

Oleñnik a través del espejo

Pablo Castañeda

Departamento Académico de Matemáticas, ITAM
Río Hondo 1, Ciudad de México 01080, México
pablo.castaneda@itam.mx

Resumen

Las ideas de este trabajo surcan hace varios años en mi imaginación, sin embargo, solo fueron presentadas en el XLVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana en la Universidad de Sonora en 2015. Pretendía ser solamente un homenaje a quien considero la matemática más importante de nuestros tiempos, la soviética Olga Arsen'evna Oleñnik. Empero, poco antes del congreso el profesor Frederico Furtado de la Universidad de Wyoming me hizo la observación que el título, que también recordaba los libros de Carrol, podía ser una alegoría al ser ese año la celebración del aniversario 150 de Alicia. Es el tercer legado el más fuerte, pues quiero dedicarle este trabajo a la memoria de Jaime Cruz Sampedro.

Sobre Olga, podemos decir que aunque su fuerte fueron las Ecuaciones Diferenciales Parciales (dada su formación en 1954 bajo la supervisión de G.I. Petrosvskii), en su ímpetu matemático hizo grandes contribuciones a la geometría algebraica, al problema 16 de Hilbert, a la topología de superficies y a la física matemática. Sin embargo, es dentro de sus pocas contribuciones a la teoría de ecuaciones hiperbólicas no lineales donde su trabajo extremadamente original dio inicio a las ideas que aquí presentaremos.

Oleñnik probó la existencia y unicidad para leyes de conservación escalares bajo una perturbación parabólica. ¡La solución es la única! Courant, Friedrichs y otros habían establecido la necesidad de encontrar una teoría no lineal para soluciones débiles de ecuaciones hiperbólicas. La teoría clásica no explicaba el surgimiento de ondas de choque, ni cómo estas discontinuidades se propagaban y por tanto, no se entendía la unicidad. Pero esta teoría no lineal explicaba ya las explosiones y los vuelos supersónicos. La condición de entropía de Oleñnik está en el centro de la profundidad de sus resultados, donde se muestra que en el límite, cuando el coeficiente de la viscosidad se anula, el problema converge a una única solución. Una pequeña ampliación (incompleta) de este resultado a los sistemas de leyes de conservación demoró más de 50 años.

Hay todavía más, el resultado de Oleñnik es muy geométrico y fácil de entender. Veremos cómo el uso de su condición de entropía puede ser observada a partir de la envolvente convexa del flujo para así determinar la solución al problema originalmente discontinuo. Iremos un poco más allá mostrando que su idea geométrica es usada de manera más profunda al pasar literalmente a través del espejo la figura que nos resulta del flujo. Es entre líneas que espero rescatar las enseñanzas de Sam, poder ser elocuente y fluido como él siempre lo fue y así honrar su amistad y esas ganas de presentarle mi versión en espejo en las pláticas de Miscelánea Matemática.

1. A modo de introducción: ¿quién es quién en las leyes de conservación?

El primer trabajo en leyes de conservación en su forma de estudio actual, se debe nada más y nada menos a Riemman, quien en su obra titulada «Sobre la propagación de ondas de aire planas de amplitud finita», [28], ataca el problema de las ecuaciones de Euler isoentrópicas con datos discontinuos:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, & \text{(Conservación de la masa)} \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0, & \text{(Conservación del momento)} \end{cases}$$

donde la presión p puede ser considerada dependiente de la densidad (en el caso adiabático se ve como $\kappa\rho^\gamma$ para constantes $\kappa > 0$ y $\gamma > 1$), es interesante el problema cuando la densidad $\rho_o(x) := \rho(x, t = 0)$ y

la velocidad $u_o(x) := u(x, t = 0)$ iniciales son discontinuas en el origen $x = 0$. Típicamente escribimos estas condiciones como

$$\rho_o(x) := \begin{cases} \rho^L, & x < 0 \\ \rho^R, & x > 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad u_o(x) := \begin{cases} u^L, & x < 0 \\ u^R, & x > 0 \end{cases}.$$

De este modo, el sistema de leyes de conservación (ecuaciones diferenciales parciales homogéneas no lineales del tipo hiperbólico) con condiciones discontinuas se conoce como el **problema de Riemann**.

Estudiaremos el caso más sencillo. Una única ecuación en una dimensión física; este es el problema escalar:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & \text{(Conservación de } u) & (1a) \\ u_o(x) = \begin{cases} u^L, & x < 0 \\ u^R, & x > 0 \end{cases}, & \text{(Condición de Riemann)} & (1b) \end{cases}$$

sin embargo, dejaremos que la función de flujo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sea lo suficientemente general, basta con estar bien definida en un intervalo I con u^L y u^R como sus extremos y sea de clase $\mathcal{C}^1(I)$. Históricamente en ecuaciones en derivadas parciales usamos $u(x, t)$ como nuestra incógnita sin importar si guarda relación con la velocidad, lo haremos de aquí en adelante.

Las leyes de conservación tienen una amplia gama de aplicaciones, en muchos casos como resultado de leyes de balance en física del continuo. El espectro de fenómenos físicos contempla la dinámica de fluidos compresibles, física de partículas, semiconductores, combustión, flujos multifásicos, astrofísica y relatividad, entre muchos otros, véase por ejemplo [3, 4, 10, 9, 11, 17, 26, 27, 29]. En esta lista podemos incluir ecuaciones famosas como lo son las ecuaciones de Euler, las de Navier-Stokes, Boltzmann, Einstein con modelos que incorporen la elasticidad, la combustión, la teoría cinética, la mecánica de flujos y la relatividad.

Sin embargo, los temas relatados arriba, en muchas ocasiones consideran sistemas de ecuaciones o ecuaciones en varias dimensiones espaciales. Solo tenemos la descripción completa de la solución para problemas escalares y unidimensionales como en (1). Esta solución se la debemos a Oleĭnik y se ve plasmada en [22].

