Miscelánea Matemática **78** (2024) 69-81 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7805

El núcleo de Dirichlet no es bueno

Josefina Alvarez
Department of Mathematics
New Mexico State University, Las Cruces, USA
jalvarez@nmsu.edu
y
Martha Guzmán-Partida
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
Hermosillo, Sonora, México
martha@mat.uson.mx

1. Introducción

Antes de Joseph Fourier, la naturaleza del calor no era bien entendida. Por ejemplo, en 1736, la Academia Francesa solicitó contribuciones sobre el tema «La naturaleza y la propagación del 'fuego'». Aunque con la palabra 'fuego' se quiso decir 'calor', todos los artículos enviados, incluso el de Euler, no lo entendieron así e intentaron explicar cómo se propaga un incendio [3, p. 5].

A pesar de estos equívocos, de acuerdo con Umberto Bottazzini [1, p. 59], hacia el final del siglo dieciocho, el calor ya se estaba percibiendo como una fuente de energía que podría ser usada en la industria. Además, «si sus usos prácticos se demuestran en las fábricas textiles inglesas, son sus aspectos teóricos los que despertaron el interés de los científicos franceses» [1, p. 59].

Con el título *La teoría analítica del calor*, Fourier publicó en 1822 dos artículos, escritos en 1807 y 1811, radicalmente diferentes de todas las investigaciones previas. Lo que Fourier hizo fue desarrollar un modelo matemático de la propagación del calor, específicamente, una ecuación diferencial parcial que hoy se conoce como la ecuación del calor. En el artículo de 1811, Fourier incluyó palabras atribuidas a Platón, por cierto muy apropiadas: «También el calor está gobernado por números» [3, p. 6].

Palabras clave: Series de Fourier, convergencia puntual, núcleo de Dirichlet, núcleo de sumabilidad o núcleo bueno.

Para resolver su ecuación, Fourier usó ciertas series, hoy conocidas como series de Fourier. En la opinión de sus contemporáneos, la ecuación del calor fue el mayor logro de Fourier, mientras que las series se consideraron «una desgracia». [3, p. 6].

El tema de las series de Fourier esencialmente se basa en las fórmulas

$$f(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx), \tag{1}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \tag{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\;dx,\; n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\;dx,\; n = 1, 2, \ldots\ . \tag{4}$$

Fourier muestra en varios ejemplos, que la serie converge a la función f, es decir que la serie converge puntualmente a $f(x)$, para cada x, en el sentido de la definición de Augustin-Louis Cauchy. Basado en sus ejemplos, Fourier dice que «la serie siempre converge». Más adelante, reafirma que «nuestra demostración se aplica a una función completamente arbitraria» [3, p. 12].

A pesar de estas afirmaciones tan entusiastas, o quizá debido a ellas, el representar funciones como en (1) ha motivado muchos desarrollos en análisis, por ejemplo la integral de Riemann y la de Lebesgue, y también ha inspirado la teoría de Georg Cantor sobre los números transfinitos.

Ahora bien, dada una función f, si calculamos a_n y b_n, suponiendo que las integrales existen en algún sentido, y formamos la serie que aparece en el lado derecho de (1), ¿será verdad que la serie converge a $f(x)$ para todo x? De acuerdo con Fourier, la respuesta es siempre afirmativa. Después que varios matemáticos de la época, entre ellos Cauchy, produjeron demostraciones más o menos incorrectas, Peter Gustav Lejeune Dirichlet probó la convergencia puntual de la serie suponiendo que f cumple condiciones bastante generales. Su artículo apareció en *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Journal de Crelle), Vol. 4, (1829), pp. 157-169.

Teorema 1. *(Dirichlet) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 2π-periódica que es continua y tiene una derivada continua y acotada, excepto, posiblemente, en un número finito de puntos en cada intervalo de longitud 2π. Entonces, la igualdad (1) se verifica en todo punto $x \in \mathbb{R}$ donde f es continua.*

De acuerdo a Jean-Pierre Kahane [3, p. 31], «El artículo de Dirichlet sobre las series de Fourier, marca un hito, en la teoría y también en la manera en que el análisis matemático es estudiado y escrito. El propósito de Dirichlet es simplemente dar un enunciado correcto y una demostración correcta. Así, es un paradigma de rigor en análisis».

