noción dada por (9).

En efecto, decimos que el punto p, al cual le hicimos corresponder sus coordenadas normales (u, v), tiene coordenadas polares (r, θ) si $u = r\cos\theta$ and $v = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. La función que envía a (u, v) en el valor en $s = 1$ de la geodésica que posee dicho vector como velocidad inicial, envía a los vectores ∂_r y ∂_θ en vectores tangentes a S *que son perpendiculares el uno con el otro*. Abusando de la notación, llamaremos ∂_r y ∂_θ a estos últimos vectores también. Es evidente que $\|\partial_r\| = 1$, y por la perpendicularidad de ∂_r y ∂_θ, la métrica se expresa como

$$ds^2 = dr^2 + g(r,\theta)^2 d\theta^2\,, \tag{11}$$

para cierta función nonegativa $g(r, \theta)$. Claramente, dicha función no es otra cosa sino la norma de ∂_θ.

¿Cómo podremos hallar la expresión en coordenadas de ∂_θ? En otras palabras, ¿cómo podremos hallar los coeficientes que nos produzcan la igualdad

$$\partial_\theta = A\partial_x + B\partial_y + C\partial_z$$

en el punto con coordenadas polares (r, θ)? Para ello, consideremos la curva $\gamma(s) = (x(u, v), y(u, v), f(x(u, v), y(u, v)))$ donde $u = u(s) = r\cos(\theta + s)$ y $v = v(s) = r\,\mathrm{sen}\,(\theta + s)$. Los coeficientes en cuestión están dados por

$$\begin{aligned}
A &= \frac{d}{ds}x(u(s), v(s))\,|_{s=0}\,,\\
B &= \frac{d}{ds}y(u(s), v(s))\,|_{s=0}\,,\\
C &= \frac{d}{ds}f(x(u(s), v(s)), y(u(s), v(s))\,|_{s=0}\,,
\end{aligned}$$

y sus expansiones de Taylor son

$$\begin{aligned}
A &= -v - \frac{\mathbb{I}(u,v)(-f_{xx}v + f_{xy}u)}{6} - \frac{\mathring{\mathbb{I}}(u,v)(f_{xx}u + f_{xy}v)}{3}\,,\\
B &= u - \frac{\mathbb{I}(u,v)(-f_{xy}v + f_{yy}u)}{6} - \frac{\mathring{\mathbb{I}}(u,v)(f_{xy}u + f_{yy}v)}{3}\,,\\
C &= (f_{xx}x(u,v) + f_{xy}y(u,v))A + (f_{xy}x(u,v) + f_{yy}y(u,v))B\,,
\end{aligned}$$

donde $x(u, v)$ y $y(u, v)$ están dados por las expansiones (10), y

$$\mathbb{I}(u,v) = f_{xx}u^2 + 2f_{xy}uv + f_{yy}v^2$$

y

$$\mathring{\mathbb{I}}(u,v) = (f_{yy} - f_{xx})uv + f_{xy}(u^2 - v^2)\,,$$

respectivamente.

La función $g(r,\theta) = \|\partial_\theta\|$ se obtiene calculando $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. Puesto que $r^2 = u^2 + v^2$, es sencillo ver que

$$g(r,\theta) = \sqrt{r^2 - \frac{(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)}{3}r^4 + o(r^4)} = r\Big(1 - \frac{(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)}{6}r^2 + o(r^2)\Big)\,.$$

Luego,

$$\Delta(\log r) = -\frac{1}{r^2} + \frac{\partial_r g}{rg} = -\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{3} + o(1)\,,$$

y la equivalencia entre (8) y (9) queda así claramente establecida.

En realidad, la demostración cabal de la equivalencia requiere el estudiar los residuos en la expansiones de Taylor que usamos en nuestro argumento, demostrando que ellos no contribuyen al tomar el límite en cuestión. Esto se puede formalizar completamente si asumimos que la función f tiene al menos todas sus derivadas de hasta orden 3 contínuas, pues en tal caso, la métrica es lo suficientemente regular para garantizar que tales residuos son despreciables. De hecho, podemos hacer la demostración exigiendo un poquito menos de la función f, pero omitiremos tales detalles técnicos aquí.