Sin ir más lejos, ¿dónde está la conservación en el problema? Consideremos la ecuación (1a) y calculamos la variación de u en un intervalo $[a, b]$ cualquiera. Es decir, integramos en el intervalo y derivamos en el

tiempo, luego:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx \\ &= - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(u(x, t)) dx \\ &= f(u(a, t)) - f(u(b, t)), \end{aligned}$$

donde usamos la continuidad, la ecuación (1a) y el Teorema Fundamental del Cálculo. Vemos así que el cambio en u depende del flujo que entra o sale a la izquierda y a la derecha, es decir, la conservación de U está dada gracias a que la variación es justo la diferencia entre lo que entra y lo que sale del dominio $[a, b]$.

2. El método de las características

Como veremos más adelante, cuando tratamos un problema de Riemann, basta con entender la evolución de la interfase, es decir, de la discontinuidad inicial. En esta sección recordaremos los usos y costumbres de las características en ecuaciones hiperbólicas lineales de primer orden para así poder extender el concepto e introducir las soluciones no clásicas que aparecen en el caso no lineal.

2.1 Interludio: un paso antes, el caso lineal.

Me gusta pensar que la EDP más sencilla que tiene interés es la ecuación del Transporte:

$$\begin{cases} u_t + c u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 & (2a) \\ u(x, 0) = u_o(x), & x \in \mathbb{R} & (2b) \end{cases}$$

con c constante, digamos positiva. Observa que esta ecuación es una ley de conservación y se conoce como una ecuación hiperbólica de primer orden.

Es fácil encontrar la solución $u(x, t) = u_o(x - ct)$, y mostrar que es única. Sin embargo, lo interesante es saber cómo encontrar dicha solución. Supongamos inicialmente que podemos describir la solución únicamente por la variable t , es decir, la solución se puede reescribir como

$$\omega(t) := u(x(t), t),$$

donde claramente la variable x depende del tiempo. Nota en el siguiente desarrollo la diferencia entre derivadas parciales y totales

$$\frac{d}{dt} \omega(t) = \frac{d}{dt} u(x(t), t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x(t), t) \frac{d}{dt} x(t) + \frac{\partial}{\partial t} u(x(t), t).$$

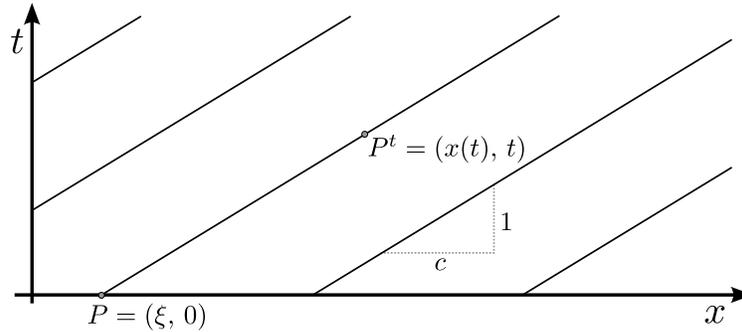


Figura 1. Características en el plano xt . A lo largo de las rectas la solución de (2) se mantiene constante. Observa el valor de la pendiente.

Tenemos así en notación compacta $\omega'(t) = u_t(x(t), t) + x'(t) u_x(x(t), t)$. Si $x'(t) = c$, el lado derecho se anula en virtud de (2a). De este modo, obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias que debemos resolver, a saber,

$$\begin{cases} x'(t) = c, & t > 0 \\ x(0) = \xi \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \omega'(t) = 0, & t > 0 \\ \omega(0) = u(x(0), 0) \end{cases}, \quad (3)$$

con ξ a determinarse. La primera tiene por solución $x(t) = \xi + ct$ y la segunda dice que $\omega(t)$ es constante y que esta es justamente $u(x(0), 0) = u_o(\xi)$, dada por la condición inicial (2b) en el punto $P := (\xi, 0)$.

Nos preguntamos ¿quién es ξ ? Justamente la solución del segundo problema nos lo indica: ξ es cualquier condición inicial, así, $\xi \in \mathbb{R}$. En otras palabras, $\omega(t)$ se mantiene constante a lo largo de rectas $x(t)$ en el plano xt y, para cada recta, el valor es dado por la condición inicial (2b), véase la figura 1.

Las rectas dibujadas en la figura 1 tienen pendiente $1/c$ y se conocen como las características. Nota que para encontrar el valor de u en el punto $P^t = (x(t), t)$, necesitamos entender cuál es la «base» de la recta, es decir, el punto $P = (\xi, 0)$ tal que $x(t) = \xi + ct$. Juntando las piezas del problema tenemos

$$u(x, t) = u(P^t) = u(P) = u(\xi, 0) = u(x - ct, 0) = u_o(x - ct);$$

como la solución que describimos arriba.

2.2 Soluciones no clásicas

Vayamos un paso adelante y veamos la evolución de una ley de conservación no lineal, pensemos en la ecuación de Burgers. En este caso, tenemos el problema donde el flujo en (1a) es $f(u) := u^2/2$.

Tenemos al menos tres formas distintas de ver esta ecuación, cada una semejante a la anterior. La primera es la versión diferencial que

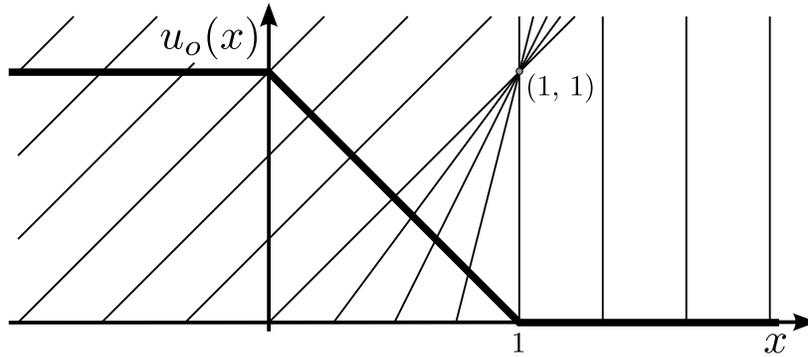


Figura 2. Características en el plano xt para la ecuación de Burgers con condición inicial (4). Las características que emanan de $x \in [0, 1]$ se intersectan en el punto $(1, 1)$.

vimos antes, podemos usar la regla de la cadena y abrir la derivada en el flujo para obtener una versión cuasi lineal o podemos integrar como en el ejemplo de la conservación y obtener la versión integral, es decir, tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Versión diferencial:} & \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2(x, t)}{\partial x} = 0, \\ \text{Versión cuasi lineal:} & \quad u_t(x, t) + u(x, t) u_x(x, t) = 0, \\ \text{Versión integral:} & \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b u(x, t) dx + f(u(b, t)) - f(u(a, t)) = 0. \end{aligned}$$

Como veremos, cada versión tiene su importancia.