Kahane reproduce el artículo completo en las páginas 36-46 de [3]. La demostración del teorema 1 también puede verse, por ejemplo, en [5, p. 56, §15] para funciones que son continuas en todo punto, y en [5, p. 59, §16] en el caso general.

Después del resultado de Dirichlet, por casi cincuenta años se intentó probar la convergencia bajo hipótesis más y más débiles. El contraejemplo que Paul du Bois-Reymond propuso en 1873, mostró que la mera continuidad de f no es suficiente para asegurar la convergencia puntual de la serie. En efecto,

Teorema 2. *(du-Bois Reymond) (Una demostración se puede ver, por ejemplo, en [5, p. 67, teo. 18.1]) Hay una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periódica y continua, para la cual*

$$\limsup_{n\to\infty} S_n(0) = \infty,$$

donde $S_n(0)$ indica la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier de g, $S_n(x)$, evaluada en $x = 0$.

Que el teorema 1 no es cierto cuando f es meramente continua, tomó por sorpresa a los analistas de la época y destruyó el paraíso creado por Fourier.

Ahora bien, si hay funciones continuas cuyas series de Fourier divergen en un punto, ¿será posible que haya funciones continuas cuyas series de Fourier divergen en todo punto? La búsqueda de tales funciones duró casi cien años, hasta que en 1966, Lennart Carleson probó de manera concluyente que tales funciones no pueden existir [2]. Así, después de casi ciento cincuenta años, se completó el estudio, inspirado por Fourier, de la convergencia puntual. Es interesante observar que la integral desarrollada por Henri Lebesgue, juega un papel fundamental en el resultado de Carleson.

El contraejemplo de du-Bois Reymond, muestra sin lugar a duda que no se puede esperar convergencia puntual en todo punto, cuando f es solamente continua. Sin embargo, esta prueba indirecta no explica el por qué. Así, el propósito de lo que sigue es el dar tal explicación.

Digamos que, para lo que nos proponemos hacer, será suficiente que trabajemos con la integral de Riemann.

2. El núcleo de Dirichlet

En la prueba del teorema de Dirichlet sobre convergencia puntual, la función $x \to S_n(x)$ se escribe como un operador integral de la forma

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_n (x-t) f (t) \, dt$$

donde $\mathcal{D}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se conoce como el n-ésimo núcleo de Dirichlet, o simplemente núcleo de Dirichlet. Como veremos, la imposibilidad de tener convergencia puntual de la sucesión $\{S_n (x)\}_{n \geq 0}$, para todo x y para cada función 2π-periódica y continua, se debe a la naturaleza del núcleo $\mathcal{D}_n$.

Para comenzar, en el siguiente lema, obtenemos una fórmula para $\mathcal{D}_n$, suponiendo que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es 2π-periódica, y Riemann integrable en $[-\pi, \pi]$.

Lema 3. *La suma parcial n-ésima S_n puede escribirse como*

$$S_n (x) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_n (x-t) f (t) \, dt, \tag{5}$$

donde la función $\mathcal{D}_n (s)$ es

$$\begin{matrix} \frac{1}{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)s}{\operatorname{sen} \frac{t}{2}} & \textit{si} \quad s \textit{ es un múltiplo de } 2\pi \\ \frac{2n+1}{2\pi} & \textit{si} \quad s \textit{ no lo es} \end{matrix} \quad . \tag{6}$$

Demostración. Escribamos

$$S_n (x) = \sum_{j=0}^{n} (a_j \cos jx + b_j \operatorname{sen} jx),$$

con $b_0 = 0$, donde los coeficientes están dados por (2), (3) y (4). Por conveniencia, usaremos exponenciales complejas, aunque «no fueron usadas en series de Fourier hasta bien entrados en el siglo veinte» [3, p. 2]. Las identidades

$$\cos jx = \frac{e^{ijx} + e^{-ijx}}{2},$$
$$\operatorname{sen} jx = \frac{e^{ijx} - e^{-ijx}}{2i}$$

nos dan

$$S_n (x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2} \left(a_j + \frac{b_j}{i} \right) e^{ijx} + \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2} \left(a_j - \frac{b_j}{i} \right) e^{-ijx}, \tag{7}$$

donde

$$\frac{1}{2} \left(a_j + \frac{b_j}{i} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ijt} f (t) \, dt,$$
$$\frac{1}{2} \left(a_j - \frac{b_j}{i} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt} f (t) \, dt,$$

para $j \geq 1$.

