

DOI: <https://doi.org/10.47234/mm.7802>

# Técnicas espectrales en la teoría de gráficas: una introducción a los valores propios de la matriz de adyacencia

Octavio Zapata  
Instituto de Matemáticas,  
Universidad Nacional Autónoma de México  
octavio@im.unam.mx

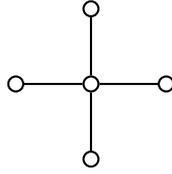
## 1. Introducción

La teoría espectral tiene una historia venerable y antigua dentro de la matemática moderna, véase por ejemplo [16]. Un elegante y útil resultado de esta área es el principio minimax de Courant–Fischer–Weyl, el cual proporciona una caracterización variacional de los valores propios de operadores auto-adjuntos compactos en espacios de Hilbert. En espacios de dimensión finita, este resultado tiene como corolario una importante técnica de matrices, llamada *entrelazado* de valores propios. El propósito de este artículo, es exponer algunas aplicaciones del teorema de entrelazado de valores propios y técnicas similares en la teoría de gráficas. La idea es obtener cotas de parámetros y resultados de regularidad relacionados con la estructura de gráficas, en términos de los valores propios de la matriz de adyacencia.

Sea  $G$  una gráfica finita y supongamos que su conjunto de vértices  $V(G)$  es el conjunto de los primeros  $n$  enteros positivos  $\{1, \dots, n\}$ . La *matriz de adyacencia* de  $G$  se define como la matriz  $A = (a_{ij})$  de  $n \times n$  tal que  $a_{ij} = 1$  si el vértice  $i$  es adyacente al vértice  $j$ , y  $a_{ij} = 0$  en otro caso. El hecho de que  $A$  sea una matriz simétrica es consecuencia de que las aristas de  $G$  son parejas no ordenadas de vértices. Esto a su vez implica, en particular, que todos los valores propios de  $A$  son números reales. El *espectro* de  $A$  se define como la sucesión decreciente de todos los valores propios de  $A$ , en donde cada valor propio aparece repetido de acuerdo con su multiplicidad. Aunque los valores propios de otras matrices asociadas a una gráfica juegan un papel importante

---

*Palabras clave:* teoría espectral, matriz de adyacencia, gráficas fuertemente regulares, entrelazado de valores propios, número de independencia, número cromático, apareamientos perfectos.



**Figura 1.** Gráfica bipartita completa  $K_{1,4}$ .

en la teoría espectral de gráficas, en este artículo el *espectro* de una gráfica se define como el espectro de su matriz de adyacencia. Para aquellos lectores interesados en una visión más completa sobre la teoría espectral de gráficas, incluyendo el estudio de otros operadores como el laplaciano y la matriz de Seidel, se recomienda consultar [2, 3, 8, 10]. Para una introducción a la nomenclatura y notación básica de la teoría de gráficas, recomendamos el libro [11].

Como las matrices que son semejantes tienen el mismo espectro, los valores propios de  $A$  no dependen del orden que utilicemos para escribir los renglones y las columnas de  $A$ . En términos de gráficas, esto quiere decir que todas las gráficas que son isomorfas tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades. El recíproco de este resultado no es cierto y en la siguiente sección damos un contraejemplo. De hecho, para ciertas familias de gráficas, el espectro se ha utilizado durante muchos años para determinar de manera eficiente si dos gráficas son isomorfas o no (para ver un par de ejemplos, recomendamos [1, 6]).

Antes de pasar a estudiar algunas relaciones entre propiedades combinatorias de gráficas y propiedades algebraicas del espectro, veamos un ejemplo concreto del espectro de una gráfica. Supongamos que  $G$  es la gráfica bipartita completa  $K_{1,4}$  (véase la figura 1), y elijamos un ordenamiento del conjunto de vértices  $V(G)$  de tal forma que  $A$  pueda ser escrita como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como  $A$  tiene solo dos renglones independientes, entonces tenemos que 0 es un valor propio con multiplicidad 3. Para encontrar los otros dos valores propios de  $A$ , veamos qué pasa en un caso más general.

Podemos escribir la matriz de adyacencia de la gráfica bipartita completa  $K_{n,m}$  como la matriz dividida en bloques de la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & J \\ J^\top & 0 \end{bmatrix},$$

en donde  $J$  es la matriz de  $n \times m$  con todas las entradas iguales a 1. Como solo hay dos renglones independientes en esta matriz de bloques, entonces 0 es un valor propio con multiplicidad  $n + m - 2$ . Ahora observemos que cualquier vector propio de esta matriz debe ser constante en las partes de la partición inducida por los bloques: efectivamente, si

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix}$$

son dos vectores reales tales que

$$\begin{bmatrix} 0 & J \\ J^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

para algún número real  $\lambda$  distinto de 0, entonces tenemos que

$$\xi_i = \frac{1}{\lambda}(\eta_1 + \cdots + \eta_m) \quad \text{y} \quad \eta_j = \frac{1}{\lambda}(\xi_1 + \cdots + \xi_n)$$

para todo  $i = 1, \dots, n$  y  $j = 1, \dots, m$ . Esto implica que podemos escribir a los vectores  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \beta \\ \vdots \\ \beta \end{bmatrix},$$

en donde  $\alpha$  y  $\beta$  son números reales que satisfacen

$$\alpha = \frac{1}{\lambda}m\beta \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{\lambda}n\alpha.$$

Así,  $\lambda^2 = nm$  y los dos valores propios restantes de  $K_{n,m}$  son  $\pm\sqrt{nm}$ . De ahí que el espectro de  $K_{1,4}$  es  $-2, 0, 0, 0, 2$ .

