Miscelánea Matemática **43** (2006) 21–51 SMM

Modelos Matemáticos sobre el Origen de la Ganancia del Capital

Sergio Hernández Castañeda
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
UNAM
shc@hp.fciencias.unam.mx

A la memoria de mi amigo Juan José Rivaud Morayta
a quien, seguramente, le haría gustado
ver este trabajo publicado

Resumen

Presentamos dos modelos matemáticos, muy simplificados, del modo capitalista de producción y del origen de la ganancia del capital. Ambos han sido construidos por el autor, con un enfoque propio, pero recurriendo a los métodos de la Teoría del Equilibrio Económico General y a los de la Teoría de Juegos.

El modelo expuesto en la Sección 2 considera un solo tipo de mercancía, aparte del trabajo, y una sola técnica productiva. Por ello, los trabajadores tendrán como única alternativa alquilarse al capital y los capitales sólo tendrán la opción de concurrir a organizar la producción, según la única técnica existente. Sin embargo, tal vez precisamente por su simplicidad, creemos que el modelo aclara una serie de interrogantes sobre el importante asunto del origen de la ganancia.

En la Sección 3, presentamos un segundo modelo en el cual suponemos que existen dos técnicas productivas: una que requiere necesariamente de capital para que pueda ser echada a andar y, la otra, que sólo requiere de trabajo. Consecuentemente, tanto los trabajadores como los capitales tendrán dos alternativas y, por ello, proponemos y usamos una técnica de análisis a la cual hemos llamado de dinámicas anidadas. Esto equivale a construir lo que, en otra parte, hemos definido como un juego de concurrencia con dos tipos de "jugadores": los trabajadores y los

capitales. Creemos que el análisis de la nueva situación tendrá, entre otros frutos, de una parte, la ampliación de nuestra visión acerca del origen de la ganancia del capital, de la determinación del salario y de las relaciones entre esas categorías económicas y, de la otra, una mejor comprensión de un problema tan importante como el de la formación de lo que, en la literatura marxista, ha sido llamado el ejército industrial de reserva para el capital.

1. Un modelo relaticamente general del modo capitalista de producción

Empezamos por exponer, en esta sección, un modelo relativamente general del modo capitalista de producción con el doble propósito de, por una parte, plantear, lo más claramente posible, la problemática que quisiéramos abordar en el futuro y, por otra, facilitar la comprensión de muchas de las abstracciones que haremos ulteriormente y que, de otro modo, con toda seguridad parecerían demasiado artificiales. Empezaremos entonces por una definición previa que se basa en una simplificación del conocido modelo de la producción de John von Neumann [15,16] el cual, como se sabe, considera, entre otras cosas, la posibilidad de que, con una misma técnica se produzcan diversos tipos de mercancías.

Definición 1. Sea m un número natural. Diremos que una *técnica de producción* con m tipos de mercancías es una matriz de orden $(m+1)\times 2$

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} l_0 & m_0 \\ l_1 & m_1 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ l_m & m_m \end{pmatrix},$$

cuyas componentes son todas números reales no negativos. La componente l_i será llamada la *cantidad de mercancía del tipo i que se requiere, como entrada, para desplegar la técnica* Υ *a un nivel unitario*. La componente m_i será llamada la *cantidad de mercancía del tipo i que se obtiene, como salida, cuando se despliega la técnica* Υ *a un nivel unitario*. Las componentes l_0 y m_0 son consideradas *cantidades de trabajo*. Usualmente, se supondrá que l_0 es una cantidad positiva y que $m_0 = 0$.

Definición 2. Durante el presente trabajo, diremos que una *Economía Capitalista* Ξ es un sistema que consta de lo siguiente:

(1) Un número natural m llamado el *número de tipos de mercancías*, aparte del trabajo;

(2) Un número natural N llamado el *número de trabajadores*;

(3) Un número real $I > 0$ llamado la *cantidad total de capital acumulado*;

(4) Para cada $\nu \in \overline{N}$, una función (*llamada de utilidad*) $u^\nu : R_+^{m+1} \to \overline{R}$;

(5) Para cada $\nu \in \overline{N}$, un número real $r^\nu \geq 0$, llamado la *cantidad de dinero con la cual inicia el día el ciudadano* ν;

(6) Una sucesión finita $\Upsilon_1, \Upsilon_2, ..., \Upsilon_s$ de técnicas de producción con m tipos de mercancías.

Aquí, $\overline{N}$ es el conjunto $\{1, 2, ..., N\}$ de los números naturales menores o iguales que N , R_+ es el conjunto de los números reales no negativos y $\overline{R}$ es el *sistema extendido* de los reales, es decir, el conjunto de los números reales al cual se ha agregado $+\infty$ y $-\infty$.Por otra parte, definimos la cantidad r mediante

$$r = \sum_{\nu=1}^{N} r^\nu$$

y postularemos, de aquí en adelante, que $r > 0$.

Con el objeto de llevar a cabo nuestros análisis, en una primera aproximación al asunto, empezaremos por hacer algunas hipótesis que asumiremos a lo largo de este trabajo. Supondremos que el intercambio mercantil se ha desarrollado hasta un grado tal que, aunque *no ha surgido aún el papel-moneda, ha aparecido ya una mercancía que desempeña el papel de dinero.* A partir de una forma original del intercambio basada en el trueque, se ha producido una especie de "selección natural"de una sola, de entre las diversas mercancías, que es aceptada por todos, como medio de cambio, en las transacciones comerciales. Para fijar ideas, podemos imaginar, ateniéndonos a la mayoría de los ejemplos que nos proporciona la Historia Económica, que esa mercancía es un metal, por el ejemplo, el oro (amonedado); pero muy bien puede ocurrir que esa mercancía no sea el oro y ni siquiera un metal y una muestra de ello nos la ofrece la Mesoamérica Prehispánica en donde, según parece, los granos de cacao llegaron a ser la mercancía seleccionada. En conclusión, cualquiera que sea ésta, lo que aquí nos importa es la suposición de que la economía que estamos estudiando ha seleccionado esa *mercancía dineraria.* Entonces imaginaremos que tanto la cantidad I, introducida en el punto (3), como las cantidades r^ν, introducidas en

(5), están dadas en unidades de esa mercancía a la cual, en ocasiones, llamaremos el numerario.

En la búsqueda de una mejor comprensión de la problemática que deseamos abordar, creemos que es conveniente hacer enseguida algunas aclaraciones generales.

En primer lugar, centraremos nuestro análisis en el funcionamiento de la economía durante un periodo relativamente corto, digamos, para fijar ideas, que de *un día* al cual llamaremos, coloquialmente, el día de hoy. Nos proponemos, valga la comparación, "tomar una película" de los procesos económicos durante este día.

A partir de los elementos que introducimos como integrantes de la economía en la Definición 2, intentaremos, mediante los métodos matemáticos, formarnos un primer esquema de cómo se comportan los agentes económicos, de cómo se forman la oferta y la demanda de las mercancías, de cómo se determinan los precios (el salario incluido) y la ganancia del capital y de cómo ocurren algunos otros fenómenos económicos relacionados. Todo lo anterior, durante el día de hoy.

Tales son nuestros objetivo en el presente trabajo.

Si nos planteáramos estudiar la problemática económica desde otra perspectiva, tendríamos que tomar en cuenta, por ejemplo, que los elementos considerados en la Definición 2 provienen del pasado y, en particular, del día de ayer y, por otra parte, tendríamos que preguntarnos también hacia dónde va la economía en el futuro. Tendríamos que considerar que la población de hoy proviene de la de ayer, que la cantidad r^ν ha sido reservada desde ayer por el ciudadano ν, para obtener lo que hoy habrá de consumir, tendríamos que tomar en cuenta que los capitales I constituyen una parte de la riqueza total de los diversos ciudadanos y que éstos han reservado tal riqueza, desde ayer, para usarla durante el día de hoy, etc., etc. Todas las cuestiones anteriores son, sin duda, de gran importancia y serían parte de un estudio mucho más extenso que se propusiera investigar los procesos económicos a mediano y a largo plazo. Sin embargo, por ahora, no nos proponemos abordar esos procesos y nos concentramos solamente en el día de hoy.

Entonces, como consecuencia de lo precedente, empezamos por suponer que, a diferencia de autores como Arrow y Debreu [1,3], el presupuesto del ciudadano ν destinado a su propio consumo inmediato se reduce precisamente a la cantidad r^ν.

Aparte de lo anterior, hacemos las hipótesis de que, *en cuanto a trabajador*, el ciudadano ν dispone de su capacidad para laborar durante la jornada de hoy, de que pugnará para obtener, por su trabajo, la mayor cantidad de dinero que sea posible y que reducirá a ello, al dinero obtenido, la ponderación del éxito logrado con sus esfuerzos.

Por otro lado, supondremos también que los capìtales I sólo buscan maximizar sus ganancias expresadas en términos dinerarios.