Por lo tanto,

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{j=-n}^{n} e^{ij(x-t)} \right] f(t),$$

mientras que

$$\begin{aligned}\sum_{j=-n}^{n} e^{ij(x-t)} &= e^{-in(x-t)} \sum_{j=0}^{2n} e^{ij(x-t)} \underset{(i)}{=} e^{-in(x-t)} \frac{1 - e^{i(2n+1)(x-t)}}{1 - e^{i(x-t)}} \\ &= \frac{e^{-in(x-t)} - e^{i(n+1)(x-t)}}{e^{i(x-t)/2}\left[e^{-i(x-t)/2} - e^{i(x-t)/2}\right]} = \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)(x-t)}{\operatorname{sen}\frac{(x-t)}{2}},\end{aligned}$$

cuando $x-t$ no es un múltiplo de 2π. En (i) hemos usado la fórmula para la suma de los primeros $2n+1$ términos de una progresión geométrica.

De esta manera, obtenemos (6) cuando s no es un múltiplo de 2π. A partir de (6), la fórmula de L'Hôpital nos da el valor $\mathcal{D}_n(s)$ cuando s es un múltiplo de 2π.

Esto completa la demostración del lema. $\square$

La función $\mathcal{D}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es 2π-periódica, par, y es continua con derivadas continuas de todos los órdenes.

Abandonamos el núcleo de Dirichlet, por ahora, pues necesitamos algunos resultados generales, que incluimos en las siguientes dos secciones.

3. La convolución periódica

Dada una sucesión $\{\mathcal{K}_n\}_{n\geq 0}$ de funciones continuas y 2π-periódicas $\mathcal{K}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podríamos considerar un operador lineal, para cada $n \geq 0$,

$$f \to \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}_n(x-t) f(t)\, dt, \tag{8}$$

con núcleo $\mathcal{K}_n$, donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es cualquier función 2π-periódica y Riemann integrable en $[-\pi, \pi]$.

Para justificar ciertas propiedades de este operador, necesitaremos el siguiente lema:

Lema 4. 1. *Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es 2π-periódica, para cada $k \in \mathbb{Z}$ distinto de cero, $2k\pi$ es también un periodo.*
2. *Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periódica, y Riemann integrable en $[-\pi, \pi]$. Entonces, para $x \in \mathbb{R}$ fijo, la función $y \to F(x-y)$ es 2π-periódica, y Riemann integrable en $[-\pi, \pi]$.*
3. *Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es 2π-periódica, F toma los mismos valores en cualquier intervalo de longitud 2π.*

4. *Si* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es* 2π*-periódica, y Riemann integrable en* $[-\pi, \pi]$,
$$\int_{-\pi}^{\pi} F(y)\, dy = \int_{-\pi}^{\pi} F(x-y)\, dy$$
para todo $x \in \mathbb{R}$ *fijo.*
5. *Sean* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π*-periódicas, y Riemann integrables en* $[-\pi, \pi]$. *Entonces, para cada* $x \in \mathbb{R}$ *fijo, las funciones* $y \to f(x-y)\, g(y)$, $y \to f(y)\, g(x-y)$ *son Riemann integrables en* $[-\pi, \pi]$ *y*
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, g(x-y)\, dy.$$

Demostración. Las afirmaciones hechas sobre la integrabilidad de Riemann, pueden verse en muchos textos, por ejemplo [6, apéndice, pp. 280-288]. En cuanto al resto de los enunciados, los probamos a continuación.

Como F es 2π-periódica, si $y \in \mathbb{R}$,
$$F(y) = F(y - 2\pi + 2\pi) = F(y - 2\pi),$$
$$F(y + 2k\pi) = F(y + 2(k-1)\pi + 2\pi) = F(y + 2(k-1)\pi)$$
para $k = 2, 3, \ldots$, y
$$F(y + 2k\pi) = F(y + 2(k+1)\pi - 2\pi) = F(y + 2(k+1)\pi)$$
para $k = -2, -3, \ldots$

Por lo tanto, 1) se obtiene usando inducción. En cuanto a 2), si fijamos $x \in \mathbb{R}$,
$$F(x - (y + 2\pi)) = F(x - y - 2\pi) = F(x-y).$$
Esto nos da 2).