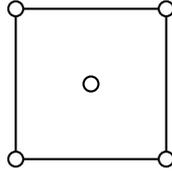
## 2. Propiedades determinadas por el espectro

Sea  $G$  una gráfica con  $n$  vértices y matriz de adyacencia  $A = (a_{ij})$ . Para cualquier entero positivo  $r$ , usamos  $(A^r)_{ij}$  para denotar la entrada  $(i, j)$  de la matriz  $A^r$ . Usando inducción sobre  $r$ , es fácil ver que  $(A^r)_{ij}$  es igual al número de caminos en  $G$  de longitud  $r$  del vértice  $i$  al vértice  $j$ . Efectivamente,

$$(A^1)_{ij} = a_{ij} = 1$$

si y solo si  $\{i, j\}$  es una arista de  $G$ , y esta arista es el único camino posible de longitud uno que inicia en  $i$  y termina en  $j$ . Además,

$$(A^{r+1})_{ij} = (A^r A)_{ij} = \sum_{h=1}^n (A^r)_{ih}(A)_{hj} = \sum_{h=1}^n (A^r)_{ih}a_{hj}$$



**Figura 2.** Gráfica  $K_1 \cup K_{2,2}$ .

cuenta cuantas formas posibles hay de extender un camino de longitud  $r$  que inicia en  $i$  y termina en  $h$ , agregando una arista entre  $h$  y  $j$ . Una consecuencia particular de esto es que  $(A^2)_{ii}$  es igual al número de aristas que contienen al vértice  $i$ . Como cada arista contiene dos vértices, tenemos que

$$|E(G)| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (A^2)_{ii} = \frac{1}{2} \text{tr}(A^2).$$

Si escribimos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  para denotar los valores propios (posiblemente repetidos) de  $A$ , como

$$\text{tr}(A^2) = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2,$$

entonces concluimos que el número de aristas está determinado por el espectro.

Si dos gráficas tienen el mismo espectro, entonces decimos que estas gráficas son *coespectrales*. Por ejemplo, consideremos la gráfica bipartita completa  $K_{2,2}$  que tiene valor propio 0 con multiplicidad 2, y cuyos otros dos valores propios son  $\pm 2$ . La gráfica completa  $K_1$  consta de un solo vértice sin aristas y su único valor propio es 0. Si usamos  $K_1 \cup K_{2,2}$  para denotar la *unión disjunta* de  $K_1$  y  $K_{2,2}$ , entonces el espectro de  $K_1 \cup K_{2,2}$  es  $-2, 0, 0, 0, 2$ , y por consiguiente  $K_{1,4}$  (véase la figura 1) y  $K_1 \cup K_{2,2}$  (véase la figura 2) tienen el mismo espectro.

Las gráficas  $K_{1,4}$  y  $K_1 \cup K_{2,2}$  son el ejemplo de gráficas coespectrales no isomorfas más pequeño que existe. Es decir, si  $G$  y  $H$  son gráficas no isomorfas con a lo más 4 vértices, entonces  $G$  y  $H$  no son coespectrales. La demostración de este hecho se puede realizar inspeccionando todos los casos posibles (véase por ejemplo [2, p. 17]). Como  $K_{1,4}$  es conexa y  $K_1 \cup K_{2,2}$  es disconexa, podemos concluir que la propiedad de ser una gráfica conexa no está determinada por el espectro. También vemos que  $K_{1,4}$  es un árbol y  $K_1 \cup K_{2,2}$  no es un árbol, de ahí que la propiedad de ser un árbol no está determinada por el espectro.

El *diámetro* de una gráfica se define como la distancia máxima entre cualesquiera dos vértices, y la distancia entre dos vértices es la longitud de la trayectoria más corta que los une. El número de valores propios distintos de la matriz de adyacencia nos da la siguiente cota superior

para el diámetro, siempre que la gráfica sea conexa y por consiguiente que su diámetro esté bien definido.

**Teorema 2.1** ([2]). *Sea  $G$  una gráfica conexa con matriz de adyacencia  $A$ . Si  $A$  tiene  $d + 1$  valores propios distintos, entonces el diámetro de  $G$  es a lo más  $d$ .*

*Demostración.* El teorema de Cayley–Hamilton dice que toda transformación lineal es anulada por su polinomio característico (véase por ejemplo [15, p. 109]). Por lo tanto, si escribimos  $I$  para la matriz identidad y  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_d$  para los  $d + 1$  valores propios distintos de  $A$ , entonces tenemos que  $(A - \theta_0 I)(A - \theta_1 I) \cdots (A - \theta_d I) = 0$ . Esto implica que podemos expresar a  $A^t$  como una combinación lineal de  $I, A, \dots, A^d$  para todo  $t > d$ . Procediendo por contradicción, supongamos que el diámetro de  $G$  es estrictamente mayor que  $d$ . Si suponemos que la distancia en  $G$  entre el vértice  $i$  y el vértice  $j$  es igual a  $t > d$ , entonces tenemos que  $(A^r)_{ij} = 0$  para todo  $r = 0, 1, \dots, t - 1$  y por consiguiente que  $(A^t)_{ij} > 0$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