Podemos considerar entonces los elementos integrantes de la Definición 2, *en el nivel de generalidad allí establecido* y, con base en las hipótesis arriba esbozadas, desarrollar diversos esquemas matemáticos en torno a cómo concurren, tanto los capitales como los trabajadores, a las diversas alternativas que se les presentan y también en torno a cómo se forman la oferta y la demanda de las distintas mercancías en ciertas circunstancias que pueden precisarse. Sin embargo, muy pronto nos tropezamos con numerosas dificultades técnicas que se antojan a primera vista insuperables, cuando insistimos en mantenernos en el nivel de generalidad indicado. Esto nos conduce a reducirnos, por ahora, a considerar en las secciones siguientes sólo casos particulares de economías, según la Definición 2. Ellos pueden parecer, tal vez, excesivamente simplificados y empobrecidos de contenido. Pero, aunque en muchos aspectos lo anterior es cierto, estamos convencidos de que, no obstante, resultará instructivo tratarlos.

2. Un primer modelo sobre el origen de la ganancia del capital

2.1. El modelo simplificado

En concordancia con lo arriba dicho, haremos las siguientes hipótesis:

(a) Supondremos que $m = 1$ o, en otras palabras, consideraremos solamente un tipo de mercancía aparte del trabajo. Para fijar ideas, imaginaremos que tal mercancía es *grano*.

Como estamos basándonos en la hipótesis de que el papel-moneda aún no ha surgido, lo anterior nos conduce a suponer que el dinero ("el numerario") es la propia mercancía 1. Más adelante veremos que esta idea nos fuerza, cuando se habla de la demanda y de la oferta de la mercancía 1, a ciertos razonamientos que se antojan artificiales. Sin embargo, creemos que tal apariencia de artificialidad se contempla de otro modo en el caso general presentado anteriormente.

(b) Supondremos igualmente que, para cada $\nu \in \overline{N}$, la función u^ν :

$R_+^{m+1} \to \overline{R}$ es una *función de utilidad de Bernoulli* [2,6] la cual, en la situación simplificada que estamos considerando, se define como

$$u^\nu(x_0, x_1) = \begin{cases} a_0^\nu \log(x_0) + a_1^\nu \log(x_1) & \text{si } x_0, x_1 > 0 \\ -\infty & \text{si } x_0 = 0 \ \text{ ó } \ x_1 = 0 \end{cases} .$$

Aquí, asumimos que la función está *normalizada*, es decir, que los coeficientes a_0^ν y a_1^ν son números reales positivos de tal modo que

$$a_0^\nu + a_1^\nu = 1.$$

Interpretamos al vector $(x_0, x_1) \in R_+^2$ como un *plan de consumo* del ciudadano ν en donde x_0 es trabajo que ν *tiene a su servicio* (podríamos considerarlo como trabajo doméstico) y x_1 es mercancía del tipo 1.

(c) Otra simplificación consiste en suponer que solamente existe una técnica productiva Υ. Considerando que $m = 1$ y con el objeto de hacer más sencilla la notación, escribiremos

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

Supondremos, además, que $\tau > 0$ y $0 < a < 1$.

En otras palabras, la forma de Υ nos dice que, para producir una unidad de la mercancía 1, se requiere de $\tau > 0$ jornadas de trabajo y de $a > 0$ cantidad de grano.

La exigencia de $a < 1$ equivale a que, con la técnica Υ, se puede obtener un producto neto positivo de grano.

Definiremos además $v = \frac{\tau}{1-a}$, cantidad que puede interpretarse como *el tiempo total de trabajo necesario para producir una unidad de grano*, cuando se utiliza la técnica Υ. Entonces, basándonos en la tradición de la Economía Política Clásica [12] o en la de la Escuela Marxista [8], podemos llamar a v el *valor-trabajo* de una unidad de grano cuando se usa la técnica Υ.

2.2. Formación de la oferta y de la demanda

Puesto que el grano es el numerario, un sistema de precios queda determinado por lo que podemos llamar el salario unitario $p_0 \geq 0$.

¿Cómo actúan ante tal sistema de precios los trabajadores y los capitales y, por tanto, cómo se forman la oferta y la demanda tanto de trabajo como de grano?

A fin de responder a lo anterior, empezamos por convenir en el llamado principio de competencia perfecta [3], es decir, aceptamos que los individuos se comportan considerando como dado al sistema de precios, de un modo parecido a cómo se comporta un ingeniero ante la ley de la gravedad.

En segundo lugar, como se desprende de lo señalado en la sección precedente, suponemos que tanto los trabajadores como los capitales *reducen a cantidades de dinero* (de grano) la medida de sus logros. Los trabajadores, tanto en lo que producen y llevan al mercado como en lo que obtienen como salario cuando acuden al mercado de trabajo y, por otra parte, los capitales, cuando se invierten en los procesos productivos.

Visto como consumidor, suponemos que el individuo ν se enfrenta al problema de elegir, de entre los planes de consumo $(x_0, x_1) \in R^2_+$ que él puede comprar con la cantidad r^ν, aquel plan que le proporcione la mayor utilidad. En otras palabras, aceptamos que se plantea el siguiente problema de optimización:

$$\begin{gathered} \text{maximizar } u^\nu(x) = u^\nu(x_0, x_1) \\ \text{sujeto a :} \\ p_0 x_0 + p_1 x_1 \le r^\nu \\ x_0, x_1 \ge 0 \end{gathered}$$

en donde, por supuesto, $p_1 = 1$. Como puede verse, adaptamos a nuestro enfoque hipótesis tomadas de la Teoría Microeconómica [3,18] usual.

Dada la forma que hemos postulado para la función de utilidad u^ν, tomando en cuenta que ésta resulta monótona creciente y mediante el clásico procedimiento de Lagrange, se obtiene la bien conocida *única* solución del problema anterior

$$x^\nu = (x_0^\nu, x_1^\nu) = (\frac{a_0^\nu r^\nu}{p_0}, \frac{a_1^\nu r^\nu}{p_1}).$$

Podemos suponer entonces que, en cuanto a consumidor, el individuo ν *ofrece* en el mercado la cantidad de dinero (grano) r^ν y *demanda* el vector x^ν. Éste será llamado, como es costumbre en la literatura económica, *la demanda para el consumo del individuo* ν.

Aparte de lo anterior, supondremos también que, en cuanto a trabajador, el individuo ν *ofrece* al mercado su capacidad de trabajo por una jornada y *demanda* el salario establecido.

Pasando a los capitales, suponemos que el capital I se plantea el problema de

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } G(w) = w(1 - p_0\tau - a) \\ &\text{sujeto a } : \\ &\qquad 0 \leq w(p_0\tau + a) \leq I. \end{aligned}$$

Aquí, $p_0\tau + a$ es la cantidad de dinero que se debe invertir para organizar la producción de una unidad de la mercancía 1 y w es la cantidad de mercancía de tipo 1 que se planea producir. Naturalmente, la cantidad w es el instrumento de decisión de los capitales. La cantidad $1-p_0\tau-a$ representa la ganancia (o pérdida) que obtienen los capitales cuando dan lugar a que se produzca una unidad de mercancía del tipo 1 y, por tanto,

$$G(w) = w(1 - p_0\tau - a)$$

es la ganancia (o pérdida) que obtienen cuando determinan la producción de una cantidad w de mercancía 1.

Si consideramos resuelto el problema anterior, entonces los capitales I serán llevados a elegir $w \in S(p_0)$ en donde

$$S(p_0) = \begin{cases} \{0\} & \text{si} \quad 1 < p_0\tau + a \\ \left[0, \frac{I}{p_0\tau+a}\right] & \text{si} \quad 1 = p_0\tau + a \\ \left\{\frac{I}{p_0\tau+a}\right\} & \text{si} \quad 1 > p_0\tau + a \end{cases}.$$

Por tanto, si convenimos en que $w \in S(p_0)$, tenemos que los capitales I, con el fin de que se pueda echar a andar la producción, *demandan* $w\tau$ unidades de trabajo y wa cantidad de grano y, por otro lado, *ofrecen* $w(p_0\tau + a)$ cantidad de dinero.

Es basándonos en todo lo que antecede que construimos los cuadros de abajo de demanda y de oferta totales:

	Demanda
Trabajo	$\frac{r_0}{p_0} + w\tau$
Grano	$r_1 + p_0 N + wa$

Tabla 2.2.1.

y

	Oferta
Trabajo	N
Grano	$r + w(p_0\tau + a)$

Tabla 2.2.2.

En éstas, naturalmente, suponemos que $w \in S(p_0)$ y definimos

$$r_0 = \sum_{\nu=1}^{N} a_0^{\nu} r^{\nu} \quad \text{y}$$
$$r_1 = \sum_{\nu=1}^{N} a_1^{\nu} r^{\nu}.$$

Tomando en cuenta las definiciones anteriores, tenemos que la demanda de trabajo (doméstico) por parte de todos los trabajadores queda dada por

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{a_0^{\nu} r^{\nu}}{p_0} = \frac{\sum_{\nu=1}^{N} a_0^{\nu} r^{\nu}}{p_0} = \frac{r_0}{p_0}$$

lo cual nos explica el significado del primer sumando de la demanda de trabajo en la Tabla 2.2.1.