Para probar 3), consideramos un intervalo arbitrario $[-\pi + a, \pi + a]$ con $a \in \mathbb{R}$ fijo. Solo es necesario observar que dado $t \in [-\pi + a, \pi + a]$, existe $y \in [-\pi, \pi]$ tal que $F(t) = F(y)$, y recíprocamente.

Para probar 4), fijamos $x \in \mathbb{R}$. Entonces,
$$\int_{-\pi}^{\pi} F(y)\, dy \underset{(ii)}{=} \int_{-\pi+x}^{\pi+x} F(y)\, dy \underset{y \to s = -y}{=} -\int_{\pi - x}^{-\pi-x} F(-s)\, ds$$
$$= \int_{-\pi-x}^{\pi-x} F(-s)\, ds \underset{s \to y = x+s}{=} \int_{-\pi}^{\pi} F(x-y)\, dy,$$
donde hemos usado 3) en (ii).

Finalmente, si $x \in \mathbb{R}$ es fijo, sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $y \to f(x-y)\, g(y)$. Como probamos en 4),
$$\int_{-\pi}^{\pi} F(y)\, dy = \int_{-\pi}^{\pi} F(x-y)\, dy,$$

o
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, g(x-y)\, dy$$
lo cual es 5).

Esto completa la prueba del lema. □

Este lema justifica el decir que (8) es una convolución 2π-periódica, que indicaremos $\mathcal{K}_n * f$. Específicamente, 5) nos dice que $\mathcal{K}_n * f = f * \mathcal{K}_n$. Además, $\mathcal{K}_n * f$ resulta ser una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (véase por ejemplo, [6, pp. 45-48, prop. 3.1 (v), lem. 3.2]).

4. La importancia de tener un núcleo bueno

Comenzamos con la siguiente definición:

Definición 5. [6, p. 49] Una sucesión $\{\mathcal{K}_n\}_{n\geq 0}$ de funciones 2π-periódicas y continuas $\mathcal{K}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es un núcleo bueno, o, indistintamente, $\mathcal{K}_n$ es un núcleo bueno, si satisface las siguientes condiciones:

1. (Normalización)
$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}_n(t)\, dt = 1$$
para toda $n \geq 0$.
2. (Integrabilidad absoluta uniformemente acotada) Existe $C > 0$ tal que
$$\int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{K}_n(t)|\, dt \leq C$$
para toda $n \geq 0$.
3. (Concentración alrededor de cero) Para cada $0 < \delta < \pi$ fija, existe el
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta\leq|t|\leq\pi} |\mathcal{K}_n(t)|\, dt = 0.$$

Las condiciones 1) y 2) ya habían sido propuestas por Antoni Zygmund en [7, pp. 85-86]. Por otra parte, en [4, p. 9], Yitzhak Katznelson propone la siguiente forma equivalente de la condición 3):

Para cada $0 < \delta < \pi$ fijo, existe el
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |\mathcal{K}_n(t)|\, dt = 0.$$

En realidad, para cada $0 < \delta < \pi$ fijo,
$$\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} |\mathcal{K}_n(t)|\, dt = \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |\mathcal{K}_n(t)|\, dt.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}\left|\mathcal{K}_n\left(t\right)\right|dt&=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\mathcal{K}_n\left(t\right)\right|dt-\int_{|t|<\delta}\left|\mathcal{K}_n\left(t\right)\right|dt\\&\underset{(iii)}{=}\int_{-\pi+\pi-\delta}^{\pi+\pi-\delta}\left|\mathcal{K}_n\left(t\right)\right|dt-\int_{|t|<\delta}\left|\mathcal{K}_n\left(t\right)\right|dt\\&=\int_{-\delta}^{2\pi-\delta}\left|\mathcal{K}_n\left(t\right)\right|dt-\int_{-\delta}^{\delta}\left|\mathcal{K}_n\left(t\right)\right|dt\\&=\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\left|\mathcal{K}_n\left(t\right)\right|dt,\end{aligned}$$

donde hemos usado en (iii) el lema 4.

Teorema 6. *[6, p. 49, teo. 4.1] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función 2π-periódica que es Riemann integrable en $[-\pi,\pi]$. Entonces, si $\mathcal{K}_n$ es un núcleo bueno,*

- **a):** *existe el $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{K}_n\left(x-t\right)f\left(t\right)dt=f\left(x\right)$, para cada $x\in\mathbb{R}$ donde la función f es continua. Además,*
- **b):** *el límite es uniforme en $x\in\mathbb{R}$, cuando f es continua en todo x.*

Demostración.