El *grado* de un vértice en una gráfica se define como el número de vértices que son adyacentes a este. Una gráfica  $G$  es *regular* si todos sus vértices tienen el mismo grado. De manera equivalente,  $G$  es regular si y solo si su matriz de adyacencia  $A$  satisface la ecuación  $A\mathbf{1} = k\mathbf{1}$  para algún entero positivo  $k$ , en donde  $\mathbf{1}$  denota un vector con todas las coordenadas iguales a 1. En este caso, decimos que  $G$  es regular *de grado*  $k$ . Por lo tanto, el grado de una gráfica regular es un valor propio y  $\mathbf{1}$  es el vector propio correspondiente. El siguiente teorema es un resultado clásico de la teoría de matrices no negativas. Su demostración se puede consultar, por ejemplo, en [15]. Una consecuencia inmediata es que si  $G$  es conexa, regular de grado  $k$  y  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$  son los valores propios de  $A$ , entonces  $k = \lambda_1$  y además  $|\lambda_i| \leq k$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Decimos que una matriz  $A$  real de  $n \times n$  es *irreducible* si para todo  $i, j = 1, \dots, n$ , existe un entero positivo  $r$  tal que  $(A^r)_{ij} > 0$ . Toda gráfica conexa tiene matriz de adyacencia irreducible.

**Teorema 2.2** (Teorema de Perron–Frobenius [15]). *Sea  $A$  una matriz irreducible de  $n \times n$  con entradas no negativas. Entonces, existe un único real positivo  $\rho$  que satisface las siguientes propiedades:*

1. *Existe un vector real  $\mathbf{x}$  con entradas positivas tal que  $A\mathbf{x} = \rho\mathbf{x}$ .*
2. *La multiplicidad de  $\rho$  como valor propio de  $A$  es uno.*
3. *Para cada valor propio  $\lambda$  de  $A$ , se tiene que  $|\lambda| \leq \rho$ .*

Este resultado se puede usar para demostrar que la propiedad de ser bipartita está determinada por el espectro. Una condición suficiente y necesaria para que  $G$  sea bipartita es que el espectro de la matriz de adyacencia de  $G$  sea simétrico con respecto al 0. Es decir, que para

cada valor propio  $\lambda$  de  $G$ , también  $-\lambda$  sea valor propio con la misma multiplicidad (véase por ejemplo [2, prop. 3.4.1(i)]).

### 3. Gráficas fuertemente regulares

Una gráfica regular de grado  $k$  con  $n$  vértices es *fuertemente regular* si existen enteros  $a$  y  $c$  tales que cualesquiera dos vértices adyacentes tienen  $a$  vecinos en común, y cualesquiera dos vértices distintos y no adyacentes tienen  $c$  vecinos en común. Contando de dos formas distintas el número de aristas entre el conjunto de vértices adyacentes y el conjunto de vértices no adyacentes a un vértice dado, se puede demostrar que los parámetros  $(n, k, a, c)$  de una gráfica fuertemente regular satisfacen

$$(n - k - 1)c = k(k - a - 1).$$

Como  $3 = (6 - 2 - 1)1 \neq 2(2 - 0 - 1) = 2$ , entonces no puede existir una gráfica fuertemente regular con parámetros  $(6, 2, 0, 1)$ . El ciclo de longitud seis  $C_6$  es un ejemplo de una gráfica regular de grado 2 con 6 vértices que no es fuertemente regular.

El número de caminos cerrados de longitud 2 de un vértice a sí mismo es igual al número de aristas que lo contienen. El número de vecinos comunes de  $i$  y  $j$  es igual al número de caminos de longitud 2 entre  $i$  y  $j$ . La entrada  $(i, j)$  de la matriz  $A^2$  es igual al número de caminos de  $i$  a  $j$  de longitud 2 que hay en la gráfica con matriz de adyacencia  $A$ . En una gráfica fuertemente regular con parámetros  $(n, k, a, c)$  hay  $a$  caminos de longitud 2 entre vértices adyacentes, y  $c$  caminos de longitud 2 entre vértices no adyacentes. Entonces su matriz de adyacencia satisface

$$A^2 = kI + aA + c(J - I - A).$$

Si reordenamos la ecuación anterior, entonces tenemos que

$$A^2 - (a - c)A - (k - c)I = cJ.$$

Si multiplicamos ambos lados de esta ecuación por un vector propio de  $A$ , ortogonal a  $\mathbf{1}$  y con valor propio  $\theta$ , encontramos que  $\theta$  satisface la siguiente ecuación cuadrática:

$$\theta^2 - (a - c)\theta - (k - c) = 0.$$

Por lo tanto, solo hay dos valores propios de  $A$  distintos de  $k$  y estos son los ceros de la ecuación cuadrática anterior:

$$\frac{a - c \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4(k - c)}}{2}.$$

Entonces, una gráfica fuertemente regular que no sea la gráfica completa tiene tres valores propios distintos y solo uno de ellos es igual al grado,

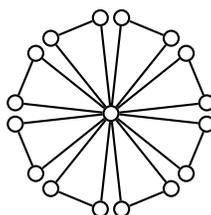


Figura 3. Gráfica de la amistad.

el cual tiene multiplicidad 1. Calcular las multiplicidades de los otros dos valores propios descarta muchas posibilidades para los parámetros  $(n, k, a, c)$  de una gráfica fuertemente regular. El siguiente resultado, usualmente llamado el «teorema de la amistad», dice que  $a = c = 1$  es imposible a menos de que la gráfica sea la gráfica completa  $K_3$ .