Análogamente,

$$r_1 = \frac{r_1}{p_1}$$

es la demanda de grano para el consumo, por parte de todos los trabajadores.

De todo esto, se desprende claramente que las cantidades r_0 y r_1 pueden ser interpretadas como la *cantidad de dinero que destinan los individuos a demandar para el consumo la mercancía* 0 *y la mercancía* 1, respectivamente.

Por otra parte,

$$r = \sum_{\nu=1}^{N} r^{\nu} = r_0 + r_1$$

es la oferta total de dinero (grano) por parte de los trabajadores, destinada a obtener lo que ellos han de consumir.

Para una primera aproximación al problema del origen de la ganancia del capital, hemos decidido no incluir la renta de la tierra en los costos de producción. Esto puede justificarse haciendo la hipótesis de que la sociedad dispone de una cantidad suficientemente grande de tierra, lo que causa que ésta sea gratuita.

Si $p_0 \geq 0$ y si $w \in S(p_0)$ es una opción óptima para los capitales, entonces, basándonos en las tablas de arriba, podemos definir

$$\begin{aligned} D_0(p_0; w) &= \frac{r_0}{p_0} + w\tau, \\ D_1(p_0; w) &= r_1 + p_0 N + wa, \\ O_0(p_0, w) &= N \qquad \text{y, finalmente,} \\ O_1(p_0, w) &= r + w(p_0\tau + a). \end{aligned}$$

Enseguida, podemos comprobar sin dificultad que se cumple la igualdad:

$$p_0 D_0(p_0; w) + p_1 D_1(p_0; w) = p_0 O_0(p_0; w) + p_1 O_1(p_0; w),$$

cualquiera que sea el sistema de precios considerado, es decir, que *el precio de la demanda total siempre es igual al precio de la oferta total* lo que, en la literatura de los economistas, es conocido como la "Ley de Walras" [3,18].

2.3. Determinación de equilibrios

Ahora, si decimos que p_0^* nos proporciona un *sistema de precios de equilibrio* cuando existe $w^* \in S(p_0^*)$ tal que se cumplan, simultáneamente, las relaciones

$$\begin{aligned} D_0(p_0^*; w^*) &= O_0(p_0^*; w^*) \qquad \text{y} \\ D_1(p_0^*; w^*) &= O_1(p_0^*; w^*), \end{aligned}$$

tendremos que, en virtud de la "Ley de Walras", $p_0^* > 0$ proporcionará un equilibrio si y sólo si se cumple *una sola de las igualdades anteriores.* Consecuentemente, con el fin de determinar un equilibrio, investigaremos la primera igualdad de arriba que tiene la ventaja de ser la más sencilla.

La correspondencia $D_0 : R_+ \multimap \overline{R}$, que asocia a cada $p_0 \geq 0$ un subconjunto de los reales, se define mediante

$$D_0(p_0) = \{ D_0(p_0; w) \mid w \in S(p_0) \} .$$

No es difícil comprobar que la anterior es una correspondencia de las conocidas como *superiormente semicontinuas* [3](es decir, que su gráfica es un subconjunto cerrado en R^2) y que puede expresarse del siguiente modo

$$D_0(p_0) = \begin{cases} \left\{ \frac{r_0}{p_0} + \frac{I\tau}{p_0\tau + a} \right\} & \text{si } p_0 < \frac{1}{v} \\ \left\{ \frac{r_0}{p_0} + w\tau \,\middle|\, w \in \left[0, \frac{I}{p_0\tau + a}\right] \right\} & \text{si } p_0 = \frac{1}{v} \\ \left\{ \frac{r_0}{p_0} \right\} & \text{si } \frac{1}{v} < p_0 \end{cases} .$$

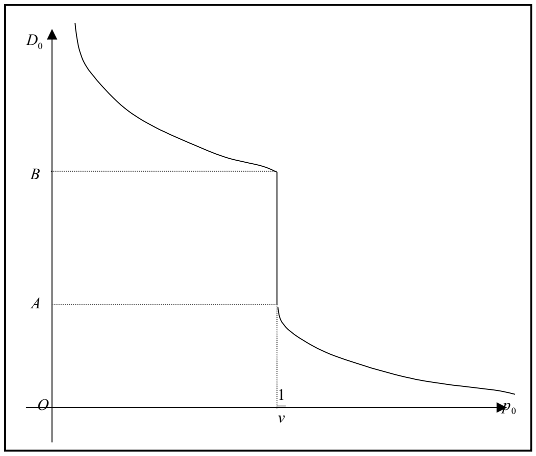

Figura 2.3.1

Si, además, definimos

$$A = r_0 v \text{ y}$$
$$B = r_0 v + \frac{I\tau}{\frac{\tau}{v} + a} = r_0 v + I\tau \ \ > A,$$

tendremos que la gráfica de la correspondencia D_0 puede representarse como en la Figura 2.3.1. y que D_0 es *monótona decreciente* en el sentido de que, si $p_0 < \overline{p_0}$, entonces tendremos $z > \overline{z}$, siempre que $z \in D_0(p_0)$ y $\overline{z} \in D_0(\overline{p_0})$.

Sobre la base anterior, para cada $N > 0$, existe uno y sólo un valor p_0^* para el cual existe $w^* \in S(p_0^*)$, de tal modo que $O_0(p_0^*; w^*) = N = D_0(p_0^*; w^*)$ (Véanse las figuras 2.4.1, 2.4.2 y 2.4.3).

En otras palabras, existe uno y sólo un valor p_0^* que proporciona un *equilibrio.*Tal valor p_0^*, dependiendo de cómo es N, está dado del modo siguiente:

$$p_0^*(N) = \begin{cases} \frac{r_0}{N} & \text{si } 0 < N \leq r_0 v \\ \frac{1}{v} & \text{si } r_0 v \leq N \leq r_0 v + I\tau \\ \frac{(r_0+I)\tau - Na + \sqrt{((r_0+I)\tau - Na)^2 + 4N\tau r_0 a}}{2N\tau} & \text{si } r_0 v + I\tau < N \end{cases}.$$

La misma Figura 2.3.1 nos muestra cómo es la *función* $p_0^*(N)$ ya que ésta es una especie de "inversa"de la correspondencia $D_0(p_0)$. Es decir, para cada valor de N, colocado en el eje de las ordenadas, $p_0^*(N)$ es tal que el punto $(p_0^*(N), N)$ está sobre la gráfica de $D_0(p_0)$. Es entonces claro que la función $p_0^*(N)$ es continua y monótona no creciente.

2.4. Un análisis heurístico de la dinámica de los precios

Como vimos en el parágrafo precedente, dado el valor de N, la expresión que nos proporciona a $p_0^*(N)$ depende de tres casos distintos. Examinemos cada uno de ellos.

Caso I: $r_0 v + I\tau < N$.

Esta situación está representada en la Figura 2.4.1.

Estudiemos enseguida cómo es la dinámica de los precios.

En virtud de la monotonía de la correspondencia D_0, tenemos que, si $p_0 < p_0^*$ (Véase la Figura 2.4.1.), $S(p_0)$ consiste de un único elemento w y se cumplirá que

$$O_0(p_0; w) = N = O_0(p_0^*; w^*) = D_0(p_0^*; w^*) < D_0(p_0; w).$$

De aquí, puesto que la oferta es menor que la demanda, se deduce una "tendencia" del salario a elevarse, es decir, a "ir hacia" el equilibrio.

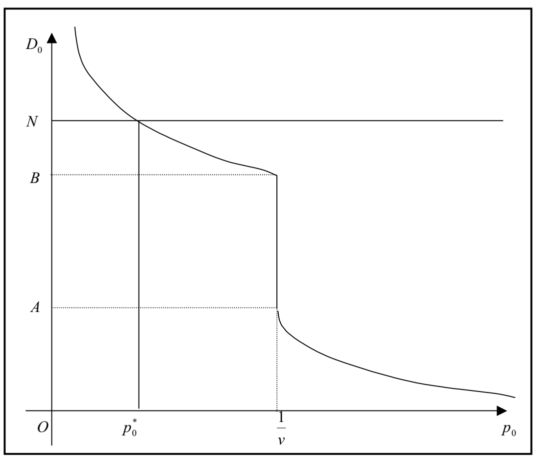

Figura 2.4.1

De un modo parecido, si $p_0^* < p_0$ (Véase la Figura 2.4.1.), se deducirá una "tendencia" del salario a descender, es decir, también a "ir hacia" el equilibrio.

Entonces, podemos considerar plausible una "tendencia" del salario a "gravitar" en torno al equilibrio.

La argumentación *heurística* anterior es esencialmente igual a argumentaciones clásicas que proceden, por lo menos, del célebre economista del siglo XIX John Stuart Mill [9].

Caso II: $r_0 v \le N \le r_0 v + I\tau$.