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{K}_n\left(x-t\right)f\left(t\right)dt\underset{t\to s=x-t}{=}-\int_{x+\pi}^{x-\pi}\mathcal{K}_n\left(s\right)f\left(x-s\right)ds\\&=\int_{x-\pi}^{x+\pi}\mathcal{K}_n\left(s\right)f\left(x-s\right)ds.\end{aligned}$$

Usando el lema 4,

$$\int_{x-\pi}^{x+\pi}\mathcal{K}_n\left(s\right)f\left(x-s\right)ds=\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{K}_n\left(s\right)f\left(x-s\right)ds. \tag{9}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{K}_n\left(x-t\right)f\left(t\right)dt-f\left(x\right)\right|\underset{(iv)}{=}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{K}_n\left(s\right)f\left(x-s\right)ds-f\left(x\right)\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{K}_n\left(s\right)ds\right|\\&=\left|\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{K}_n\left(s\right)\left(f\left(x-s\right)-f\left(x\right)\right)ds\right|,\end{aligned}$$

donde hemos usado 1) en la definición 5, en (iv).

Si la función f es continua en x, dado $\varepsilon>0$, existe $\delta=\delta\left(x,\varepsilon\right)>0$ que se puede elegir menor que π, tal que

$$\left|f\left(x-s\right)-f\left(x\right)\right|\leq\varepsilon$$

para $|s|<\delta$.

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{K}_n(s)\left(f(x-s)-f(x)\right)ds\right| &\leq \varepsilon\int_{|s|<\delta}|\mathcal{K}_n(s)|\,ds\\ &\quad+2\sup_{|t|\leq\pi}|f(t)|\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}|\mathcal{K}_n(s)|\,ds\\ &\underset{(v)}{\leq} C\varepsilon+2B\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}|\mathcal{K}_n(s)|\,ds,\end{aligned}$$

donde $B=\sup_{|t|\leq\pi}|f(t)|$ y hemos usado 2) en la definition 5, en el primer término de (v).

Finalmente, 3) nos dice que existe $N=N(\varepsilon)\geq 1$ tal que

$$\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}|\mathcal{K}_n(s)|\,ds\leq\varepsilon$$

para $n\geq N$.

Esto completa la prueba de a).

En cuanto a b), solo necesitamos observar que cuando f es continua en toda la recta, es uniformemente continua en $[-\pi,\pi]$, y también en $\mathbb{R}$ porque f es periódica. Entonces, δ puede elegirse independientemente de x, y en consecuencia,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{K}_n(s)\left(f(x-s)-f(x)\right)ds\right|\leq(C+2B)\,\varepsilon.$$

Así, b) está probado.

Esto completa la prueba del teorema. □

En la demostración de este teorema, se ve muy claramente cómo se usa cada una de las tres condiciones en la definición 5. Este es el motivo principal de haberla incluido.

Katznelson dice que $\{\mathcal{K}_n\}_{n\geq 0}$ es un núcleo de sumabilidad, cuando satisface las condiciones de la definición 6.

Volviendo al núcleo de Dirichlet, es muy sencillo ver que satisface la condición 1). En efecto, cuando f es la función idénticamente igual a 1, las fórmulas (2), (3) y (4) implican que la suma parcial S_n es también idénticamente 1. Entonces, de (5) resulta, usando 3) en el lema 4,

$$\begin{aligned}1&=\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{D}_n(x-t)\,dt\underset{t\to s=x-t}{=}\int_{x-\pi}^{x+\pi}\mathcal{D}_n(s)=\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{D}_n(s)\,ds\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j=-n}^{n}e^{ijt}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dt=1.\end{aligned}$$

Y esto es todo lo bueno que se puede esperar del núcleo de Dirichlet.

En la sección que sigue, probaremos que $\{\mathcal{D}_n\}_{n\geq 0}$ no satisface las condiciones 2) y 3).