**Teorema 3.1** (Erdős, Rényi y Sós [9]). *Si  $G$  es una gráfica finita en la que cualesquiera dos vértices distintos tienen exactamente un vecino común, entonces existe un vértice de  $G$  que es adyacente a todos los demás vértices.*

*Demostración.* Una consecuencia directa de las hipótesis del teorema es que cualesquiera dos vértices distintos y no adyacentes de  $G$  tienen el mismo grado. Por lo tanto, cualquier contraejemplo al teorema debe ser una gráfica regular. Vamos a demostrar que la única gráfica regular en la que dos vértices distintos tienen un único vecino común es la gráfica completa  $K_3$ . Si  $G$  no es regular, entonces  $G$  debe ser una colección finita de gráficas isomorfas a  $K_3$  con un vértice identificado (véase por ejemplo la figura 3).

Sea  $G$  una gráfica fuertemente regular con parámetros  $(n, k, a, c)$ . Supongamos además que  $a = c = 1$ . Sean  $\theta$  y  $\tau$  los dos valores propios de  $G$  que son distintos de  $k$ . Para cualquier gráfica fuertemente regular, se tiene que  $\theta + \tau = a - c$  y  $\theta\tau = c - k$  (véase por ejemplo [2, p. 118]). Entonces  $\theta + \tau = 0$  y  $\theta\tau = 1 - k$ . Se sigue que  $\theta = -\tau$  y  $\theta^2 = k - 1$ . Ahora sean  $f$  y  $g$  las multiplicidades de  $\theta$  y  $\tau$ , respectivamente. Entonces la traza de la matriz de adyacencia de  $G$  es igual a  $k + f\theta + g\tau = 0$ , y por lo tanto

$$(f - g)^2 = \frac{k^2}{k - 1}.$$

Como

$$\frac{k^2}{k - 1} = k + 1 + \frac{1}{k - 1}$$

es un número entero, entonces tenemos que  $k = 2$ . Como los parámetros de cualquier gráfica fuertemente regular satisfacen  $(n - k - 1)c = k(k - a - 1)$ , en nuestro caso, esto implica que  $n = 3$  y, por consiguiente, que  $G$  es la gráfica completa  $K_3$ .  $\square$

## 4. Entrelazado

El siguiente teorema es un resultado clásico del álgebra lineal (véase por ejemplo [5, p. 17]). Aunque su demostración es elemental, decidimos omitir su presentación ya que esta no ilumina directamente ningún aspecto de la teoría de gráficas.

**Teorema 4.1.** *Sea  $A$  una matriz real simétrica de  $n \times n$  con valores propios  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Supongamos que  $S$  es una matriz de  $n \times m$  con  $m \leq n$  tal que  $S^\top S = I$ . Sea  $B$  la matriz simétrica de  $m \times m$  definida como  $B = S^\top A S$ . Si  $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_m$  son los valores propios de  $B$ , entonces*

$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{n-m+i},$$

para todo  $i = 1, \dots, m$ .

Presentamos a continuación dos importantes corolarios del teorema 4.1. Más adelante, en las siguientes tres secciones, damos algunas aplicaciones de estas herramientas en la teoría de gráficas, manteniendo el espíritu combinatorio del resto del artículo.

**Teorema 4.2** (Teorema de entrelazado de Cauchy [2]). *Sea  $A$  una matriz real simétrica de  $n \times n$  con valores propios  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$  y sea  $B$  una submatriz principal de  $A$  de  $m \times m$  con valores propios  $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_m$ . Entonces, tenemos que*

$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{n-m+i}$$

para todo  $i = 1, \dots, m$ . Por ejemplo, si  $m = n - 1$ , entonces tenemos

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n.$$

*Demostración.* Supongamos que la matriz  $S$  es de la forma

$$S = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde  $I$  es la matriz identidad de  $m \times m$ . De esta manera, una condición suficiente y necesaria para que  $B$  sea una submatriz principal de  $A$  es que  $B = S^\top A S$ . Así, usando el teorema 4.1, podemos inferir que los valores propios de  $B$  entrelazan a los valores propios de  $A$ .  $\square$

El siguiente resultado da la misma conclusión que el teorema de entrelazado de Cauchy. La única diferencia es que, en lugar de tomar una submatriz principal de  $A$ , definimos  $B$  tomando una partición de los renglones y las columnas de  $A$ .

**Teorema 4.3** (Técnica generalizada de Higman–Sims [12]). *Sea  $A$  una matriz real simétrica de  $n \times n$  con valores propios  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ .*

Supongamos que los renglones y las columnas de  $A$  se dividen en bloques de tal manera que

$$A = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & \cdots & C_{mm} \end{bmatrix}$$

con  $C_{ij} = C_{ji}^\top$  para todo  $i, j = 1, \dots, m \leq n$ . Sea  $B$  la matriz simétrica de  $m \times m$  cuya entrada  $(i, j)$  es igual a la suma promedio de los renglones de  $C_{ij}$ . Si  $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_m$  son los valores propios de  $B$ , entonces

$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{n-m+i},$$

para todo  $i = 1, \dots, m$ .