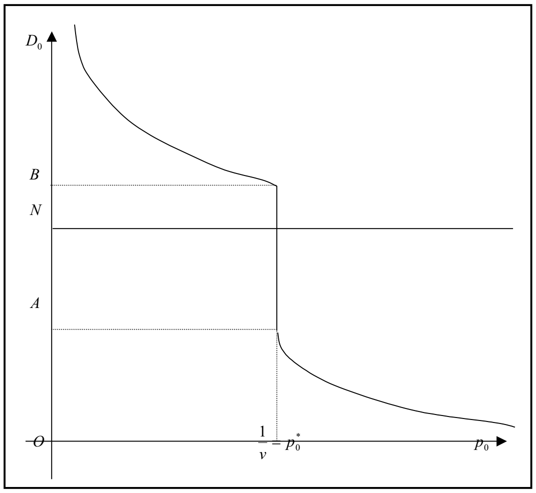

Figura 2.4.2

Representamos este caso en la Figura 2.4.2.

Nos encontramos ahora con una diferencia considerable respecto a la situación examinada anteriormente, ya que $p_0^* = \frac{1}{v}$ y $D_0(p_0^*)$ consta de todos los números de la forma $\frac{r_0}{p_0^*} + w\tau$ en donde $w \in \left[0, \frac{I}{p_0^*\tau + a}\right]$.

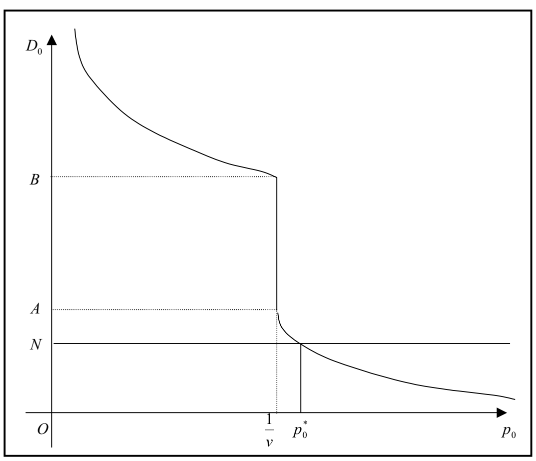

Figura 2.4.3

Consecuentemente, si razonamos como lo hicimos en el caso anterior, deducimos que, si $p_0 < p_0^*$, se presenta una "tendencia"de p_0 a elevarse. Es decir, a ir "hacia p_0^*". Analogamente, podemos deducir que, si $p_0^* < p_0$, se presenta una "tendencia"de p_0 a ir "hacia p_0^*". Sin embargo, cuando $p_0 = p_0^*$, muy bien podría ocurrir que los capitales eligieran a w de tal modo que

$$D_0(p_0; w) \neq N = O_0(p_0; w).$$

Entonces, habría que aceptar que el salario *se desviaría* de la *posición de equilibrio* ya que la oferta de trabajo diferiría de la demanda. No obstante, en virtud de la primera argumentación, se podría hablar nuevamente, en un sentido más amplio, del salario "gravitando" en torno a p_0^*.

Caso III: $0 < N < r_0 v$.

En esta situación, representada en la Figura 2.4.3., el análisis de la dinámica de los precios resulta totalmente análogo al llevado a cabo en el Caso I.

La conclusión del conjunto de los razonamientos *heurísticos* anteriores es que el salario "gravitará" finalmente en torno a p_0^*, cualquiera que sea la situación que originalmente se realice.

2.5. Los casos posibles en cuanto a la formación de una ganancia para el capital

En el parágrafo anterior, mediante algunos razonamientos *heurísticos*, hemos visto cómo, dependiendo de los datos exógenos que definen la economía que estamos estudiando, puede decirse que "*se produce una tendencia*" a que los precios "*graviten*" en torno al sistema de precios de equilibrio determinado por p_0^*. El problema que se nos plantea ahora es el siguiente: ¿Cómo es la tasa de ganancia para el capital en el sistema de precios inducido por p_0^*?

Para responder a esto, volvamos a los casos estudiados con anterioridad.

Caso I: $r_0 v + I\tau < N$.

En esta situación, representada en la Figura 2.4.1., el salario p_0^*, correspondiente al equilibrio, está dado por

$$p_0^* = \frac{(r_0 + I)\tau - Na + \sqrt{((r_0 + I)\tau - Na)^2 + 4N\tau r_0 a}}{2N\tau} < \frac{1}{v}.$$

La *tasa de ganancia para el capital es positiva* y queda dada por

$$\Theta = \frac{1 - (\tau p_0^* + a)}{\tau p_0^* + a}.$$

El nivel de producción que "*tiende a darse*" está dado por

$$w^* = \frac{I}{p_0^* \tau + a}.$$

Caso II: $r_0 v \leq N \leq r_0 v + I\tau$.

Se representa mediante la Figura 2.4.2.

El salario de equilibrio está dado por

$$p_0^* = \frac{1}{v}.$$

La *tasa de ganancia es nula* y el nivel de producción es cualquier $w \in \left[0, \frac{I}{p_0\tau + a}\right]$.

Caso III: $0 < N < r_0 v$.

La Figura 2.4.3. representa esta situación.

Tenemos ahora que

$$p_0^* = \frac{r_0}{N} > \frac{1}{v}$$

y que la *tasa de ganancia* y el nivel de producción son nulos.

Como vemos, del modelo anterior se desprende, en particular, que cuando la población trabajadora N es suficientemente grande en relación al capital total acumulado I , es decir, cuando

$$r_0 v + I\tau < N$$

o, quizá en otras palabras, cuando la competencia entre los trabajadores es suficientemente grande, el salario que tiende a establecerse es menor que $\frac{1}{v}$ y resulta tal que causa una tasa de ganancia positiva para el capital.

Por otra parte, cuando N es menor que $r_0 v$, entonces el salario que tiende a establecerse es mayor que $\frac{1}{v}$, la tasa de ganancia se hace nula, los capitales se paralizan y la producción se detiene.

3. Un segundo modelo sobre el origen de la ganancia del capital

3.1. Presentación del modelo

Como ya lo hemos señalado en la sinopsis, debido al hecho de que, aquí, se consideran dos técnicas productivas distintas, el modelo matemático del modo capitalista de producción que presentaremos enseguida difiere del anteriormente expuesto principalmente en la técnica de análisis que aplicamos al segundo. Mediante tal técnica, similar a la aplicada por nosotros en otros estudios, construiremos, en el fondo, un juego de concurrencia, en donde los jugadores resultarán ser los capitales y los trabajadores.

Por lo demás, en cuanto se refiere a los elementos componentes del modelo, estamos aquí también ante un caso particular del modelo general definido en la Sección 1.

Para precisar, volvamos entonces a la Definición 2 de la Sección 1 y hagamos las siguientes hipótesis:

(a) Supondremos, como antes, que $m = 1$ e imaginaremos también que la única mercancía existente, aparte del trabajo, es el grano. Como en el modelo presentado en la sección precedente, haremos la hipótesis de que es la propia mercancía 1 la que desempeña las funciones de dinero.

(b) Consideraremos, como en la Sección 2, que el ciudadano ν destina a su consumo inmediato exactamente la cantidad de dinero r^{ν}.

(c) Aceptaremos también que, *en cuanto a trabajador*, el ciudadano ν dispone de su capacidad para laborar durante la jornada de hoy, de que tratará de obtener, por su trabajo, la mayor cantidad de dinero posible y de que medirá el éxito logrado únicamente por la cantidad de dinero obtenida. Por su parte, supondremos igualmente que los capitales I se proponen, solamente, maximizar sus ganancias expresadas en términos dinerarios.

(d) También aquí asumiremos que, para cada $\nu \in \overline{N}$, la función $u^{\nu} : R_{+}^{m+1} \to \overline{R}$ es una *función de utilidad de Bernoulli.*

(e) Sin embargo, en esta ocasión, imaginaremos que existen dos técnicas productivas Υ_1 y Υ_2 que son como a continuación se describe:

En la notación introducida en la Definición 1 de la Sección 1, tenemos que

$$\Upsilon_1 = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y que}$$

$$\Upsilon_2 = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

Supondremos, además, que $t > 0$, $\tau > 0$ y $0 < a < 1$.

En otras palabras, la forma de Υ_1 nos dice que con sólo $t > 0$ jornadas de trabajo se produce una unidad de la mercancía 1.

En cambio, la forma de Υ_2, como en el modelo de la sección anterior, nos indica que, para producir una unidad de la mercancía 1, se requiere de $\tau > 0$ jornadas de trabajo y de $a > 0$ cantidad de grano.

Igualmente, haremos $v = \frac{\tau}{1-a}$ e interpretaremos esta cantidad, como es natural, como el tiempo total de trabajo necesario para producir una unidad de grano cuando se utiliza la técnica Υ_2.

Finalmente, ya que t puede interpretarse, claramente, como el tiempo total de trabajo necesario para producir una unidad de grano, cuando se utiliza la técnica Υ_1, el postulado que haremos de que

$$v < t$$

se interpreta como que la técnica Υ_1 es *menos productiva* que la técnica Υ_2.