5. El núcleo de Dirichlet no es bueno

Proposición 7. *Se tiene la siguiente estimación:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{D}_n(t)|\, dt \geq \frac{4}{\pi^2} \ln n$$

para todo $n = 1, 2, \ldots$

Demostración. Comenzamos con

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{D}_n(t)|\, dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}} \right| dt = \int_0^{\pi} \frac{1}{\pi} \frac{\left|\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}} dt \\
&\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left|\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{t} dt \underset{t\to s=\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{|\operatorname{sen} s|}{s} ds \\
&\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{n\pi} \frac{|\operatorname{sen} s|}{s} ds.
\end{aligned}$$

Esta última integral se puede escribir como,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen} s|}{s} ds &\geq \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+1} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} |\operatorname{sen} s|\, ds \\
&= \frac{4}{\pi^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Si comparamos la suma en (10) con la integral de $f(t) = \frac{1}{t}$ sobre el intervalo $[1, n]$, concluimos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{D}_n(t)|\, dt \geq \frac{4}{\pi^2} \ln n.$$

Esto completa la prueba de la proposición, demostrando que $\mathcal{D}_n$ no satisface la condición 2) en la definición 5. □

Finalmente,

Proposición 8. *Para cada* $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$ *y para toda* $k = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |\mathcal{D}_{4k}(t)|\, dt \geq \frac{2}{\pi^2} \left(2 - \sqrt{2}\right) \frac{8k}{8k+1}.$$

Demostración. Para cada $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |\mathcal{D}_n(t)|\, dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \left| \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}} \right| dt \\
&\geq \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\left|\operatorname{sen n}\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}} dt \\
&\underset{s=t-\frac{\pi}{2}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left|\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{\pi}{2}\right)\right|}{\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} ds.
\end{aligned}$$

Cuando $n = 4k$ para $k = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\left(4k+\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{\pi}{2}\right) = (8k+1)\frac{s}{2} + \left(2k\pi + \frac{\pi}{4}\right).$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\operatorname{sen}\left[(8k+1)\frac{s}{2} + \left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\operatorname{sen}(8k+1)\frac{s}{2} + \cos(8k+1)\frac{s}{2}\right].$$

Entonces, el cambio de variable $t = \frac{s}{2}$ y la estimación $\operatorname{sen}\left(t+\frac{\pi}{4}\right) \leq t + \frac{\pi}{4}$, producen

$$\begin{aligned}
\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |\mathcal{D}_{4k}(t)|\, dt &\geq \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\operatorname{sen}(8k+1)t + \cos(8k+1)t|}{t+\frac{\pi}{4}} dt \\
&\geq \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{j=1}^{8k} \int_{\frac{j}{8k+1}\frac{\pi}{4}}^{\frac{j+1}{8k+1}\frac{\pi}{4}} \frac{|\operatorname{sen}(8k+1)t + \cos(8k+1)t|}{t+\frac{\pi}{4}} dt \\
&\geq \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{j=1}^{8k} \frac{1}{\frac{j+1}{8k+1}\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}} \times \\
&\times \left| \int_{\frac{j}{8k+1}\frac{\pi}{4}}^{\frac{j+1}{8k+1}\frac{\pi}{4}} \left[(\operatorname{sen}(8k+1)t + \cos(8k+1)t)\right] dt \right|.
\end{aligned} \tag{11}$$

Calculando la integral en (11), obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |\mathcal{D}_{4k}(t)|\, dt \geq \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{j=1}^{8k} \frac{1}{(j+1)\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}(8k+1)} \times \\
\times \left| \left(\sqrt{2}-1\right) \operatorname{sen} j\frac{\pi}{4} + \cos j\frac{\pi}{4} \right|.
\end{aligned} \tag{12}$$

Ahora hacemos la siguiente observación:

Para $j = 1, 2, \ldots, 8$ y $l = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\begin{aligned} f(j+8l) &= \left(\sqrt{2}-1\right) \operatorname{sen}(j+8l)\frac{\pi}{4} + \cos(j+8l)\frac{\pi}{4} \\ &= \left(\sqrt{2}-1\right) \operatorname{sen}\left(j\frac{\pi}{4} + 2l\pi\right) + \cos\left(j\frac{\pi}{4} + 2l\pi\right) \\ &= \left(\sqrt{2}-1\right) \operatorname{sen} j\frac{\pi}{4} + \cos j\frac{\pi}{4} \\ &= f(j). \end{aligned}$$

Esto significa que si organizamos la suma (12) en k grupos de ocho términos cada una, esto es, $j = 1, \ldots, 8$; $j = 9, \ldots, 16$; $j = 17, \ldots, 24$; etc., los valores de $\left|\left(\sqrt{2}-1\right) \operatorname{sen} j\frac{\pi}{4} + \cos j\frac{\pi}{4}\right|$ en el segundo, tercer, etc., grupo, coinciden con los valores en el primer grupo.