La definición de curvatura dada por (9) es intrínseca y nos permite calcular dicha función para los tres modelos que hemos analizado hasta ahora. Sin embargo, envuelve un operador diferencial asociado a la métrica de la superficie. Quisieramos ver si podemos redefinir dicho concepto apoyándonos en la noción de área, en lugar del Laplaciano mismo.

La idea es sugerida por los argumentos utilizados para llegar a la definición que dimos en el caso en que la superficie estaba sumergida en el espacio Euclideano. La curvatura $K(p)$ mide la distorsión local de un disco de radio r en el plano tangente a la superficie en el punto p, cuando lo queremos comparar con el disco de radio r en la superficie misma. Tal distorsión es capturada en las áreas de dichos discos.

En efecto, dada la superficie S y un punto p en ella, trabajemos en coordenadas polares (r,θ) centradas en p, donde la métrica luzca como en (11) para cierta función nonegativa $g(r,\theta)$. Sea D_r el disco en S de centro p y radio geodésico r. Sea D_r^0 el disco en el tangente a S en el punto p, de radio r. El tangente es un plano, y lo proveeremos de la métrica usual. Luego, el área $A_0(r)$ de D_r^0 es igual a πr^2. Por otro lado, el área $A(r)$ del disco D_r en S se puede calcular por la integral doble

$$A(r) = \iint_{D_r} g(s,\theta) ds\, d\theta\,. \tag{12}$$

Definimos entonces a $K(p)$ de acuerdo a la expresión

$$K(p) = 12 \lim_{r\to 0} \frac{A_0(r) - A(r)}{r^2 A_0(r)}\,, \tag{13}$$

y la usaremos para recalcular las curvaturas de los tres modelos hasta ahora considerados.

Para el plano, $g(r,\theta) = r$, y (12) en ese caso nos dice que $A(r) = \pi r^2$, coincidiendo con $A_0(r)$. Esto es bien natural: los discos D_r y D_r^0 son congruentes uno con el otro, y no hay distorsión alguna. Calculando el límite (13), obtenemos que $K(p) = 0$.

Para la esfera de radio a, $g(r,\theta) = a \operatorname{sen}\left(\frac{r}{a}\right)$. Una integración sencilla nos dice que

$$A(r) = 2\pi a^2 \left(1 - \cos\left(\frac{r}{a}\right)\right)\,.$$

Una expansión de Taylor nos dirá entonces que

$$A_0(r) - A(r) = \frac{1}{12}\frac{r^4}{a^2} + O(r^6)\,,$$

y usando (13), obtenemos que $K(p) = 1/a^2$.

Finalmente, para H_a, tenemos que $g(r,\theta) = a \operatorname{senh}\left(\frac{r}{a}\right)$. En tal caso,

$$A(r) = -2\pi a^2 \left(1 - \cosh\left(\frac{r}{a}\right)\right)\,,$$

y concluimos que

$$A_0(r) - A(r) = -\frac{1}{12}\frac{r^4}{a^2} + O(r^6)\,.$$

El límite definido por (13) produce $K(p) = -1/a^2$.

Ejercicio 13. Sea S una superficie en $\mathbb{R}^3$ definida por $z = f(x,y)$. Demuestre que la función K definida en (13) satisface la relación

$$(1 + f_x^2 + f_y^2)^2 K = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\,.$$

Concluya que (8) y (13) son equivalentes.

3 Breve perspectiva histórica.

El concepto de curvatura de superficies se debe a Carl F. Gauss (1777-1855) [4], quien parece haberse tomado unos 15 años en el desarrollo y depuración de sus ideas. Su contribución fue seminal en el subsecuente desarrollo de la Geometría Diferencial.

Para una superficie S en $\mathbb{R}^3$, Gauss introdujo el mapa $\zeta : S \mapsto \mathbb{S}^2$, la normal de S en cada punto (hoy día, nos referimos a este como el *mapa de Gauss*). Definió entonces el valor absoluto de la curvatura comparando las áreas de $\zeta(D_r)$ y de D_r en $\mathbb{S}^2$ y S, respectivamente, para D_r un disco de radio r en S. De manera más precisa, tomó a $|K(p)|$ como el límite cuando $r \to 0$ del cociente de las áreas de $\zeta(D_r)$ y D_r, respectivamente, y definió el signo de $K(p)$ considerando la orientabilidad del diferencial de ζ en p, pensado como un mapa de T_pS en sí mismo.