3.2. Marcos de segunda instancia

Una vez hechas las precisiones anteriores, aplicaremos la técnica de análisis basada en *dinámicas anidadas.*

Para ser más específicos, empecemos por suponer que los trabajadores tienen dos alternativas:

O bien concurren a producir la mercancía 1 usando la técnica Υ_1 (donde sólo se requiere trabajo para producir) o bien eligen alquilarse ellos mismos para recibir un salario a cambio de su trabajo.

Por otra parte, supongamos que los capitales tienen también dos alternativas:

O bien deciden contratar trabajadores para dedicarlos a producir la mercancía 1, usando la técnica Υ_1, o bien deciden contratar trabajadores y comprar grano para producir también grano, pero usando la técnica Υ_2.

Hagamos entonces la hipótesis de que y_0 trabajadores han decidido ofrecerse en el mercado de trabajo, en tanto que y_1 trabajadores han decidido producir grano, *por su cuenta*, mediante la técnica Υ_1.

Dicho conjunto de decisiones induce el vector bidimensional $y = (y_0, y_1)$ cuyas componentes son no negativas y que satisface la condición

$$y_0 + y_1 = N.$$

Consecuentemente, llamaremos un *vector de concurrencia total de los trabajadores* a un vector bidimensional $y = (y_0, y_1)$ que satisfaga las condiciones anteriores.

Observemos que no excluímos la posibilidad de que las cantidades y_0, y_1 sean fraccionarias o, en otras palabras, la posibilidad de que los trabajadores dediquen una parte de su jornada a su primera alternativa y la parte restante a su segunda alternativa.

Enseguida, supongamos que, de los capitales existentes, una parte de magnitud K_1 ha decidido concurrir a la técnica Υ_1 en tanto que la parte restante K_2 ha decidio concurrir a la técnica Υ_2. Esto nos conduce a definir como un *vector de concurrencia total de los capitales* a un vector bidimensional $K = (K_1, K_2)$ cuyas dos coordenadas son no negativas y tal que

$$K_1 + K_2 = I.$$

Si tanto los trabajadores como los capitales han hecho sus decisiones, tendremos un par de vectores (y, K). Llamaremos entonces un *marco de segunda instancia* a un par de vectores (y, K) en donde y y K son vectores de concurrencia total de los trabajadores y de los capitales, respectivamente. Ahora bien, puesto que, si están determinados y_0 y K_2, entonces también lo estarán y_1 y K_1, llamaremos también, por extensión, un *marco de segunda instancia* a un vector *bidimensional* $M = (y_0, K_2)$ cuyas coordenadas satisfacen las relaciones:

$$0 \leq y_0 \leq N$$
$$0 \leq K_2 \leq I.$$

Nuestro propósito consiste en considerar fijo a un marco de segunda instancia y, sobre esa base, estudiar cuáles son los precios que *tienden a darse*. Una vez hecho lo anterior, estaremos en condiciones para comprender cómo pueden cambiar los marcos de segunda instancia, es decir, las formas de concurrir de trabajadores y capitales. Esencialmente, es en esto en lo que consiste la técnica de análisis a la cual llamamos de *dinámicas anidadas*.

3.3. Formación de la oferta y de la demanda en un marco de segunda instancia

Conforme a lo arriba dicho, hagamos la hipótesis de que el marco de segunda instancia $M = (y_0, K_2)$ permanece fijo.

Puesto que el grano es el numerario, un sistema de precios queda determinado por lo que podemos llamar el salario unitario $p_0 \geq 0$.

¿Cómo actúan ante tal sistema de precios los trabajadores y los capitales y, por tanto, cómo se forman la oferta y la demanda tanto de trabajo como de grano?

A fin de responder a lo anterior, empezamos por convenir, como en el modelo anteriormente presentado, en el llamado *principio de competencia perfecta.*

Suponemos, igualmente, que tanto los trabajadores como los capitales *reducen a cantidades de dinero* la medida de sus logros. Los trabajadores, tanto en lo que producen y llevan al mercado como en lo que obtienen como salario cuando acuden al mercado de trabajo y, los capitales, cuando se invierten en los procesos productivos.

En las condiciones anteriormente descritas, podemos establecer que tanto la *oferta* de dinero (grano) como la *demanda* para el consumo, por parte del individuo ν, se establecen de un modo totalmente semejante a lo que ocurre en el modelo de la Sección 2.

Por otra parte, la *oferta* total de trabajo será la cantidad y_0 y la cantidad $p_0 y_0$ será la *demanda* total de dinero por parte de los trabajadores que han decidido ofrecerse en el mercado de trabajo.

Pasando al comportamiento de los capitales, suponemos que los que han decidido concurrir a la técnica Υ_1, se plantean el problema de

$$\begin{aligned} \text{maximizar } G_1(w_1) &= w_1(1 - p_0 t) \\ \text{sujeto a :} & \\ 0 \leq w_1 p_0 t &\leq K_1. \end{aligned}$$

Por analogía con lo hecho en la sección anterior, la cantidad $p_0 t$ es la cantidad de dinero (grano) que se debe invertir para dar lugar a la producción de una unidad de la mercancía 1, cuando se usa la técnica Υ_1. En este caso, w_1 es la cantidad de grano que se planea producir. Al mismo tiempo, la cantidad $1 - p_0 t$ es la ganancia (o pérdida) que obtiene el capital cuando da lugar a la producción de una unidad de grano y $G_1(w_1) = w_1(1 - p_0 t)$ es la ganancia (o pérdida) que obtiene el capital cuando da lugar a la producción de w_1 unidades de grano.

El problema de arriba conduce a los capitales K_1 a elegir $w_1 \in S_1(p_0)$, en donde

$$S_1(p_0) = \begin{cases} \{0\} & \text{si} \quad 1 < p_0 t \\ \left[0, \frac{K_1}{p_0 t}\right] & \text{si} \quad 1 = p_0 t \\ \left\{\frac{K_1}{p_0 t}\right\} & \text{si} \quad 1 > p_0 t \end{cases} .$$

De aquí que, si convenimos en que $w_1 \in S_1(p_0)$, los capitales K_1 *demandan* $w_1 t$ unidades de trabajo y *ofrecen* $w_1 p_0 t$ cantidad de dinero para poder echar a andar la producción.

Análogamente, proponemos que los capitales K_2, que concurren a la técnica Υ_2, se plantean el problema de

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } G_2(w_2) = w_2(1 - p_0\tau - a) \\ &\text{sujeto a :} \\ &\qquad 0 \leq w_2(p_0\tau + a) \leq K_2. \end{aligned}$$

La interpretación de este problema es totalmente similar a la del planteado en la Sección 2 y lleva a los capitales K_2 a elegir $w_2 \in S_2(p_0)$ en donde

$$S_2(p_0) = \begin{cases} \{0\} & \text{si} \quad 1 < p_0\tau + a \\ \left[0, \frac{K_2}{p_0\tau+a}\right] & \text{si} \quad 1 = p_0\tau + a \\ \left\{\frac{K_2}{p_0\tau+a}\right\} & \text{si} \quad 1 > p_0\tau + a \end{cases}.$$

Por tanto, si convenimos, como antes, en que $w_2 \in S_2(p_0)$, tenemos que los capitales K_2, para poder echar a andar la producción, *demandan* $w_2\tau$ unidades de trabajo y $w_2 a$ cantidad de grano y, por otro lado, *ofrecen* $w_2(p_0\tau + a)$ cantidad de dinero.

Es basándonos en todo lo dicho con anterioridad que construimos las tablas siguientes que nos informan de cómo son la oferta y la demanda totales, tanto de trabajo como de grano:

	Demanda
Trabajo	$\frac{r_0}{p_0} + w_1 t + w_2\tau$
Grano	$r_1 + p_0 y_0 + w_2 a$

Tabla 3.3.1

	Oferta
Trabajo	y_0
Grano	$r + w_1 p_0 t + w_2(p_0\tau + a)$

Tabla 3.3.2

Aquí, naturalmente, suponemos que $w_1 \in S_1(p_0)$, que $w_2 \in S_2(p_0)$ y las cantidades r_0 y r_1 tienen el mismo significado que en el modelo de la sección precedente. Las cantidades $\frac{r_0}{p_0}$ y r_1, respectivamente en las demandas totales de trabajo y de grano, se explican del mismo modo ya expuesto en la Sección 2.

3.4. Dinámica de los precios en un marco de segunda instancia

Si $p_0 > 0$ y si $w_1 \in S_1(p_0)$ y $w_2 \in S_2(p_0)$ son dos opciones óptimas de K_1 y de K_2, respectivamente, entonces, basándonos en las tablas 3.3.1 y 3.3.2, podemos definir

$$\begin{aligned} D_0(p_0; w_1, w_2) &= \frac{r_0}{p_0} + w_1 t + w_2 \tau, \\ D_1(p_0; w_1, w_2) &= r_1 + p_0 y_0 + w_2 a, \\ O_0(p_0, w_1, w_2) &= y_0 \qquad \text{y, finalmente,} \\ O_1(p_0, w_1, w_2) &= r + w_1 p_0 t + w_2(p_0 \tau + a). \end{aligned}$$

Además, podemos comprobar sin dificultad que se cumple, también aquí, una "Ley de Walras", esencialmente, en el mismo sentido que en el Parágrafo 2.2.

