MATRICES Y PROBABILIDAD

Fabián Hernández Arellano*

El objeto de este trabajo es mostrar cómo el Algebra Lineal juega un papel importante en el estudio de la probabilidad. El ejemplo que aquí se maneja no es de ninguna manera aislado, es un caso sencillo de cadenas de Markov. Las cadenas de Markov forman parte de los llamados Procesos Estadísticos cuyas aplicaciones son variadas. R. Bellman [1] menciona una apreciable bibliografía en cuanto a aplicaciones de la Mecánica Cuántica, Radiación Cósmica y a Procesos de Nacimiento y Fallecimiento. Lucio Pérez [4] menciona aplicaciones de cadenas de Markov a Biología, Física, Teoría de Colas, Difusión de Noticias y Mercadotecnia. El ejemplo aquí tratado fue sacado de [3]. Este trabajo fue sugerido y asesorado por Humberto Madrid.

Un estudiante afirma: "De los días que voy al colegio, unos voy en trolebús y otros en camión. Como resultado de mi experiencia, si un día cualquiera voy en trolebús, hay una probabilidad de $\frac{1}{5}$ de que vaya al día siguiente en trolebús, y $\frac{4}{5}$ es la probabilidad de que cambie y vaya en camión. Por otra parte, si en cualquier día voy en camión hay una probabilidad de $\frac{3}{5}$, de que vaya al día siguiente en camión, y $\frac{2}{5}$ de que cambie y vaya en trolebús".

¿Cuáles son las probabilidades de que el estudiante vaya en camión (trolebús), el n-ésimo día ($n = 3, 4, 5, \ldots$); dado que el primero fue en trolebús (camión)?

Para resolver este problema necesitamos de los siguientes hechos:

1) Si dos eventos A y B son mutuamente excluyentes entonces:
   $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$.
2) Si dos eventos A y B son independientes entonces:
   $P[A \cap B] = P[A]P[B] \qquad A \cap B = AB$
3) Si dos eventos A y B son independientes la probabilidad de A dado que ocurrió B, la cual se denota por $P[A/B]$, es igual a la probabilidad de A, es decir:
   $P[A/B] = P[A]$, si A y B son independientes.

* Alumno de 5o. semestre de la carrera de Actuario. Facultad de Ciencias, UNAM.

Nota: Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes, si ocurre A o B, pero no los dos al mismo tiempo; y son independientes si el hecho de que ocurra A (B), no incluye en la ocurrencia de B (A). $A \cup B$ es el evento que denota la ocurrencia ce al menos uno de los dos eventos A y B; y $A \cap B$ es el cuento que denota la ocurrencia de A y B.

Con esto ya podemos contestar las preguntas.

Para $n = 3$. Si el primer día fue en trolebús (T_1), el segundo día pudo ir en trolebús (T_2) o en camión (C_2) y el tercero en trolebús (T_3).

Entonces P_n la probabilidad de que el estudian t e viaje en trolebús al tercer día, dado que lo hizo en trolebús el primero es: de acuerdo con 3)

$$P_{11}=P[T_3/T_1]$$

$$P_{11}=P[T_2\ T_3 \text{ o } C_2\ T_3/T_1].$$

Como o viaja en camión o en trolebús, pero no en los dos al mismo tiempo; por 1)

$$P_{11}=P[T_3/T_1]=P[T_2\ T_3/T_1]+P[C_2\ T_3/T_1] \qquad \text{(i)}$$

Examinemos cualquiera de los sumandos, por ejemplo $P[T_2\ T_3/T_1]$ que es la probabilidad de viajar el segundo y tercer días en trolebús dado que el primero viajó en trolebús.