*Demostración.* Sea  $\mathbf{x} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  un vector en  $\{0, 1\}^n$  y sea  $X$  un subconjunto del conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Decimos que  $\mathbf{x}$  es el vector característico de  $X$  si  $X = \{i : \xi_i = 1\}$ . Ahora supongamos que los renglones y las columnas de  $A$  se dividen en bloques tal como en el enunciado del teorema. Entonces tenemos una partición de  $\{1, \dots, n\}$  inducida por los bloques diagonales  $C_{11}, \dots, C_{mm}$ . Sean  $X_1, \dots, X_m$  los subconjuntos de  $\{1, \dots, n\}$  que conforman dicha partición, y sean  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$  los vectores característicos de  $X_1, \dots, X_m$ , respectivamente. Escribimos  $\tilde{S}$  para denotar a la matriz de  $n \times m$  cuya  $j$ -ésima columna es el vector  $\mathbf{x}_j$  para todo  $j = 1, \dots, m$ . Como permutar los renglones y las columnas de una matriz no cambia sus valores propios, podemos asumir sin pérdida de generalidad que

$$\tilde{S}^\top = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Si definimos  $D = \tilde{S}^\top \tilde{S}$ , entonces  $D$  es una matriz diagonal de  $m \times m$  cuyas entradas diagonales son todas positivas. De ahí se sigue que  $D$  es invertible y que la matriz  $S$  de  $n \times m$  definida como  $S = \tilde{S}D^{-1/2}$  está bien definida.

Podemos ver que  $S$  cumple con las hipótesis del teorema 4.1, ya que

$$S^\top S = D^{-1/2} \tilde{S}^\top \tilde{S} D^{-1/2} = D^{-1/2} D D^{-1/2} = D D^{-1/2} D^{-1/2} = I,$$

donde la primer igualdad se sigue de la definición de  $S$  y de la regla para transponer un producto, la segunda de la definición de  $D$ , la tercera del hecho de que cualesquiera dos matrices diagonales conmutan, y la cuarta de la definición de la matriz identidad  $I$ .

Finalmente, sea  $B$  la matriz de  $m \times m$  definida como  $B = S^\top AS$ . Por el teorema 4.1, los valores propios de  $B$  entrelazan a los valores propios de  $A$ . Observemos que  $B$  satisface

$$B = S^\top AS = D^{-1/2} \tilde{S}^\top A \tilde{S} D^{-1/2}$$

donde la primer igualdad es la definición de  $B$ , y la segunda se sigue de la definición de  $S$  y de la regla para transponer un producto. Notemos que la entrada  $(i, j)$  de la matriz  $\tilde{S}^\top A \tilde{S}$  es igual a la suma de todas las entradas de  $C_{ij}$ . Como la entrada  $(i, i)$  de la matriz diagonal  $D$  es el número de vértices que pertenecen al subconjunto  $X_i$ , entonces la entrada  $(i, j)$  de la matriz  $C = D^{-1} \tilde{S}^\top A \tilde{S}$  es la suma promedio de los renglones de  $C_{ij}$ . Pero  $B$  y  $C$  son semejantes ya que  $D^{-1/2} B D^{1/2} = C$  y, por consiguiente, tienen el mismo espectro.  $\square$

## 5. Número de independencia

En esta sección iniciamos a explorar algunas aplicaciones de la técnica de entrelazado descrita en la sección anterior. Un *conjunto independiente* en una gráfica se define como un subconjunto de vértices que no son adyacentes dos a dos. La cardinalidad del conjunto independiente más grande de una gráfica  $G$  se llama el *número de independencia* de  $G$  y se denota por  $\alpha(G)$ .

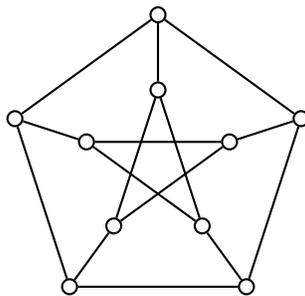
**Teorema 5.1** (Cota de inercia [7]). *Si  $G$  es una gráfica con  $n$  vértices y valores propios  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ , entonces  $\alpha(G) \leq |\{i : \lambda_i \geq 0\}|$  y  $\alpha(G) \leq |\{i : \lambda_i \leq 0\}|$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $A$  es la matriz de adyacencia de  $G$  y  $B$  es una submatriz principal nula de  $A$  que representa un conjunto independiente de  $G$ . Por el teorema 4.2, tenemos que  $\lambda_m \geq \mu_m = 0$  y  $\lambda_{n-m+1} \leq \mu_1 = 0$ . Así, los primeros  $m$  valores propios de  $A$  no son negativos y los últimos  $m$  valores propios de  $A$  no son positivos. Por lo tanto,  $\alpha(G)$  es a lo más el número de valores propios no negativos y a lo más el número de valores propios no positivos:

$$\alpha(G) \leq \min\{|\{i : \lambda_i \geq 0\}|, |\{i : \lambda_i \leq 0\}|\}. \quad \square$$

El siguiente teorema es un resultado importante que solo se cumple para gráficas regulares. Se conoce como la *cota de Hoffman* aunque a veces también se le dan otros nombres, como *cota de proporción* o *cota de razón* (véase por ejemplo [13]).