Ahora, si decimos que p_0^* nos proporciona un *sistema de precios de equilibrio (de primera instancia)* cuando existen $w_1^* \in S_1(p_0^*)$ y $w_2^* \in S_2(p_0)$ tales que se cumplan, simultáneamente, las relaciones

$$\begin{aligned} D_0(p_0^*; w_1^*, w_2^*) &= O_0(p_0^*; w_1^*, w_2^*) \qquad \text{y} \\ D_1(p_0^*; w_1^*, w_2^*) &= O_1(p_0^*; w_1^*, w_2^*), \end{aligned}$$

tendremos que, en virtud de la mencionada "Ley de Walras", $p_0^* > 0$ proporcionará un equilibrio si y sólo si se cumple *una sola de las igualdades anteriores*. Consecuentemente, con el fin de determinar un equilibrio, investigaremos la primera igualdad de arriba.

La correspondencia $D_0 : R_+ \multimap \overline{R}$, que asocia a cada $p_0 \geq 0$ un subconjunto del sistema extendido de los números reales, se define mediante

$$D_0(p_0) = \left\{ D_0(p_0; w_1, w_2) \,|w_1 \in S_1(p_0) \text{ y } w_2 \in S_2(p_0) \right\}.$$

Es fácil comprobar que la anterior es una *correspondencia superiormente semicontinua* y que puede expresarse como:

$$D_0(p_0) = \begin{cases} \left\{ \frac{r_0}{p_0} + \frac{K_1}{p_0} + \frac{K_2 \tau}{p_0 \tau + a} \right\} & \text{si } p_0 < \frac{1}{t} \\ \left\{ \frac{r_0}{p_0} + w_1 t + \frac{K_2 \tau}{p_0 \tau + a} \middle| w_1 \in \left[0, \frac{K_1}{p_0 t} \right] \right\} & \text{si } p_0 = \frac{1}{t} \\ \left\{ \frac{r_0}{p_0} + \frac{K_2 \tau}{p_0 \tau + a} \right\} & \text{si } \frac{1}{t} < p_0 < \frac{1}{v} \\ \left\{ \frac{r_0}{p_0} + w_2 \tau \middle| w_2 \in \left[0, \frac{K_2}{p_0 \tau + a} \right] \right\} & \text{si } p_0 = \frac{1}{v} \\ \left\{ \frac{r_0}{p_0} \right\} & \text{si } \frac{1}{v} < p_0 \end{cases}.$$

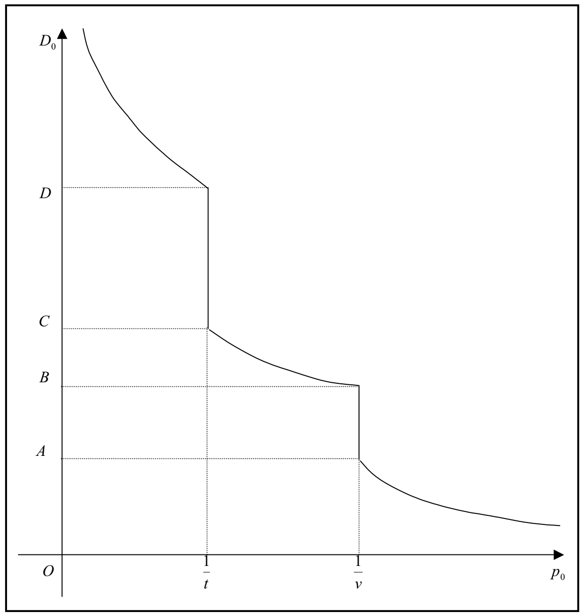

Figura 3.4.1

Si, además, definimos

$$
\begin{aligned}
A &= r_0 v,\\
B &= r_0 v + \frac{K_2 \tau}{\frac{\tau}{v} + a} = r_0 v + K_2 \tau \geq A\\
C &= r_0 t + \frac{K_2 \tau}{\frac{\tau}{t} + a} > B\\
D &= r_0 t + K_1 t + \frac{K_2 \tau}{\frac{\tau}{t} + a} \geq C
\end{aligned}
$$

tendremos que la gráfica de la correspondencia D_0 puede representarse como en la Figura 3.4.1. y que también es *monótona decreciente*.

Supongamos ahora que $y_0 > 0$. Entonces hay uno y sólo un valor p_0^* (véase la Figura 3.4.1.) para el cual existen $w_1^* \in S_1(p_0^*)$ y $w_2^* \in S_2(p_0^*)$ de tal modo que $O_0(p_0^*; w_1^*, w_2^*) = y_0 = D_0(p_0^*; w_1^*, w_2^*)$. En otras palabras, para cada $y_0 > 0$, existe uno y sólo un valor p_0^* que proporciona un *equilibrio (de primera instancia)*.

Para establecer explícitamente cómo es tal equilibrio de primera instancia, observemos antes que se pueden dar cinco casos mutuamente excluyentes para el marco de segunda instancia. Dichos casos son:

Caso	Condiciones que lo caracterizan
I	$0 \leq y_0 \leq r_0 v$
II	$r_0 v \leq y_0 \leq r_0 v + K_2\tau$
III	$r_0 v + K_2\tau \leq y_0 \leq r_0 t + \frac{K_2\tau t}{\tau + ta}$
IV	$r_0 t + \frac{K_2\tau t}{\tau+ta} \leq y_0 \leq (r_0 + I - K_2)t + \frac{K_2\tau t}{\tau+ta}$
V	$(r_0 + I - K_2)t + \frac{K_2\tau t}{\tau+ta} \leq y_0$

Entonces el valor p_0^* está dado del modo siguiente:

$$p_0^*(y_0, K_2) = \begin{cases} \frac{r_0}{y_0} & \text{Caso I} \\ \frac{1}{v} & \text{Caso II} \\ \frac{(r_0+K_2)\tau - y_0 a + \sqrt{((r_0+K_2)\tau - y_0 a)^2 + 4y_0\tau r_0 a}}{2y_0\tau} & \text{Caso III} \\ \frac{1}{t} & \text{Caso IV} \\ \frac{(r_0+I)\tau - y_o a + \sqrt{((r_0+I)\tau - y_0 a)^2 + 4y_0\tau(r_0+I-K_2 a)}}{2y_0\tau} & \text{Caso V} \end{cases}$$

Es interesante que observemos que la función $p_0^* : [0, N] \times [0, I] \to \overline{R}$, definida como arriba, es continua como fácilmente se puede comprobar.

Examinemos ahora la dinámica de los precios sobre la base de que el marco de segunda instancia (y_0, K_2) está fijo.

En virtud de la monotonía de la correspondencia D_0, tenemos que, si $p_0 < p_0^*$, cualesquiera que sean las elecciones $w_1 \in S_1(p_0)$ y $w_2 \in S_2(p_0)$, se cumplirá que

$$O_0(p_0; w_1, w_2) = y_0 = O_0(p_0^*; w_1, w_2) = D_0(p_0^*; w_1^*, w_2^*) < D_0(p_0; w_1, w_2).$$

De aquí se infiere, de un modo *heurístico*, totalmente análogo al visto en la sección precedente, que existe una "tendencia" del salario a "irse hacia" el equilibrio.

Otro tanto se puede hacer si $p_0^* < p_0$.

En resumen, podemos hablar de una "tendencia" del salario a "gravitar" en torno al equilibrio.

3.5. Sobre las recompensas per cápita a los trabajadores y las tasas de ganancia para los capitales, dado un marco de segunda instancia

Consideremos de nuevo un marco de segunda instancia (y_0, K_2) y asumamos que "tiende a darse" el salario $p_0^*(y_0, K_2)$ del cual hablamos en el parágrafo anterior.

Un trabajador que decida alquilarse por un salario gana por jornada la cantidad $p_0^*(y_0, K_2)$. Al mismo tiempo, un trabajador que decida trabajar por su cuenta gana por jornada la cantidad $\frac{1}{t}$.