Resolvamos gráficamente, con el método de las características, el problema de Burgers con la condición de Cauchy siguiente:

$$u_o(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1 - x, & x \in [0, 1], \\ 0, & x > 1 \end{cases} \quad (4)$$

llamamos de perfil al gráfico de $u(x, t)$ contra x en un tiempo dado t , véase el perfil de u_o en la figura 2. Utilizamos el concepto de las características al ver el problema en su versión cuasi lineal. Notamos que la velocidad de propagación es nula para $x > 1$, es $c = 1$ para x negativo y decrece linealmente desde uno hasta cero para $x \in [0, 1]$; la figura 2 es representativa.

Con las ideas previas de las características, podemos ver que el perfil avanza con la velocidad correspondiente a cada altura. Así, para $x < 0$ la solución avanza con velocidad 1 y para $x > 1$ está estática con velocidad 0. Esto da un indicio de los problemas que esperamos. Además de esto, el perfil de $u(x, t)$ tiene distintas velocidades para $x \in [0, 1]$ en

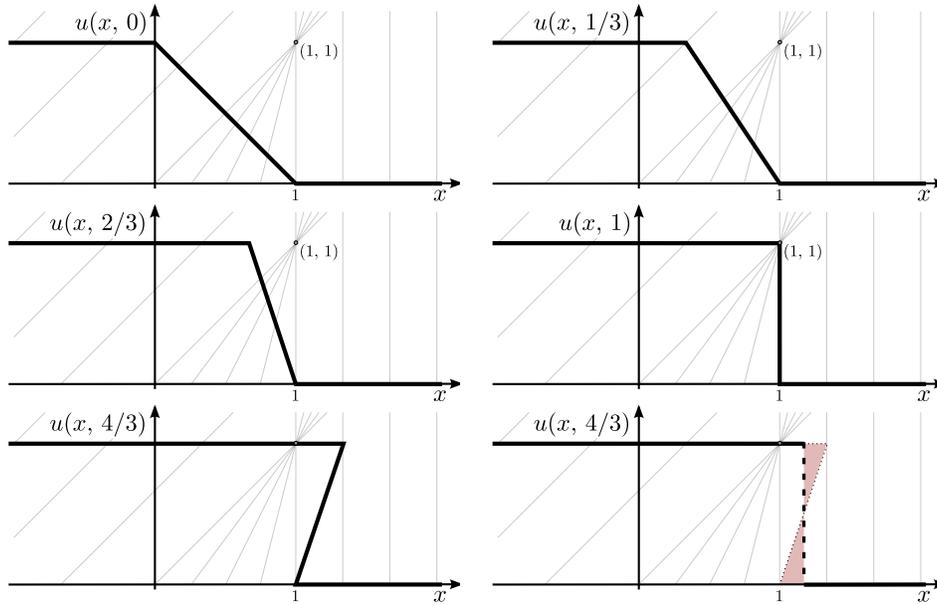


Figura 3. Perfiles de la solución de la ecuación de Burgers con el método de las características. Note que para $t > 1$, el perfil no es más una función, las áreas sombreadas del último perfil son iguales.

tiempos pequeños. Veamos lo que sucede con los perfiles esbozados en la figura 3.

En los perfiles de la figura 3 vemos el avance de $u(x, t)$ desde los elementos en $x < 0$ para los tiempos $t = 0, 1/3, 2/3, 1$ y $4/3$. Al principio, $u(x, t)$ es igual a 1 para los primeros tiempos hasta $x = 0, 1/3, 2/3$, respectivamente. Es decir, para un tiempo $T < 1$ dado, podemos calcular que la solución es simplemente

$$u(x, T) = \begin{cases} 1, & x < T \\ \frac{x-1}{T-1}, & x \in [T, 1] \\ 0, & x > 1 \end{cases} \quad (5)$$

De hecho, esta fórmula es correcta (por causa del método de las características) para $T > 1$, solo que el perfil deja de ser una función; mira los perfiles para $t = 1$ y $4/3$ en la figura 3.

¿Cómo estudiar entonces los perfiles si estos ya no son funciones? El camino directo es salir del mundo clásico de soluciones y permitir que estas sean discontinuas, pero funciones. Retomamos la idea de la conservación de u : partimos la «Z» del perfil de $u(x, 4/3)$ en dos triángulos con la misma área, de este modo colocamos antes de la discontinuidad lo que le quitamos después. Esto dará origen a los choques, como el que vemos en el perfil discontinuo al final en la figura 3. Los estudiaremos con las condiciones de Riemann.

2.3 Soluciones inicialmente discontinuas

Sabemos ya que el estudio del problema de Riemann es interesante *per se*, además este puede ocurrir en la evolución de un problema continuo. Podemos notar que si comenzamos con una solución $u(x, t)$ del problema (1), entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$, tenemos que $u(\lambda x, \lambda t)$ es solución también; definimos de este modo a las soluciones **auto-semejantes** cuando satisfagan esta propiedad de λ .