Para $j = 1, 2, \ldots, 8$, los valores de $f(j) = \left(\sqrt{2}-1\right) \operatorname{sen} j\frac{\pi}{4} + \cos j\frac{\pi}{4}$ son

j	$f(j)$	j	$f(j)$
1	1	5	-1
2	$\sqrt{2}-1$	6	$-\left(\sqrt{2}-1\right)$
3	$-\left(\sqrt{2}-1\right)$	7	$\sqrt{2}-1$
4	-1	8	1

.

Esto es, para $j = 1, 2, \ldots, 8k$, la expresión $\left|\left(\sqrt{2}-1\right) \operatorname{sen} j\frac{\pi}{4} + \cos j\frac{\pi}{4}\right|$ toma solamente dos valores, 1 y $\sqrt{2}-1$.

Por consiguiente,

$$\left|\left(\sqrt{2}-1\right) \operatorname{sen} j\frac{\pi}{4} + \cos j\frac{\pi}{4}\right| \geq \sqrt{2}-1$$

para toda $j = 1, 2, \ldots$

Es decir,

$$\begin{aligned} \int_{\delta\leq|t|\leq\pi} \left|\mathcal{D}_{4k}(t)\right| dt &\geq \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{j=1}^{8k} \frac{1}{(j+1)\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}(8k+1)} \left(\sqrt{2}-1\right) \\ &\geq \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\sqrt{2}-1\right) \frac{8k}{2\frac{\pi}{4}(8k+1)} = \frac{2}{\pi^2}\left(2-\sqrt{2}\right)\frac{8k}{8k+1}, \end{aligned}$$

como lo habíamos afirmado.

Esto completa la prueba de la proposición, mostrando que $\mathcal{D}_n$ tampoco satisface la condición 3) en la definición 5. □

Así, no solo justificamos la larga historia de la convergencia puntual, sino que también ponemos en evidencia la enorme dificultad técnica del resultado obtenido por Carleson.

Reconocimiento: Agradecemos a los revisores sus comentarios, que nos han permitido mejorar nuestro artículo grandemente. También les

agradecemos el haber considerado nuestra prueba de la proposición 8. Como uno de los revisores observó,

$$\begin{aligned}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}|\mathcal{D}_n(t)|\,dt &\geq \frac{2}{\pi^2}\int_{\pi/2}^{\pi}\left|\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right|dt\\ &= \frac{2}{\pi^2}\begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2n+1}+\frac{2n+2}{2n+1} & \text{si } n \text{ es par}\\ \frac{\sqrt{2}}{2n+1}+\frac{2n}{2n+1} & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases}.\end{aligned}$$

Esto nos recuerda que, en 1994, Marshall J. Ash publicó un artículo cuyo título comienza «A new, harder proof that ...»[1].

Bibliografía

[1] U. Bottazzini, *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, Springer-Verlag, 1986, traducido por W. V. Egmond.

[2] L. Carleson, «On convergence and growth of partial sums of Fourier series», *Acta Math.*, 1966, 135–157, https://doi.org/10.1007/BF02392815.

[3] J. P. Kahane y P. G. Lemarié-Rieusset, *Fourier Series and Wavelets*, Gordon and Breach Publishers, 1995.

[4] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, 1.ª ed., Dover Publications, 1976, John Wiley & Sons, 1968. Tercera edición corregida, Cambridge University Press 2004, https://doi.org/10.1017/CBO9781139165372.

[5] T. W. Körner, *Fourier Analysis*, 1.ª ed., Cambridge University Press, 1990, Cambridge University Press 1988. Primera edición de tapa blanda 1989, reimpresa en 1990. https://doi.org/10.1017/CBO9781107049949.

[6] E. M. Stein y R. Shakarchi, *Princeton Lectures in Analysis I: Fourier Analysis, An Introduction*, Princeton University Press, 2003.

[7] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, 2.ª ed., Cambridge University Press, 1959, Primera edición de tapa blanda 1988, reimpresa en 1990. Tercera edición 2003. https://doi.org/10.1017/CBO9781316036587.

[1] A new, harder proof that continuous functions with Schwarz derivative 0 are linear, *Lectures Notes in Pure and Appl. Math.* 157, Marcel Dekker, Inc., New York, 1994, 35-46. **MR**1277817.