Entonces, con el fin de comparar lo que se gana por jornada en las dos opciones que tienen los trabajadores, podemos desprender, de las fórmulas para calcular $p_0^*(y_0, K_2)$ vistas en el Parágrafo 3.4., que

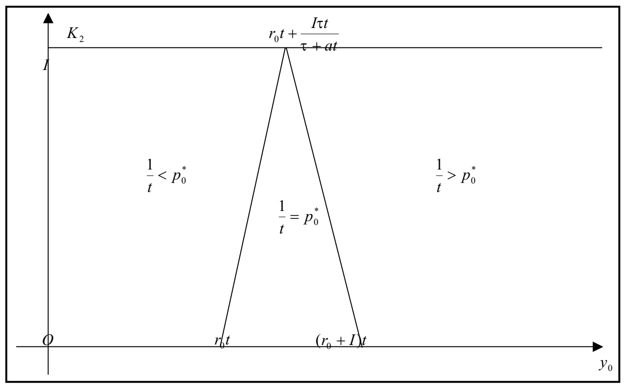

Figura 3.5.1

$$
\begin{array}{ll}
\frac{1}{t} < p_0^*(y_0, K_2) & \text{si } y_0 < r_0 t + \frac{K_2 \tau t}{\tau + at} \\
\frac{1}{t} = p_0^*(y_0, K_2) & \text{si } r_0 t + \frac{K_2 \tau t}{\tau + at} \leq y_0 \leq (r_0 + I - K_2)t + \frac{K_2 \tau t}{\tau + at} \\
p_0^*(y_0, K_2) < \frac{1}{t} & \text{si } (r_0 + I - K_2)t + \frac{K_2 \tau t}{\tau + at} < y_o.
\end{array}
$$

Todo lo anterior es representado en la Figura 3.5.1.

La desigualdad

$$r_0 t + \frac{I\tau t}{\tau + at} < (r_0 + I)t,$$

implícita en la figura, se deduce a partir del hecho de que todos los parámetros involucrados son positivos.

Nos preguntamos ahora cuál es la tasa de ganancia para los capitales que concurran a la técnica Υ_1 o a la técnica Υ_2.

Para contestar lo anterior, observemos que la ganancia $G_1(y_0, K_2)$, que obtienen los capitales K_1, queda dada por

$$G_1(y_0, K_2) = \text{máx}(0, \frac{(I - K_2)(1 - tp_0^*(y_0, K_2))}{tp_0^*(y_0, K_2)})$$

y que, por tanto, la tasa de ganancia $\Theta_1(y_0, K_2)$; para el capital invertido en la técnica Υ_1, queda dada por

$$\Theta_1(y_0, K_2) = \text{máx}(0, \frac{1 - tp_0^*(y_0, K_2)}{tp_0^*(y_0, K_2)}).$$

Analogamente, la tasa de ganancia $\Theta_2(y_0, K_2)$, que obtiene el capital invertido en la técnica Υ_2, está dada por

$$\Theta_2(y_0, K_2) = \text{máx}(0, \frac{1 - (\tau p_0^*(y_0, K_2) + a)}{\tau p_0^*(y_0, K_2) + a}).$$

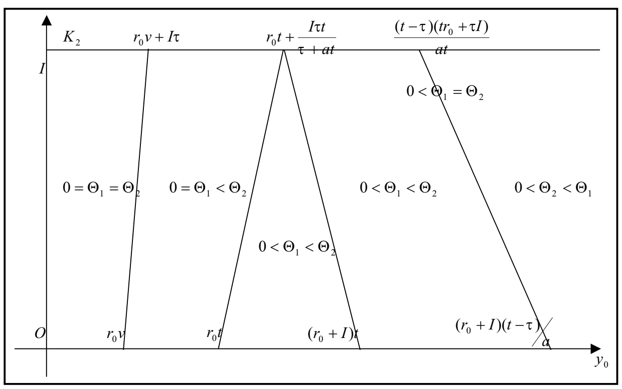

Figura 3.5.2

Debemos ahora comparar las dos tasas de ganancia anteriormente calculadas, para los distintos valores que pueden tomar y_0 y K_2.

Partiendo de las fórmulas de arriba y de las obtenidas para $p_0^*(y_0, K_2)$, obtenemos el siguiente cuadro:

$0 = \Theta_1 = \Theta_2$	para $0 \leq y_0 \leq r_0v + K_2\tau$
$0 = \Theta_1 < \Theta_2$	para $r_0v + K_2\tau < y_0 \leq (r_0 + I - \frac{at}{\tau+at}K_2)t$
$0 < \Theta_1 < \Theta_2$	para $(r_0 + I - \frac{at}{\tau+at}K_2)t < y_0 < \frac{t-\tau}{at}((r_0 + I)t + K_2(\tau - t))$
$0 < \Theta_1 = \Theta_2$	para $y_0 = \frac{t-\tau}{at}((r_0 + I)t + K_2(\tau - t))$
$0 < \Theta_2 < \Theta_1$	para $\frac{t-\tau}{at}((r_0 + I)t + K_2(\tau - t)) < y_0$

En la Figura 3.5.2., representamos gráficamente el contenido del cuadro de arriba. Las desigualdades

$$\begin{aligned} r_0v &< \text{mín}(r_0v + I\tau, r_0t) \leq \text{máx}(r_0v + I\tau, r_0t) < \\ &< r_0t + \frac{I\tau t}{\tau + at} < \text{mín}((r_0 + I)t, \frac{(t-\tau)(tr_0 + \tau I)}{at}) \leq \\ &\leq \text{máx}((r_0 + I)t, \frac{(t-\tau)(tr_0 + \tau I)}{at}) < \frac{(r_0 + I)(t-\tau)}{a}, \end{aligned}$$

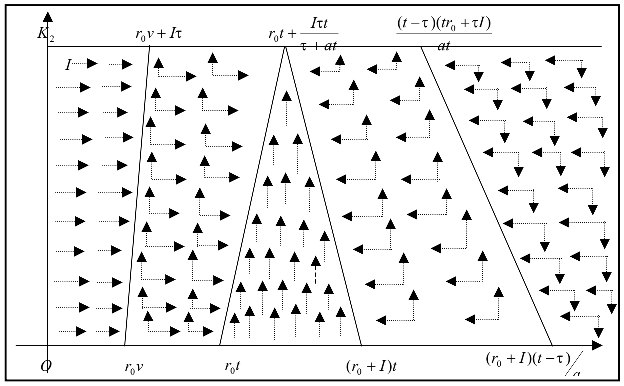

Figura 3.6.1

implícitas en la figura, se deducen a partir de las propiedades generales de las relaciones de orden, del hecho de que los parámetros involucrados son todos positivos y de que se ha postulado que $0 < a < 1$ y $v < t$.

3.6. La dinámica de la concurrencia y los equilibrios de segunda instancia. Una aproximación heurística.

En el parágrafo anterior, considerando un marco de segunda instancia *fijo* (y_0, K_2), nos hemos preguntado, en los diversos casos que se pueden dar, cómo son, de una parte, los ingresos que obtienen los trabajadores dependiendo de sus elecciones y, de la otra, las tasas de ganancias para los capitales.

Nos planteamos ahora nuevas cuestiones: ¿Cómo tiende a *cambiar localmente* el marco de segunda instancia (y_0, K_2)?¿Hacia dónde tiende *a la larga*? Intentaremos enseguida responder, en forma heurística, tales interrogantes.

Empecemos entonces por reunir, en la Figura 3.6.1., la información contenida en las dos figuras 3.5.1. y 3.5.2. del parágrafo precedente. Las flechas punteadas horizontales nos informan de las "tendencias" hacia el crecimiento o hacia el decrecimiento del valor y_0, es decir, de la cantidad de obreros que deciden alquilarse por un salario. Las flechas punteadas verticales tratan de expresar las "tendencias" hacia el crecimiento o hacia el decrecimiento del capital K_2 invertido en la técnica Υ_2.

Enseguida, dividamos la situación, dependiendo de la magnitud de la población, en tres casos esencialmente distintos entre ellos.

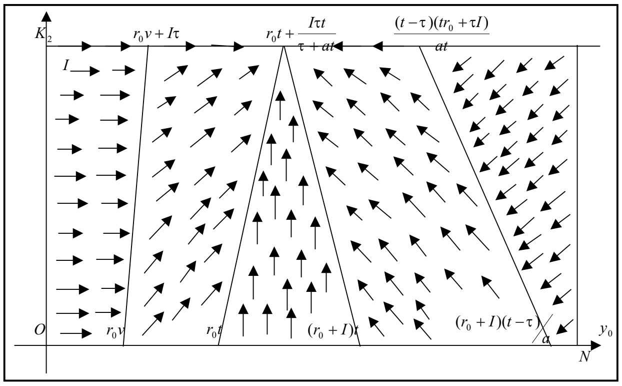

Figura 3.6.2

Caso I: $r_0 t + \frac{I\tau t}{\tau + at} < N$.

En este caso, la dinámica está representada en la Figura 3.6.2.

Existe un único *equilibrio de segunda instancia* (y_0^{**}, K_2^{**}) en donde

$$y_0^{**} = r_0 t + \frac{I\tau t}{\tau + at} \quad \text{y}$$
$$K_2^{**} = I$$

Tal equilibrio es, en cierto modo, “global y asintóticamente” estable.