El hecho de que el segundo día haya viajado en trolebús no influye, en que el tercer día viaje en trolebús; es decir, T_2 y T_3 son independientes, porque: Supongamos que T_2 y T_3 no son independientes entonces T_1 y T_2 tampoco serían independientes luego: $P[T_2/T_1] \neq P[T_3/T_2]$, pero esto contradice el hecho de que la probabilidad de viajar un día cualquiera en trolebús dado que el anterior viajó en trolebús es $\frac{1}{5}$, es decir, es constante. Se tendría:

$\frac{1}{5} = P[T_2/T_1] \neq P[T_3/T_2] = \frac{1}{5}$, luego T_2 y T_3 son independientes.

Pero si T_2 y T_3 son independientes tenemos:

$$P[T_2\ T_3/T_1]=P[T_2/T_1]\,P[T_3/T_2].$$

Con el mismo razonamiento se ve que C_2 y T_3 son independientes; entonces:

$$P[C_2 T_3/T_1]=P[C_2/T_1]\,P[T_3/C_2]$$

luego: $P_{11}=P[T_3/T_1]=P[T_2/T_1]P[T_3/T_2]+P[C_2/T_1]P[T_3/C_2]$ (ii)

Como ya se vio; T_k es independiente de: T_{k-1}, T_{k-1}, C_k, C_{k-1}, C_{k-1} para $k = 2, 3, \ldots$; entonces podemos quitar los subíndices; con esto:

$$P_{11}=P[T/T]\,P[T/T]+P[C/T]\,P[T/C] \qquad \text{(iii)}$$

$$P_{11}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5}.$$

Sea P_{12}=Probabilidad de que el estudiante viaje en camión el tercer día (C_3) dado que el primero viajó en trolebús (T_1)

por (i) $\quad P_{12}=P[C_3/T_1]=P[T_2C_3/T_1]+P[C_2C_3/T_1].$

por (ii) $\quad P_{12}=P[T_2/T_1]P[C_3/T_2]+P[C_2/T_1]P[C_3/C_2]$.

por (iii) $\quad P_{12}=P[T/T]P[C/T]+P[C/T]P[C/C]$.

$$P_{12}=\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}$$

Sea P_{21} = Probabilidad de que el estudiante viaje en trolebús el tercer día (T_3) dado que el primero viajó en camión (C_1). Entonces:

$$P_{21}=P[T_3/C_1]=P[T_2T_3/C_1]+P[C_2T_3/C_1]$$
$$P_{21}=P[T_2/C_1]P[T_3/T_2]+P[C_2/C_1]P[T_3/C_2]$$
$$P_{21}=P[T/C]P[T/T]+P[C/C]P[T/C]$$
$$P_{21}=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}$$

Sea P_{22} = Probabilidad de que el estudiante viaje en camión el tercer día, dado que el primero viajó en camión.

$$P_{22}=P[C_3/C_1]=P[T/C]P[C/T]+P[C/C]P[C/C]$$
$$P_{22}=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}$$

Podemos resumir la información de la siguiente manera:

Tabla 1.

(primer día)	T	C (segundo día)
T	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
C	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

dónde esta tabla se lee de la siguiente manera: la T representa trolebús, C representa camión, los números son probabilidades, por ejemplo: $\frac{4}{5}$ es la probabilidad de que el estudiante viaje en camión el segundo día dado, que el primero lo hizo en trolebús.

TABLA 2.

	T	C (tercer día)
T	$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5}=0.36$	$\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=0.64$
C	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=0.32$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=0.68$

Esta tabla se lee como la anterior; por ejemplo: 0.68 = Probabilidad de que el estudiante viaje el día tercero en camión, dado que el primero lo hizo en camión, es decir, $0.68 = P_{22}$; las demás $0.64 = P_{12}$, $0.36 = P_{11}$ $0.32 = P_{21}$.