Veamos que en la versión cuasi lineal $u_t + f'(u)u_x = 0$ si la derivada del flujo $f'(u)$ es monótona, entonces se simplifica el estudio a tres casos:

- 1.- con $u^L = u^R$, la solución es constante y no hay mucho más que decir,
- 2.- cuando $f'(u^L) < f'(u^R)$ usaremos un invariante escalar y construiremos los abanicos de rarefacción y
- 3.- para $f'(u^L) \geq f'(u^R)$, la relación de *Rankine-Hugoniot* nos mostrará las ondas de choque y las discontinuidades de contacto.

Ondas de rarefacción. Cuando las velocidades de los flujos indican que el perfil se desplaza más lento antes de la discontinuidad que después, tenemos el problema de llenar el vacío, es decir, tenemos la condición $f'(u^L) < f'(u^R)$ y las características son como en la figura 4.a.

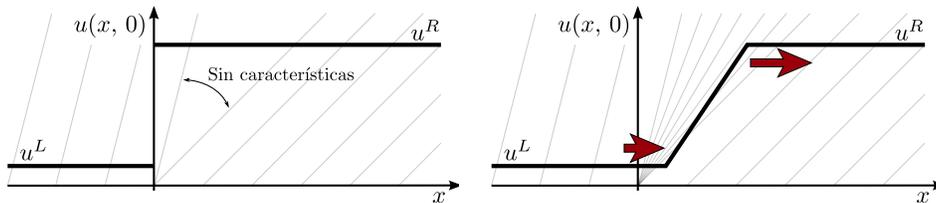


Figura 4. A la izquierda tenemos el perfil con la condición de Riemann discontinua; hay que notar la falta de características en la región intermedia. A la derecha, la solución en (6) especifica cómo rellenar las características de modo continuo, pero lo más importante es que indica cómo hacer el perfil. (Las características se abren como un abanico, de ahí su nombre.)

En este caso introducimos el invariante escalar $\xi := x/t$ y buscamos una solución que dependa de él; es decir, $U(\xi) = u(x, t)$ es la solución procurada que al colocarla en (1a) nos lleva al siguiente desarrollo.

Por la regla de la cadena, tenemos simplemente que

$$U_t(\xi) = U'(\xi) \left(-\frac{x}{t^2} \right), \quad U_x(\xi) = U'(\xi) \left(\frac{1}{t} \right),$$

que al substituir dentro de la ley de conservación nos lleva a la EDO

$$U'(\xi) \left[-\frac{x}{t^2} + f'(U) \frac{1}{t} \right] = 0.$$

Para tiempo positivo y suponiendo que $U'(\xi) \neq 0$, vemos que la solución debe satisfacer $-\xi + f'(U) = 0$. En el caso $f'(U)$ creciente, tenemos

$$u(x, t) = \begin{cases} u^L, & x \leq f'(u^L)t \\ U(x/t), & f'(U) = \xi \in (f'(u^L), f'(u^R)) \\ u^R, & x \geq f'(u^R)t \end{cases} \quad (6)$$

Observamos que el caso para $\xi = x/t$ en el intervalo $(f'(u^L), f'(u^R))$, es justamente la región que no tenía el perfil definido en la figura 4.a. Sin embargo, la construcción no es tan directa, pues está definida implícitamente por $U(\xi)$ a partir de la relación $f'(U) = \xi$. La necesidad de invertir $f'(U)$ implica su monotonicidad. La solución está en la figura 4.b.

Tenemos una solución y el perfil que era discontinuo en $t = 0$ pasa a ser continuo para cualquier tiempo positivo. Claramente el límite de $u(x, t)$ cuando $t \rightarrow 0^+$ converge a la condición inicial de Riemann.

Ondas de choque. El caso contrario a los abanicos de rarefacción ocurre cuando las características se cruzan desde el primer instante. Ahora tenemos perfiles sobredefinidos dada la condición $f'(u^L) > f'(u^R)$. Como insinuamos en la sección anterior, la idea es encontrar un balance de masas para el choque; para ello buscamos un parámetro σ de modo que

$$u(x, t) = \begin{cases} u^L, & x < \sigma t \\ u^R, & x > \sigma t \end{cases} \quad (7)$$

sea una solución.

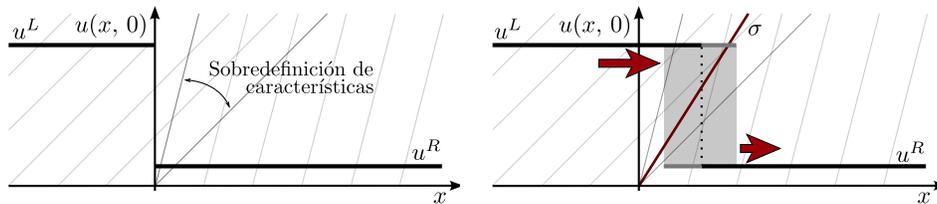


Figura 5. A la izquierda tenemos el perfil con la condición de Riemann discontinua; nota la sobredefinición de características en la región intermedia. La solución en (7) especifica cómo escoger la velocidad σ del choque.

No es difícil notar que todo parámetro $\sigma \in [f'(u^L), f'(u^R)]$ nos da una solución al problema de Riemann. En la figura 5.b vemos que hay una región donde hemos localizado la discontinuidad, pero esta podría estar un poco antes o un poco después; de hecho podría estar en cualquier región del rectángulo sombreado cuyos bordes son delimitados por las velocidades características. Las flechas representan por su tamaño que el flujo va más rápido atrás de la discontinuidad que adelante de ella.

¿Cómo buscar la solución correcta? Retomando la idea física, recordamos que tenemos una ley de conservación, así la unicidad de la velocidad de propagación viene justamente con el balance de «masa» dado por la condición de Rankine-Hugoniot:

$$f(u^R) - f(u^L) = \sigma[u^R - u^L], \quad \text{o simplemente,} \quad \sigma = \frac{f(u^R) - f(u^L)}{u^R - u^L}, \quad (8)$$

donde $\sigma = \sigma(u^L, u^R)$ es conocida como la velocidad del choque entre u^L y u^R . (En [9] se muestran ejemplos de sistemas de leyes de conservación donde la condición de Rankine-Hugoniot genera el *Hugoniot locus* formado por un conjunto de curvas en el espacio de fases. En [13, 18, 20] se encuentra una teoría más elaborada.)