En tal caso, una parte de los trabajadores no se ofrece al capital por un salario y tiende a trabajar por su cuenta para producir según la técnica Υ_1, es decir, del modo menos productivo. Tal parte de los trabajadores podría ser denominado un “ejército industrial de reserva” [8] y su magnitud queda dada por

$$N - y_0^{**} = N - (r_0 t + \frac{I\tau t}{\tau + at}).$$

El salario queda dado por

$$p_0^{**} = p_0^*(y_0^{**}, K_2^{**}) = \frac{1}{t}.$$

Es decir, en el equilibrio de segunda instancia, tanto los trabajadores que se ofrecen al capital como los que deciden trabajar por su cuenta ganan lo mismo.

Puesto que

$$1 > p_0^{**}\tau + a \Leftrightarrow v < t,$$

en el equilibrio de segunda instancia,

$$S_2(p_0^{**}) = \left\{ \frac{I}{p_0^{**}\tau + a} \right\}$$

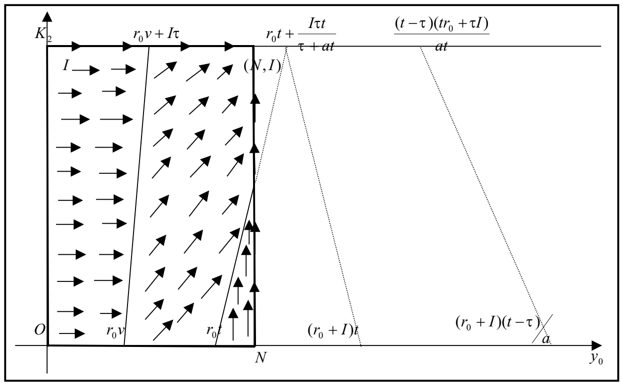

Figura 3.6.3

o, en otras palabras, aparte de que todo el capital se invierte en la técnica Υ_2, éste tiene solamente una opción óptima que se traduce en que todo él se emplea en la producción.

Finalmente, la tasa de ganancia está dada por

$$\Theta_2(y_0^{**}, K_2^{**}) = \frac{1 - (\tau p_0^{**} + a)}{\tau p_0^{**} + a} = \frac{(t-v)(1-a)}{\tau + at} > 0.$$

Caso II: $r_0v + I\tau \leq N \leq r_0t + \frac{I\tau t}{\tau + at}$.

En estas condiciones, la dinámica de segunda instancia está representada en la Figura 3.6.3.

Ahora, como en el Caso I, existe un único *equilibrio de segunda instancia* dado por

$$y_0^{**} = N$$
$$K_2^{**} = I.$$

Dicho equilibrio es también, en cierto modo, "global y asintóticamente estable".

Aparte de que, como en el caso anterior, todo el capital se invierte en la técnica más productiva, se tiene también que *hay pleno empleo*, a diferencia de lo que ocurre en el Caso I.

El salario queda dado por

$$p_0^*(y_0^{**}, K_2^{**}) = \frac{(r_0 + I)\tau - Na + \sqrt{((r_0 + I)\tau - Na)^2 + 4N\tau a r_0}}{2N\tau} > \frac{1}{t}.$$

Es decir, resulta mayor de lo que *obtendrían* los trabajadores si trabajaran por su cuenta.

La tasa de ganancia

$$\Theta_2(y_0^{**}, K_2^{**}) = \frac{1 - (\tau p_0^{**} + a)}{\tau p_0^{**} + a}$$

es positiva.

Caso III: $0 < N < r_0 v + I\tau$.

Uno de los dos subcasos que se presentan ahora (cuando $r_0 v < N$) se describe mediante la Figura 3.6.4.

Lo que resulta en el otro subcaso es parecido a lo que se tiene en el anterior.

En cualquier situación, se tiene un conjunto infinito de equilibrios (y_0^{**}, K_2^{**}) caracterizados por las condiciones:

$$y_0^{**} = N \quad \text{y}$$
$$K_2^{**} \in \left[\text{máx}(0, \frac{N - r_0 v}{\tau}), I\right].$$

En cierto sentido, el conjunto de equilibrios es también "global y asintóticamente estable".

El salario queda dado por

$$p_0^{**} = \text{máx}(\frac{1}{v}, \frac{r_0}{N}).$$

La tasa de ganancia en el equilibrio es nula.

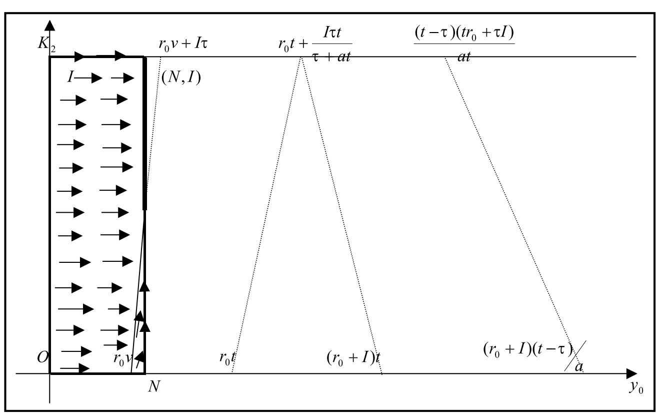

Figura 3.6.4

Como se ve, ante la relativa simplicidad de la situación, hemos desarrollado aquí un tratamiento que podría ser llamado "a pie" de las *dinámicas anidadas.* Sin embargo, quisiéramos señalar que pudimos haber actuado de otro modo, ateniéndonos a la teoría de los juegos de concurrencia con r tipos de jugadores que proyectamos exponer en un trabajo de próxima publicación.

Al establecerse $p_0^*(y_0, K_2)$, se determina un juego de concurrencia con 2 tipos de jugadores: los N trabajadores y los I capitales unitarios. Para los N trabajadores se tienen dos alternativas: la de ofrecerse en el mercado de trabajo y la de trabajar por cuenta propia. Para los capitales también hay dos alternativas: la de invertirse en la técnica Υ_1 y la de invertirse en la técnica Υ_2. Dependiendo de cómo concurren los dos tipos de jugadores a las diversas técnicas productivas existentes, los pagos quedan determinados si se asignan las cantidades:

$p_0^*(y_0, K_2)$ a un trabajador que decide ofrecerse en el mercado de trabajo;
$\frac{1}{t}$ a un trabajador que decida producir por su cuenta;

$\Theta_1(y_0, K_2)$ a un capital unitario que concurra a la técnica Υ_1 y, finalmente,
$\Theta_2(y_0, K_2)$ a un capital unitario que concurra a la técnica Υ_2.

Finalmente, los equilibrios de tal juego de concurrencia corresponden precisamente a los llamados anteriormente *equilibrios de segunda instancia.*

Referencias

[1] Arrow, K.J. y Hahn, F.H., *General Competitive Analysis*, San Francisco, Holden Day, 1971

[2] Bernoulli, Daniel, "Exposición de una nueva teoría de la evaluación del riesgo", Julio Segura y Carlos Rodríguez Braun (Compiladores), La Economía en sus Textos, Madrid, Taurus, 1998

[3] Debreu, Gerard, *Theory of Value*, New York, Wiley, 1959

[4] Elster, Jon, *Tuercas y Tornillos. Una introducción a los conceptos básicos de las ciencias sociales*, Barcelona, Gedisa, 1989

[5] Hernández Castañeda, Sergio, "Acerca de la Simulación Matemática de algunos procesos económicos a corto plazo. Bases para la teoría de la reproducción económica", Aportaciones Matemáticas,

XXVI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, México, 1994

[6] Intriligator, *Optimización Matemática y Teoría Económica*, Madrid, Prentice Hall Internacional, 1973

[7] Marx, Karl, "Salario, Precio y Ganancia", Marx y Engels, Obras Escogidas en dos tomos, Moscú, Ediciones en Lenguas Extranjeras, 1955

[8] Marx, Karl, *El Capital. Crítica de la Economía Política* (tres tomos en ocho volúmenes), México, Siglo Veintiuno Editores, 1979

[9] Mill, John Stuart, *Principios de Economía Política*, México, Fondo de Cultura Económica, 1951

[10] Nash, John F., "Equilibrium Points in n-Person Games", PNAS 36, 1950

[11] Nash, John F., "Non-Cooperative Games", Annals of Mathematics Journal 54, 1951

[12] Ricardo, David, *Principios de Economía Política y Tributación*, México, Fondo de Cultura Económica, 1959

[13] Ricardo, David, "Un Ensayo sobre la influencia de los bajos precios del grano sobre las ganancias del capital", Obras de David Ricardo, Tomo IV, México, Fondo de Cultura Económica, 1960

[14] Roemer, John E., *Valor, Explotación y Clase*, México, Fondo de Cultura Económica, 1989

[15] Takayama, Akira, *Mathematical Economics*, Cambridge, Cambridge University Press, 1985

[16] von Neumann, John, "Un Modelo de Equilibrio Económico General", Julio Segura y Carlos Rodríguez Braun (Compiladores), La Economía en sus Textos, Madrid, Taurus, 1998

[17] von Neumann, John y Morgenstern, Oskar, *Theory of Games and Economic Behavior*, New York, John Wiley and Sons, 1944

[18] Walras, Leon, *Elementos de Economía Política Pura*, Madrid, Alianza Universidad, 1987