Nótese que las tablas 1 y 2 son arreglos de 4 números, lo mismo que una matriz de dos renglones y dos columnas, así que podríamos pensarlas como matrices. La TABLA 3 sería:

$$\begin{array}{c|l}
 & \text{T} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{(cuarto día)} \\
\hline
\text{T} & (\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5})\frac{1}{5}+(\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5})\frac{2}{5}=0.328 \\
\text{C} & (\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5})\frac{2}{5}+(\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5})\frac{2}{5}=0.336
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|l}
 & \text{C (cuarto día)} \\
\hline
\text{T} & (\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5})\frac{4}{5}+(\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5})\frac{3}{5}=0.672 \\
\text{C} & (\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5})\frac{4}{5}+(\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5})\frac{3}{5}=0.664
\end{array}$$

(Primer día)

Que se lee igual a las dos anteriores.

Como se observa cada vez es más complicado calcular las probabilidades, como ejemplo de esto, en la cuarta tabla la primera casilla, superior izquierda es:

$$[(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5})\frac{1}{5}+(\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5})\frac{2}{5}]\frac{1}{5}+$$
$$+[(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5})\frac{4}{5}+(\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5})\frac{3}{5}]\ \frac{2}{5}$$

la cual es ya complicadísima; esto nos indica que a la vigésima tabla esto va a ser casi imposible de escribir. Veremos cómo usando matrices resolveremos el problema.

Para no tener que calcular las tablas como veníamos haciendo, busquemos si existe alguna relación entre la tabla 1 y la tabla 2.

$$\begin{array}{c|cc}
 & \text{T} & \text{T (segundo día)} \\
\hline
 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\
\text{C} & \frac{2}{5} & \frac{3}{4}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cc}
 & \text{T} & \text{C (tercer día)} \\
\hline
\text{T} & \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} \\
\text{C} & \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} & \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}
\end{array}$$

primer día   primer día

Como ya se mencionó, se podían pensar estas tablas como matrices; entonces si recordamos cómo se multiplican matrices vemos que si hacemos:

$$\begin{array}{c|cc} & T & C \\ \hline T & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ C & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = M$$

Vemos que la tabla dos es M^2, en efecto tenemos:

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\ \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} & \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{matrix} 0.36 & 0.64 \\ 0.32 & 0.68 \end{matrix}$$

la cual corresponde a la tabla dos pensada como matriz.

¿Será la tabla 3:M^3?

$$M^3 = M^2\, M = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.64 \\ 0.32 & 0.68 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.328 & 0.672 \\ 0.336 & 0.664 \end{pmatrix}$$

la cual corresponde a la tabla tres pensada como matriz.

Esto sugiere que la tabla n esté dada por M^n para $n = 2, 3, \ldots$ Supongamos que la tabla $(n-1)$ es M^{n-1}, los elementos de la tabla n son 4: $P[T_n/C_1]$, $P[T_n/T_1]$, $P[C_n/T_1]$, $P[C_n/C_1]$.

Consideremos uno de ellos por ejemplo: $P[T_n/C_1]$ esta probabilidad se calcula de la siguiente manera:

$$P[T_n/C_1] = P[T_{n-1}/C_1]\,P[T_n/T_{n-1}] + P[C_{n-1}/C_1]\,P[T_n/C_{n-1}]$$
$$P[T_n/C_1] = P[T_{n-1}/C_1]\,\tfrac{1}{5} + P[C_{n-1}/C_1]\,\tfrac{2}{5}$$

Este es el elemento a_{21} de la n-ésima tabla pensada como matriz. Sea A esa matriz, y consideremos la matriz correspondiente a la tabla $n-1$, multiplicada por M, esto es:

$$\begin{pmatrix} P[T_{n\text{-}1}/T_1] & P[C_{n\text{-}1}/T_1] \\ P[T_{n\text{-}1}/C_1] & P[C_{n\text{-}1}/C_1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

dónde $C_{21} = P[T_{n\text{-}1}/C_1]\frac{1}{5} + P[C_{n\text{-}1}/C_1]\frac{2}{5} = a_{21} = P[T_n/C_1]$.