En el caso de los choques, el perfil de la solución es discontinuo con $t \geq 0$, pero observamos que con el límite cuando $t \rightarrow 0^+$ recuperamos la condición de Riemann original. Cuando $f'(u^L) = f'(u^R)$ con $u^L \neq u^R$, es fácil ver que la discontinuidad tiene la misma velocidad que las características y se mueve junto con los estados constantes, originando lo que se conoce como una *discontinuidad de contacto* o simplemente un *contacto*. (En [5] los contactos son cruciales para el análisis de la sedimentación de dos tipos de partículas dentro de un sistema contemplando un fluido.)

Las discontinuidades de contacto ocurren también cuando la derivada del flujo $f'(u)$ no es monótona; aquí es mucho más interesante. Un cálculo sencillo muestra que en el caso de los contactos, la velocidad σ de la relación de Rankine-Hugoniot es idéntica a ambas velocidades características, pero hay que tener cuidado con respetar a la entropía. . .

3. Soluciones físicas y el mundo entrópico

— *Pero no quiero andar entre locos* —comentó Alicia.
 — *¡Oh! No lo puedes remediar* —dijo el Gato—.
¡Estamos todos locos! Yo estoy loco. Tú estás loca.
 — *¿Cómo sabes que estoy loca?* —dijo Alicia.
 — *Debes serlo* —dijo el Gato—, *o no habrías venido aquí.*
 LEWIS CARROLL, «Alicia en el país de las maravillas». ¹

Las cosas nunca son tan sencillas como parecen a simple vista. La primera inquietud aparece cuando $f'(u)$ no es monótona, no hemos colocado condiciones suficientes para resolver este problema, así, la teoría anterior está incompleta. Pero uniendo los pedazos podremos dar con el camino correcto. . . es lo que pretendo explicarte con este trabajo.

¹«But I don't want to go among mad people,» Alice remarked. / «Oh, you can't help that,» said the Cat: «we're all mad here. I'm mad. You're mad.» / «How do you know I'm mad?» said Alice. / «You must be,» said the Cat, «or you wouldn't have come here.», véase [6].

Sin embargo, antes de ir más lejos, basta recordar que acabamos de declarar victoria sobre la unicidad en la elección de la velocidad del choque; esto no es del todo correcto, pues pueden aparecer ambigüedades. En Burgers $u_t + (u^2/2)_x = 0$ vemos que el choque satisface la condición de Rankine-Hugoniot:

$$\sigma = \frac{(u^R)^2/2 - (u^L)^2/2}{u^R - u^L} = \frac{u^R + u^L}{2},$$

simplemente, es la media de la velocidad característica a ambos lados de la discontinuidad. Desde otro ángulo, podemos ver que Burgers es equivalente a $(u^2/2)_t + (u^3/3)_x = 0$, que tiene la velocidad de choque:

$$\sigma = \frac{(u^R)^3/3 - (u^L)^3/3}{(u^R)^2/2 - (u^L)^2/2} = \frac{2(u^R)^2 + u^R u^L + (u^L)^2}{u^R + u^L}.$$

¿Cómo es posible que tengamos dos soluciones distintas? ¿Cómo saber cuál es la velocidad de propagación correcta? Hay que tener cuidado, en el primer caso se está conservando la cantidad u , en el segundo es u^2 . Aquí es donde la física del problema es relevante y muy importante, véase por ejemplo [19].

La teoría más fuerte dice que en nuestro caso, con $f''(u) > 0$, hay una única solución que satisface la **Condición Entrópica**, es decir, existe una constante E independiente de x y t tal que

$$\frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} \leq \frac{E}{t} \quad \text{para todo } a > 0, t > 0,$$

pero es demasiado técnica. Sin embargo, la entropía es relevante para encontrar *una* solución que sea físicamente «correcta». La razón para llamarla entropía es por causa del incremento repentino de la «masa» u , las discontinuidades solo pueden saltar para abajo en el eje x . Así, nos imaginamos como observadores fijos en un cierto $x > 0$, con el paso del tiempo vemos justo el incremento u en el choque y con él su entropía.

Para garantizar la unicidad de la solución, existen varias formas, todas ellas conocidas como *Criterios de Entropía* (cf. [29]). Algunos de ellos son el cálculo de variaciones y la teoría de Hamilton-Jacobi, así como el cálculo numérico. En este último caso, el teorema de Lax-Wendroff nos muestra cómo los esquemas de diferencias finitas convergen a la solución entrópica (cf. [19]). Hemos visto también el método de las características, estas aunadas al estudio del par entrópico dan lugar a la clasificación de los choques de Lax, [18]; a los que podemos dotar del criterio de Liu, [20], y tener así criterios mas robustos como los que se usan en [9]. Por otro lado, Joel Smoller, [29], dice «la teoría de semigrupos no lineales es probablemente la versión más elegante». Hay así, como vemos, una amplia gama de criterios y es en el estudio

del perfil viscoso que tendremos nuestro interés, pues, ¡es aquí donde hará aparición Oleñnik!

3.1 Perfil viscoso

Con el criterio de entropía denominado perfil viscoso se intenta buscar mediante principios físicos cuál es la causa de que una velocidad de choque sea la correcta y no otra. Recordando que históricamente en el problema de Riemann original el gas tiene «viscosidad», podremos construir una ecuación de evolución que represente mejor la solución y, que de algún modo, en el límite se recupere la solución que hemos elegido.

La viscosidad del gas es tan pequeña que se ha removido de las ecuaciones. Si la reintroducimos con el parámetro μ , tenemos la ecuación

$$u_t + f(u)_x = \mu u_{xx},$$

donde queremos $u(x, t; \mu) \rightarrow u(x, t)$ con $\mu \rightarrow 0^+$. Pero, ¿y esto por qué es bueno?