Gauss estudió dicho concepto en gran detalle, considerando a S desde varios puntos de vista, como superficie de nivel, como la imagen de una inmersión, o como el gráfico de una función. En el último caso, demostró la identidad contenida en el Ejercicio 13. Sin embargo, su resultado fundamental con respecto a K fue la demostración de que tal concepto es independiente de la manera como S esté incluida en $\mathbb{R}^3$, y de que es invariante bajo la acción de isometrías, es decir, bajo la acción de transformaciones de la superficie que preservan la distancia entre dos puntos cualesquiera. Gauss logra con ello el demostrar que su concepto de curvatura era una propiedad intrínseca de la superficie, y no de la manera como ésta estaba inmersa dentro del espacio ambiente.

Gauss parece haber conocido de la existencia de superficies de curvatura negativa, donde hay un número infinito de geodésicas que pasan por un punto común y que no intersectan a una otra geodésica dada. Sin embargo, se abstuvo de publicar su resultado. Nikolay Lobachevsky (1792-1856) comenzó el estudio de geometrías no-Euclideanas en 1829. En 1868, Eugenio Beltrami (1835-1900) [1] demostró que tal problema no era otra cosa sino el estudio de superficies de curvatura constante negativa, e introdujo un modelo del caso analizado en el Ejemplo 7. Felix Klein (1849-1925) reinterpretó dicho modelo en 1871, y popularizó su versión projectiva, es decir, la dada por el disco D_a con la métrica (5). Klein introdujo el término hiperbólica, que hoy día es mucho más popular al referirse a este tipo de geometría. Dos años después de la muerte de Bernhard Riemann (1826-1866) en 1866, se publicó su famosa *clase inaugural* de 1854, conteniendo los fundamentos generales de la geometría Riemanniana, y en donde las superficies pasaron a ser un caso particular. Beltrami se entera de ello, y en 1868 mismo generalizó el ejemplo de la pseudo-esfera a dimensiones mayores.

Gauss estudió el concepto de geodésica para superficies en $\mathbb{R}^3$, y su comportamiento cuando la superficie en cuestión tenía curvatura de cierto signo. Demostró que si se usa la longitud de arco como parámetro de la curva, el vector aceleración de una geodésica debe ser siempre perpendicular a la superficie. Este resultado había sido descubierto por Leonhard Euler (1707-1783) en 1744 [3]. Euler fue estudiante de Johann Bernoulli (1667-1748), el cual, junto con sus hijos y en particular, Daniel Bernoulli (1700-1782), había resuelto algunos problemas variacionales de importancia en la primera mitad del siglo XVIII.

Gauss consideró la curvatura total de triángulos geodesicos, la integral de la curvatura sobre una tal región, y demostró que tal cantidad mide la diferencia entre la suma de sus ángulos internos y π. De esta manera, los triángulos esféricos tienen ángulos que suman a un valor mayor que π, mientras que los triángulos hiperbólicos hacen lo contrario y sus ángulos suman a un valor menor que π. Gauss descubrió así la influencia de la curvatura sobre la topología de la superficie, abriendo de esta manera una novedosa línea de investigación que aun continúa con vigor.

La literatura existente sobre los temas aquí estudiados es inmensa. Como punto de partida para investigaciones adicionales, el lector puede referirse a [2], y analizar algunos de los artículos citados en su bibliografía. Esta publicación apareció en ocasión de la conmemoración de los 200 años del nacimiento de Gauss, e incluye una traducción al inglés de su trabajo seminal [4], cuya lectura sigue siendo hoy altamente placentera.

Referencias

[1] E. Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometría non-euclidea*, Gior. Mat. 6, pp. 248-312.

[2] P. Dombrowski, *150 years after Gauss' Disquisitiones generales circa superficies curvas*, with the original text of Gauss, Astérisque 62, Société Mathḿatique de France, 1979.

[3] L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, Lausanne, 1744.

[4] C.F. Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Commentationes Gottingensis, 1827.