De esta manera podríamos obtener a_{11}, a_{12} y a_{22}. Como por hipótesis la matriz representante de la tabla (n-1) es $M^{n\text{-}1}$, de lo anterior vemos que la matriz representante de la tabla n es M^n; para $n = 2, 3, \ldots$

Ahora ya sabemos como calcular las probabilidades pedidas, pero para obtenerlas numéricamente no es fácil, ya que hay que obtener las potencias de M. Sin embargo, si una matriz es de esta forma:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = D$$

entonces $D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ porque:

$$D^n = D^{n\text{-}1}\, D = \begin{pmatrix} a^{n\text{-}1} & 0 \\ 0 & b^{n\text{-}1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix} \text{ para } n = 1, 2 \ldots$$

D se dice que es diagonal.

Imaginemos que pudiéramos transformar a M en UNU^{-1} con U y N matrices de dos renglones y dos columnas, con sus elementos números reales, U con inversa y N una matriz diagonal. Esto nos serviría ya que si

$M = UNU^{-1}$ entonces

$$M^2 = M\,M = (UNU^{-1})\,(UNU^{-1}) = UN(U^{-1}U)NU^{-1} = UN^2\, U^{-1}$$

y $\quad M^n = M^{n\text{-}1}\, M = (UN^{n\text{-}1}U^{-1})\,(UNU^{-1}) = UN^nU^{-1}$

Como N sería diagonal, los cálculos de M_n se facilitarían mucho. El Algebra Lineal [2] nos dice cuando una matriz M se puede transformar en una de la forma UNU^{-1}.

Si la matriz tiene dos valores propios distintos entonces, podremos hacer la transformación, así que calcularemos los valores propios de M.

$$|M - It| = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} - t & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} - t \end{vmatrix} = (5t + 1)\,(t - 1) = 0$$

de donde obtenemos 2 soluciones $t_1 = -\frac{1}{5}$ y $t_2 = 1$, luego los valores propios son diferentes. Entonces

$$N = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dónde: $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es el vector propio correspondiente al valor propio $-\frac{1}{5}$, y $\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$ es el vector propio correspondiente al valor propio 1. Que fueron obtenidos al resolver:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Con esto obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{y}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}(-\frac{1}{5})^n + \frac{1}{3} & \frac{2}{3}(-\frac{1}{5})^n + \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}(-\frac{1}{5})^n + \frac{1}{3} & \frac{1}{3}(-\frac{1}{5})^n + \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.64 \\ 0.32 & 0.68 \end{pmatrix} M^3 = \begin{pmatrix} 0.328 & 0.664 \\ 0.336 & 0.672 \end{pmatrix} M^4 = \begin{pmatrix} 0.3344 & 0.6656 \\ 0.3328 & 0.6670 \end{pmatrix}$$

Hay que hacer notar que en M^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ la suma de las probabilidades de un renglón es uno, este hecho tiene un significado muy sencillo, ya que siempre ocurre, que el estudiante viaje en trolebús o en camión, es decir, la suma de las probabilidades, es la probabilidad de la unión de dos eventos, uno de los cuales siempre ocurre, entonces la probabilidad es uno. Este detalle es muy importante y nos sirve para verificar nuestros cálculos.

Por otro lado.

$$\lim_{n \to \infty} M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Lo cual significa que a largo plazo, la probabilidad de que el estudiante viaje en trolebús es $\frac{1}{3}$ no importando en qué haya viajado el primer día, y $\frac{2}{3}$ es la probabilidad que viaje en camión no importando en que haya viajado el primer día.

BIBLIOGRAFIA

1. R. BELLMAN. *Introducción al análisis matricial.* Reverté.
2. S. LANG. *Linear Algebra.* Addison Wesley.
3. G. MATTHEWS. *Matrices 2.* Edward Arnold.
4. L. PEREZ. *El problema de la estimación en una cadena finita de Markov.* Tesis profesional, UNAM, México, 1972.