La difusión u_{xx} tiene al parámetro viscoso μ y suaviza la solución a modo que ya no hayan discontinuidades abruptas. La solución es continua y suficientemente suave. De hecho, hay formas específicas para resolver la ecuación. Por ejemplo, en el caso de Burgers tenemos que la ecuación

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = \mu u_{xx} \quad \text{se reescribe como} \quad \varphi_t = \mu \varphi_{xx},$$

bajo la transformación de Cole-Hopf (*cf.* [14]), al tomar simplemente

$$\varphi(x, t) := \exp\left(-\frac{1}{2\mu} \int_{x_0}^x u(s, t) ds\right)^2$$

Es decir, podemos aplicar la misma idea, siempre y cuando conozcamos el coeficiente de «viscosidad» correcto.³

3.2 El despertar de Oleñnik: el límite viscoso

La ecuación parabólica tiene soluciones suaves (*cf.* [29]). Podemos generalizarla para el caso escalar y así considerar la ecuación viscosa

$$u_t + f(u)_x = \mu u_{xx}, \tag{9}$$

asociada al problema original (1). Diremos que una solución $u(x, t)$ de (1a) es físicamente correcta si la solución $u(x, t; \mu)$ de (9) con condición

²Es un bonito ejercicio de cálculo mostrar que $u = -2\mu\varphi_x/\varphi$ y así, si φ satisface la ecuación del calor, entonces u satisface Burgers viscoso.

³Como dijimos, es importante saber qué cantidad se conserva, [19]. De hecho en [2] se muestra que para sistemas, la elección de la «matriz viscosa» es complicada y la solución es sensible a ella. En el caso escalar no existe este problema.

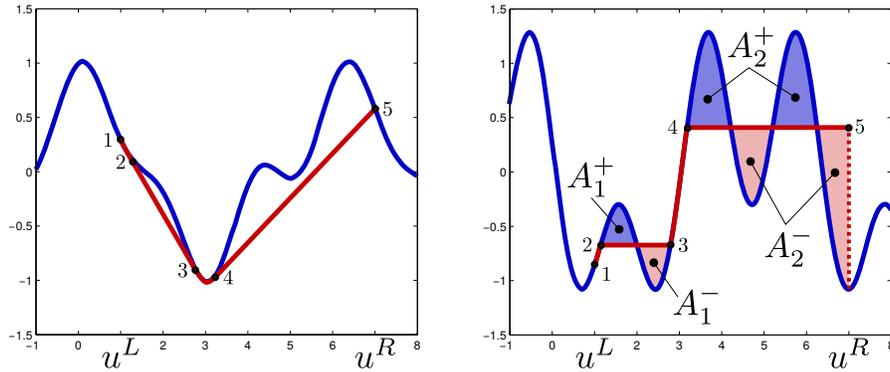


Figura 6. Función de flujo $f(x) = \cos^3 x + 0.15 \sin 2x$ y su derivada. El estado a la izquierda es $u^L = 1$ y a la derecha es $u^R = 7$. La figura a la izquierda contiene el flujo y la envolvente convexa. A la derecha, la derivada del flujo y de su envolvente, nota que el área A_i^- es igual al área A_i^+ para $i = 1, 2$. Del punto 1 al 2, las curvas coinciden así como del punto 3 al 4.

inicial (1b) aproxima en el límite a la primera. Es decir, necesitamos encontrar estimativas para $\mu \rightarrow 0^+$.

Oleñnik no solo mostró la existencia de la solución via el límite, también probó la igualdad con la condición de entropía; los detalles se puede consultar en su trabajo original [22] de 1957. Su resultado es más profundo: ella encontró la solución para el problema de Riemann sin importar el flujo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ escogido, este solo necesita ser una función suave, al menos de clase $\mathcal{C}^1(I)$.

¿Cómo lo logró? Los tecnicismos no son tema para este trabajo, pero veremos que el uso que le dio a la envolvente convexa es el camino correcto. Mi intención no es probar que la condición de entropía se cumple, solamente construir la solución con su método e ir un poco más allá.

La idea básica es complementar los resultados que conforman los abanicos de rarefacción y las ondas de choque. En el caso de los primeros, necesitamos el flujo y la derivada a lo largo del intervalo de interés, en el caso de los segundos, la condición de Rankine-Hugoniot nos muestra que basta tener la secante de los estados involucrados. Este es el punto de partida, estamos considerando elementos semejantes, tangentes y secantes. La manera de abordar el problema casi finaliza si notamos que en el caso de las secantes, estas pasan por abajo de la curva cuando el estado u^L es menor que el estado u^R o por arriba en el caso contrario.

Tenemos más, pues parece razonable que las rarefacciones se junten a los choques cuando las velocidades sean iguales; es decir, las secantes son tangentes en algún punto bajo esta conjunción de ondas. Mira la figura 6 donde se esconde la *magia* de Oleñnik: para construir la solución del problema de Riemann (1) cuando $u^L < u^R$ buscamos la envolvente

convexa de $f(x)$ desde estos extremos. Las rarefacciones estarán determinadas cuando el flujo y su envolvente coincidan y los choques cuando ambas curvas difieran. En el gráfico de la derecha de la figura 6 se encuentran la derivada del flujo, $f'(x)$, así como la derivada de la envolvente. Nota en esta última los segmentos horizontales, ¡estos son los choques! (La velocidad es la misma para toda esa región.) De la condición de Rankine-Hugoniot se puede mostrar que el área entre estas rectas y la derivada del flujo es un balance de masas y por lo tanto las áreas se cancelan; mira A_1^- , A_1^+ y A_2^- , A_2^+ .

El gran trabajo de Oleñnik fue mostrar que esta es la solución procurada; recuerda las soluciones que encontramos para la rarefacción (6) y para el choque (7). Pero podemos ir un poco más allá y mostrar que si todo hasta ahora es geométrico, entonces podemos continuar así.