**Teorema 5.2** (Cota de Hoffman [12]). *Si  $G$  es una gráfica conexa, regular de grado  $k$ , con  $n$  vértices y valores propios  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ , entonces  $\alpha(G) \leq n \frac{-\lambda_n}{k - \lambda_n}$ .*



**Figura 4.** Gráfica de Petersen.

*Demostración.* Sea  $\alpha = \alpha(G)$  y supongamos que la matriz de adyacencia  $A$  de  $G$  se divide de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M^\top & N \end{bmatrix}$$

donde  $0$  es la matriz nula de  $\alpha \times \alpha$  que representa un conjunto independiente máximo de  $G$ . Tomando la suma promedio de los renglones de los bloques de  $A$ , definimos la matriz  $B$  como

$$B = \begin{bmatrix} 0 & k \\ \frac{k\alpha}{n-\alpha} & k - \frac{k\alpha}{n-\alpha} \end{bmatrix}.$$

Sabemos que  $\det(B) = \mu_1\mu_2 = -k\frac{k\alpha}{n-\alpha}$  y por el teorema 4.3, tenemos que  $\mu_1 \leq \lambda_1$  y  $-\mu_2 \leq \lambda_n$ . Como  $G$  es conexa, entonces  $k > 0$ . De ahí podemos inferir que

$$\frac{k^2\alpha}{n-\alpha} \leq -\lambda_1\lambda_n$$

y por lo tanto

$$\alpha \leq n \frac{-\lambda_1\lambda_n}{k^2 - \lambda_1\lambda_n}.$$

Como  $G$  es regular de grado  $k$ , entonces  $k = \lambda_1$  y por consiguiente

$$\alpha \leq n \frac{-\lambda_n}{k - \lambda_n}. \quad \square$$

Por ejemplo, supongamos que  $G$  es la gráfica de Petersen (véase la figura 4). En este caso,  $G$  es conexa, regular de grado 3 con 10 vértices y valores propios 3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2. Entonces, el número de independencia de la gráfica de Petersen no es más grande que 4:

$$\alpha(G) \leq 10 \frac{2}{3+2} = 4.$$

De hecho, la gráfica de Petersen es un ejemplo donde la cota de Hoffman es justa  $\alpha(G) = 4$ .

## 6. Número cromático

Una *coloración propia* de los vértices de una gráfica se define como una partición del conjunto de vértices en conjuntos independientes. Los distintos bloques que conforman tal partición (es decir, los conjuntos independientes de vértices) representan distintos colores. El mínimo número de colores en una coloración propia de una gráfica  $G$  se llama el *número cromático* de  $G$  y se denota por  $\chi(G)$ . Como cada conjunto independiente tiene a lo más  $\alpha(G)$  elementos, entonces tenemos que  $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$ . Así, toda cota superior para  $\alpha(G)$  nos da una cota inferior para  $\chi(G)$ . Por ejemplo, una consecuencia del teorema 5.2 es que si  $G$  es regular de grado  $k = \lambda_1 \geq \lambda_n$ , entonces

$$\chi(G) \geq 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}.$$

Sorprendentemente, este resultado se puede generalizar para gráficas no regulares usando entrelazado de valores propios.

**Teorema 6.1** (Desigualdad de Hoffman [14]). *Si  $G$  es una gráfica con al menos una arista,  $n$  vértices y valores propios  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ , entonces  $\chi(G) \geq 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}$ .*

*Demostración.* Como  $G$  tiene al menos una arista, entonces  $\lambda_i \neq 0$  para algún  $i = 1, \dots, n$ . Sea  $A$  la matriz de adyacencia de  $G$ . Como  $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ , entonces  $\lambda_n < 0$ .

Sea  $V(G) = \{1, \dots, n\}$  el conjunto de vértices de  $G$ . Supongamos que  $\mathbf{x} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  es un vector real tal que  $A\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}$ . Como  $\lambda_1$  es el valor propio más grande, entonces sabemos por el teorema de Perron–Frobenius (véase el teorema 2.2) que el vector propio  $\mathbf{x}$  puede tomarse positivo (es decir,  $\xi_i > 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ ).

Si escribimos  $m = \chi(G)$ , entonces existe una partición de  $V(G)$  en conjuntos independientes  $X_1, \dots, X_m$ . Si usamos  $n_i$  para denotar la cardinalidad de  $X_i$ , entonces  $n = \sum_{i=1}^m n_i$ . Como permutar los renglones y las columnas de  $A$  no cambia sus valores propios, podemos asumir sin pérdida de generalidad que los bloques de la partición de colores son de la forma

$$\begin{aligned} X_1 &= \{1, \dots, n_1\}, \\ X_2 &= \{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\}, \\ &\vdots \\ X_m &= \{\sum_{i=1}^{m-1} n_i + 1, \dots, \sum_{i=1}^{m-1} n_i + n_m\}. \end{aligned}$$

Si ahora escribimos  $\tilde{n} = \sum_{i=1}^{m-1} n_i$ , entonces podemos definir  $\tilde{S}$  como la matriz de  $n \times m$  tal que

$$\tilde{S}^\top = \begin{bmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_{n_1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \xi_{n_1+1} & \cdots & \xi_{n_1+n_2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \xi_{\tilde{n}+1} & \cdots & \xi_n \end{bmatrix}.$$