Notamos que en el caso de las rarefacciones hay que evaluar la derivada del flujo e invertir la porción adecuada, mira cómo completamos el abanico en (6) para $\xi = x/t \in (f'(u^L), f'(u^R))$. Los choques están determinados por la secante y así la velocidad $\sigma(u^L, u^R)$, mira (7). Seguimos estas ideas y así tenemos la solución dada por:

$$u(x, t) = \begin{cases} u^L, & x \leq f'(u^L) t \\ U(x/t), & x \in (f'(u^L), f'(u^2)) \cdot t \\ U(x/t), & x \in (f'(u^3), f'(u^4)) \cdot t \\ u^R, & x \geq \sigma_{45} t \end{cases}, \quad (10)$$

donde usamos la notación u^i para el número i en la figura 6 y σ_{ij} es definido como $[f(u^i) - f(u^j)]/[u^i - u^j]$. Observemos que $f'(u^2) = f'(u^3)$ y por lo tanto igual a σ_{23} , tenemos una discontinuidad de contacto. (De hecho no hemos definido $u(x, t)$ para $x = \sigma_{23}t$, se puede tomar tanto u^2 como u^3 .) Nota también que $f'(u^4) = \sigma_{45} > f'(u^5)$, así la velocidad de la rarefacción es igual a la del choque y decimos que el *choque es característico a la izquierda*. Estas son las ideas de Oleñnik y podemos resolver cualquier problema de este modo.

Ahora déjame ir un poco más allá. La gran dificultad en (10) es invertir las dos porciones referentes a las rarefacciones. Sin embargo desde los primeros cursos de cálculo sabemos cómo hacer esto; hay que reflejar el eje x y el eje y con $y = x \dots$ ¡Es un espejo!

Podemos hacer lo mismo, mira la figura 7: la curva que encontramos como la derivada de la envolvente convexa en la figura 6 es encerrada en un rectángulo $ABCD$, este contiene las velocidades de todas las ondas involucradas. Ahora reflejamos en el espejo $y = x$ y obtenemos una «curva» donde los segmentos horizontales son verticales y no están bien determinados como función, pero es justamente donde hay una

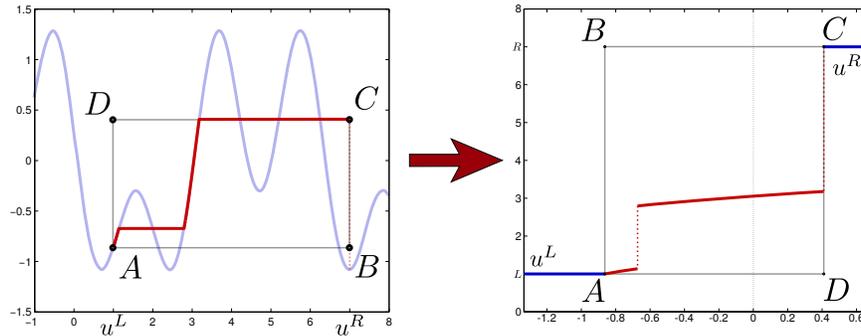


Figura 7. Solución del problema de Riemann planteado en la figura 6. Observa que el rectángulo $ABCD$ invierte su orientación; pasó por el espejo. En la figura a la izquierda el rectángulo contiene las velocidades importantes para construir el perfil de la solución con el camino de Oleĭnik. La menor velocidad en el estado u^L es determinada por la altura de A, B , la mayor velocidad para juntar el grupo de onda al estado u^R es determinada por la altura de C, D .

discontinuidad, un choque o un contacto. Este es el perfil de la solución. . . mmhm, sí, pero algo falta. . . Mira los intervalos de definición en la solución (10), ¡esto es lo que tenemos! Solo que para un tiempo fijo, de hecho para $t = 1$.

Ya estamos del otro lado. La velocidad a la izquierda (en este caso) está determinada por $f'(u^L)$ y a la derecha (también en este caso) por σ_{45} . Es decir, sabemos cómo expandir el rectángulo reflejado para cada tiempo; la solución es auto-semejante (recuerda la sección 2.3). Mucho más que eso, tenemos cómo los estados iniciales del problema de Riemann evolucionan sin importar lo que pasa en el interior del rectángulo. Es claro que cuando $t \rightarrow 0^+$ recuperamos la condición inicial. Así, tenemos la solución del problema (1) para cualesquiera estados u^L, u^R y función de flujo $f(u) \in \mathcal{C}^1(I)$.

4. Algunos comentarios finales

Un poco a modo de conclusión quiero resaltar algunas partes que han quedado entre líneas en el texto. La *falta de existencia* de soluciones clásicas nos llevó a construir las *soluciones débiles*, pero estas a su vez tienen problemas de *unicidad*. Las razones de la construcción física del problema nos llevó a los *criterios de entropía*, los cuales nos permiten generalizar la teoría, inclusive cuando los problemas son puramente teóricos.

Sin embargo, a veces tenemos perfiles muy complicados y la resolución no parece sencilla. Es genial tener un resultado como el de Oleĭnik vía las soluciones geométricas; como hemos visto con las rarefacciones

por inversión de funciones y las ondas de choque por balances de masa. Sin embargo, esta es la teoría solo para el caso escalar y unidimensional. Para sistemas en una dimensión, a veces podemos aprovecharnos de este conocimiento y sacar algunas conclusiones, pero es tema abierto de investigación. Como mencionamos anteriormente, las soluciones numéricas pueden mostrarse las correctas bajo los criterios del teorema de Lax-Wendroff. De hecho, en ocasiones cuando se tienen varias soluciones teóricas, se pueden usar las soluciones numéricas para definir cuál es la solución correcta.

Espero sinceramente, que este trabajo te haya motivado y sirva como una invitación a que te aproximes a las leyes de conservación hiperbólicas. Sé que el camino requiere conocimientos previos de EDP, pero también creo que los artículos como [8] pueden mostrar que hay mucho camino por descubrir y en muchas direcciones. Libros como [11, 12, 19, 21, 29] te pueden aproximar o si quieres puedes intentar directamente con trabajos clásicos como los son [18, 20, 22].