Por definición, tenemos que  $\tilde{S}\mathbf{1} = \mathbf{x}$ . Si definimos  $D = \tilde{S}^\top \tilde{S}$ , entonces  $D$  es una matriz diagonal de  $m \times m$  cuyas entradas diagonales son todas positivas (ya que el vector  $\mathbf{x}$  es positivo). De ahí se sigue que  $D$  es invertible y que la matriz  $S$  de  $n \times m$  definida como  $S = \tilde{S}D^{-1/2}$  está bien definida. Además, como  $D$  y  $D^{-1/2}$  conmutan, es claro que

$$S^\top S = D^{-1/2} \tilde{S}^\top \tilde{S} D^{-1/2} = D^{-1/2} D D^{-1/2} = D D^{-1/2} D^{-1/2} = I.$$

Si definimos  $B = S^\top A S$ , entonces  $B$  y  $D^{-1} \tilde{S}^\top A \tilde{S}$  son semejantes. Multiplicando la matriz  $D^{-1} \tilde{S}^\top A \tilde{S}$  por la derecha con el vector de puros unos  $\mathbf{1}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} D^{-1} \tilde{S}^\top A \tilde{S} \mathbf{1} &= D^{-1} \tilde{S}^\top A \mathbf{x} \\ &= \lambda_1 D^{-1} \tilde{S}^\top \mathbf{x} \\ &= \lambda_1 D^{-1} \tilde{S}^\top \tilde{S} \mathbf{1} \\ &= \lambda_1 D^{-1} D \mathbf{1} \\ &= \lambda_1 \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\lambda_1$  es un valor propio de  $D^{-1} \tilde{S}^\top A \tilde{S}$  y por consiguiente también es un valor propio de  $B$ .

Si usamos  $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_m$  para denotar los valores propios de  $B$ , entonces podemos concluir que  $\mu_1 = \lambda_1$ . Como  $X_1, \dots, X_m$  son conjuntos independientes, entonces los bloques en la diagonal de  $A$  son 0. De ahí que  $\text{tr}(B) = \mu_1 + \cdots + \mu_m = 0$ . Una consecuencia de esto y del entrelazado obtenido aplicando el teorema 4.1, es que

$$-\lambda_1 = \mu_2 + \cdots + \mu_m \geq \lambda_{n-m+2} + \cdots + \lambda_n \geq (m-1)\lambda_n.$$

Así, obtenemos  $m \geq 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}$  que es lo que se quería demostrar.  $\square$

Para ilustrar una aplicación de este teorema, consideremos la gráfica multipartita completa  $K_{4 \times 3}$ . Esta gráfica tiene  $4 \times 3 = 12$  vértices y se define dando una partición  $X_1, \dots, X_4$  de  $V(K_{4 \times 3})$  tal que cada  $X_i$  tiene cardinalidad 3; dos vértices de  $K_{4 \times 3}$  son adyacentes si y solo si pertenecen a partes distintas. El espectro de  $K_{4 \times 3}$  es

$$9, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -3, -3, -3$$

y por lo tanto

$$\chi(K_{4 \times 3}) \geq 1 + \frac{9}{3} = 4.$$

En este ejemplo la cota es justa ya que, por definición,  $\chi(K_{4 \times 3}) = 4$ .

## 7. Apareamientos perfectos

Un *apareamiento perfecto* en una gráfica se define como un subconjunto de aristas tal que cada vértice de la gráfica está contenido en exactamente una arista del subconjunto.

**Teorema 7.1** (Tutte [17]). *Una condición suficiente y necesaria para que una gráfica  $G$  no tenga un apareamiento perfecto es que exista un subconjunto posiblemente vacío  $S$  del conjunto de vértices  $V(G)$  tal que la subgráfica de  $G$  inducida por  $V(G) \setminus S$  tiene más de  $|S|$  componentes conexas de cardinalidad impar.*

Usando el teorema de Tutte y la técnica de entrelazado de valores propios, podemos dar una condición suficiente para que una gráfica tenga un apareamiento perfecto en términos del espectro.

**Teorema 7.2** ([4]). *Sea  $G$  una gráfica conexas, regular de grado  $k$ , con  $n$  vértices para algún  $n$  par y valores propios  $k = \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Si  $G$  no tiene un apareamiento perfecto, entonces  $\lambda_2 > k - 1$ .*

*Demostración.* Usando la condición dada por el teorema 7.1, sabemos que existe un subconjunto  $S$  de  $V(G)$  tal que la subgráfica de  $G$  inducida por  $V(G) \setminus S$  tiene  $q > |S|$  componentes conexas  $G_1, \dots, G_q$  de cardinalidad impar. Si escribimos  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ , para denotar el número de aristas en  $G$  entre  $S$  y  $G_i$ , entonces

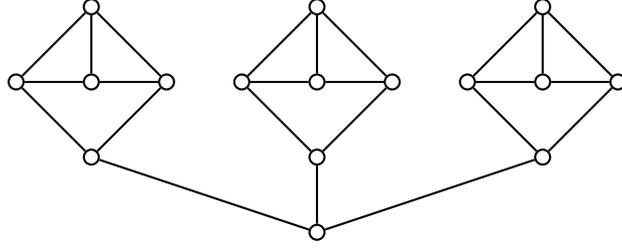
$$k(q - 1) \geq k|S| \geq \sum_{i=1}^q t_i.$$