He colocado algunas referencias como los libros de Lewis Carrol [6, 7]. También, para saber más sobre Olga, tal vez quieras leer un homenaje por sus 70 años [1] o su obituario en *Notices*, [15]. En ambos textos puedes encontrar información sobre otros de sus trabajos, por ejemplo, podemos citar [16, 24, 23] como tres de sus ocho libros que tratan algunos temas en ecuaciones en derivadas parciales. En [25] hay algunas de sus incursiones al problema 16 de Hilbert y a la topología de superficies.

Agradecimientos

Quisiera expresar mi agradecimiento a la Dra. Ana Meda Guardiola por su diligencia en el tratamiento editorial y al Dr. Cesar Luis García García por su invitación original al XLVIII Congreso Nacional. También agradezco los comentarios y sugerencias de los revisores anónimos que ayudaron en gran medida a mejorar la presentación y el contenido de este trabajo. Así mismo quiero reconocer el cuidado del Lic. en M. A. Rodrigo Zepeda por su ayuda y comentarios en la redacción final. Este trabajo ha sido apoyado por la Asociación Mexicana de Cultura A.C.

Bibliografía

- [1] V. Arnold, M. Vishik, A. Kalashnikov, V. Maslov, S. Nikol'skii y S. Novikov, «Olga Arsenievna Oleinik (on her 70th birthday)», *J. Math. Sci.*, vol. 85, 1997, 2249–2259.
- [2] A. Azevedo, D. Marchesin, B. Plohr y K. Zumbrun, «Capillary instability in models for three-phase flow», *Z. Angew. Math. Phys.*, vol. 53, 2002, 713–746.

- [3] D. Basson, S. Berres y R. Bürger, «On models of polydisperse sedimentation with particle-size-specific hindered-settling factors», *Appl. Math. Model.*, vol. 33, 2009, 1815–1835.
- [4] S. Bernard, A. Méril, P. Rodríguez-Bermúdez y B. Valiño-Alonso, «Obtaining shock solutions via Maslov’s theory and Colombeau’s algebra for conservation laws with analytical coefficients», *Novi Sad J. Math.*, vol. 42, 2012, 95–116.
- [5] S. Berres y P. Castañeda, «Identification of shock profile solutions for bidisperse suspensions», *Bull. Braz. Math. Soc., New Series*, vol. 47, 2016, 105–115.
- [6] L. Carrol, *Alicia en el país de las maravillas*, 1865, (original en inglés: Alice’s Adventures in Wonderland).
- [7] L. Carrol, *Alicia a través del espejo*, 1872, (original en inglés: Through the Looking-Glass, and what Alice found there).
- [8] P. Castañeda, «Dogma: S-shaped. Ode to ônibus 409», *Math. Intelligencer*, vol. 38, 2016, 10–13.
- [9] P. Castañeda, E. Abreu, F. Furtado y D. Marchesin, «On a universal structure for immiscible three-phase flow in virgin reservoirs», *Comput. Geosci.*, vol. 20, 2016, 171–185.
- [10] G. Chapiro, D. Marchesin y S. Schecter, «Combustion waves and Riemann solutions in light porous media», *H. Hyperbolic Differ. Equ.*, vol. 11, 2014, 295–328.
- [11] R. Courant y K. Friedrichs, *Supersonic flow and shock waves*, Wiley, New York, 1948.
- [12] C. Dafermos, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, Springer-Verlag, Berlín Heidelberg, 2000.
- [13] F. Furtado, «Structural Stability of Nonlinear Waves for Conservation Laws», tesis de doctorado, NYU, 1989.
- [14] E. Hopf, «The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ », *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 3, 1950, 201–230.
- [15] W. Jager, P. Lax y C. Morawetz, «Olga Arsen’evna Oleĭnik (1925–2001)», *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 50, 2003, 220–223.
- [16] V. Jikov, S. Kozlov y O. Oleĭnik, *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*, Springer-Verlag, 1994.
- [17] S. Karni y G. Hernández-Dueñas, «A hybrid algorithm for the Baer-Nunziato model using the Riemann invariants», *J. Sci. Comput.*, vol. 45, 2010, 382–403.
- [18] P. Lax, «Hyperbolic systems of conservation laws II», *Commun. Pure Appl. Math.*, vol. 10, 1957, 537–566.
- [19] R. LeVeque, *Numerical methods for conservation laws*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.
- [20] T.-P. Liu, «The Riemann problem for general 2×2 conservation laws», *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 199, 1974, 89–112.
- [21] A. Minzoni, *Tópicos en Ecuaciones Diferenciales Parciales*, Serie Verde: Notas, vol. 12, IIMAS-UNAM, 1978, (Con algunos errores tipográficos existe una versión más moderna Apuntes de Ecuaciones en Derivadas Parciales, como el vol. 5 de la Serie Fenomec del IIMASUNAM, 2003.).
- [22] O. Oleĭnik, «Discontinuous solutions of non-linear differential equations», *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 12, 1957, 3–73, traducción al inglés en *Amer. Math. Soc. Transl.*, vol. 26, 1963, 95–172.
- [23] ———, *Some Asymptotic Problems of the Theory of Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 1995.
- [24] O. Oleĭnik, A. Shamaev y G. Yosifian, *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [25] I. Petrovskii y O. Oleĭnik, *On the topology of real algebraic surfaces*, Amer. Math. Soc. Translation 70, 1952.
- [26] R. Plaza, « l^p -decay rates for perturbations of degenerate scalar viscous shock waves», *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 382, 2011, 864–882.

- [27] M. Reintjes y B. Temple, «Points of general relativistic shock wave interaction are ‘regularity singularities’ where space-time is not locally flat», *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, vol. 468, 2012, 2962–2980.
- [28] B. Riemann, «Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite», *Abh. Ges. Wiss. Göttingen*, vol. 8, 1860, 43–65.
- [29] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, 2.^a ed., Springer-Verlag, 1994.