Esto implica que existen al menos dos índices distintos  $i$  y  $j$  para los cuales  $t_i < k$  y  $t_j < k$ , pues si tuviéramos, por ejemplo, que  $t_1 < k$  y  $t_i \geq k$  para todo  $i = 2, \dots, q$ , entonces tendríamos

$$k|S| - t_1 \geq \sum_{i=2}^q t_i \geq k|S|,$$

pero  $t_1 \geq 1$  ya que  $G$  es conexas, lo cual es una contradicción. Así, supongamos que  $t_1 < k$  y  $t_2 < k$ . Para cada  $i = 1, \dots, q$ , sea  $n_i$  el número de vértices,  $e_i$  el número de aristas y  $\bar{k}_i$  es el grado promedio de  $G_i$ . Entonces, tenemos que

$$2e_1 = kn_1 - t_1 < n_1(n_1 - 1)$$



**Figura 5.** Gráfica 3-regular sin apareamiento perfecto.

y por consiguiente

$$\bar{k}_1 = k - \frac{t_1}{n_1}.$$

Como

$$n_1(n_1 - 1) > kn_1 - t_1 > kn_1 - k = k(n_1 - 1),$$

entonces  $n_1 > k$ . De ahí que  $\frac{t_1}{n_1} < 1$  y, por lo tanto, que  $\bar{k}_1 > k - 1$ . Un argumento similar muestra que  $\bar{k}_2 > k - 1$ . Finalmente, si definimos a  $B$  como la matriz diagonal

$$B = \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{k}_q \end{bmatrix},$$

entonces, por el teorema 4.3, tenemos que  $\bar{k}_1 \leq \lambda_1 = k$  y  $\bar{k}_2 \leq \lambda_2$ . Por lo tanto, tenemos  $k - 1 < \lambda_2$  que es lo que se quería demostrar.  $\square$

La figura 5 es un ejemplo de una gráfica regular de grado 3 con 16 vértices, sin apareamiento perfecto y, por lo tanto, con  $\lambda_2 > 3 - 1 = 2$ .

## Agradecimientos

Este trabajo fue desarrollado con el apoyo económico del SNI a través de la beca número 620178. Quiero agradecer particularmente a Eugenia O'Reilly por motivarme a escribir este artículo y por leer el manuscrito de la primer versión y hacer muchas sugerencias útiles, y a Aida Abiad por enseñarme mucho de lo que sé sobre espectros de gráficas. También estoy muy agradecido con los revisores del artículo; sus comentarios ayudaron a mejorar significativamente la versión final.

## Bibliografía

- [1] L. Babai, D. Y. Grigoryev y D. M. Mount, «Isomorphism of graphs with bounded eigenvalue multiplicity», en *Proceedings of the fourteenth annual ACM symposium on Theory of computing*, 1982, <https://doi.org/10.1145/800070.802206>, 310–324.
- [2] A. E. Brouwer y W. H. Haemers, *Spectra of graphs*, Springer Science & Business Media, 2011, <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1939-6>.
- [3] F. R. K. Chung, *Spectral graph theory*, vol. 92, American Mathematical Society, 1997, <https://doi.org/10.1090/cbms/092>.
- [4] S. M. Cioaba, «Perfect matchings, eigenvalues and expansion», *Mathematical Reports of the Academy of Sciences*, vol. 27, núm. 4, 2005, 101–104.
- [5] R. Courant y D. Hilbert, *Methoden der mathematischen physik, vol. i*, Springer, 1924, <https://doi.org/10.1007/978-3-642-96050-5>.
- [6] D. Cvetković, «Star partitions and the graph isomorphism problem», *Linear and Multilinear Algebra*, vol. 39, núm. 1-2, 1995, 109–132, <https://doi.org/10.1080/03081089508818383>.
- [7] D. M. Cvetković, «Graphs and their spectra», *Publikacije Elektrotehničkog fakulteta. Serija Matematika i fizika*, núm. 354–356, 1971, 1–50.
- [8] D. Cvetković, P. Rowlinson y S. Simić, *An introduction to the theory of graph spectra*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 75, Cambridge University Press, Cambridge, 2010, <https://doi.org/10.1017/CBO9780511801518>.
- [9] P. Erdős, A. Rényi y V. T. Sós, «On a problem of graph theory», *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, vol. 1, 1966, 215–235.
- [10] C. Godsil y G. Royle, *Algebraic graph theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 207, Springer-Verlag, New York, 2001, <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0163-9>.
- [11] D. A. González Moreno, *Introducción a la teoría de las gráficas*, México: UAM, Unidad Cuajimalpa, División de Ciencias Naturales e Ingeniería, 2017.
- [12] W. Haemers, «A generalization of the higham-sims technique», en *Proceedings Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen*, vol. 81, 1978, 445–447.
- [13] W. H. Haemers, «Hoffman’s ratio bound», *Linear Algebra and its Applications*, vol. 617, 2021, 215–219, <https://doi.org/10.1016/j.laa.2021.02.010>.
- [14] A. J. Hoffman, «On eigenvalues and colorings of graphs», en *Graph Theory and its Applications*, ed. B. Harris, Academic Press, New York, 1970, [https://doi.org/10.1142/9789812796936\\_0041](https://doi.org/10.1142/9789812796936_0041), 79–91.
- [15] R. A. Horn y C. R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 2012, <https://doi.org/10.1017/CBO9781139020411>.
- [16] C. Martínez, «Sobre el surgimiento del concepto de Valor Propio: una historia selecta sobre los orígenes de la Teoría Espectral», *Miscelánea Matemática*, núm. 43, 2006, 53–73.
- [17] W. T. Tutte, «The factorization of linear graphs», *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 1, núm. 2, 1947, 107–111, <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-22.2.107>.