

SUBVARIEDADES INVARIANTES EN EL  
PROBLEMA DEL CUERPO RIGIDO  
Por  
Ernesto A. Lacomba Zamora\*

1. INTRODUCCION

En este artículo estudiamos el movimiento de un cuerpo rígido sin fuerzas externas alrededor de un punto fijo, desde un punto de vista global. Es bien conocido [2] que este problema es equivalente al estudio de geodésicas en el grupo de rotaciones  $SO(3)$  con una métrica invariante. De hecho, es un sistema mecánico transitivo, y siendo en particular grupo de Lie, los resultados obtenidos por el autor [5] son decisivos para encontrar los parámetros  $\Sigma$ ,  $Im$  del estudio global.

Iacob [3, sec. 3] también estudió varios aspectos del problema, pero con métodos más especiales, y sin describir completamente la foliación del espacio fase por las variedades invariantes.

Primero daremos un repaso rápido del método clásico de Poincot que describe geométricamente el movimiento. Luego lo estudiaremos globalmente, siguiendo el programa de Smale [7]. Finalmente, haremos una descripción del sistema relacionando los dos métodos.

Parte de las secciones 4 y 5 de este trabajo aparecían como aplicación en la versión original de la tesis

---

\* Investigador del CIMAS

doctoral del autor. Aquí se completaron detalles y se relacionó con el método de Poincaré al preparar pláticas sobre el particular en el IMPA, la PUC (Río de Janeiro), y el CIMAS.

## 2. NOTAS Y PRELIMINARES

Consideremos el movimiento de un cuerpo rígido con un punto fijo, sin acción de fuerzas externas.

Supongamos que dicho punto fijo es el origen de  $\mathbb{R}^3$ . Consideremos una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$ , y sea  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$  otra base ortonormal con la misma orientación, fija al cuerpo y moviéndose con él.

Cualquier posición del cuerpo está definida por la matriz  $A$  que transforma la base  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , en la  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ . Por lo tanto, todas las posiciones posibles del cuerpo están descritas por el grupo de Lie  $M=SO(3)$  de rotaciones de  $\mathbb{R}^3$ .

En consecuencia,  $TM=SO(3) \times \mathbb{R}^3$  describe los estados del sistema. Dado  $(A, w) \in TM$ ,  $A$  representa la posición y  $w$  la velocidad angular instantánea del cuerpo, [6].

La energía (cinética) del sistema  $K:TM \rightarrow R$  está dada por el producto matricial  $K(A,w) = wADA^T w^T/2$ , donde  $D$  es una matrix simétrica  $3 \times 3$  que clásicamente se denomina matriz de inercia del cuerpo, cuando éste se encuentra en la posición definida por la identidad  $E \in S^0(3)$ .

Dicha fórmula se obtiene substituyendo  $v_i = w \times r_i$  en  $1/2 \sum m_i v_i \cdot v_i$  para el caso discreto (donde  $r_i, v_i \in R^3$  son posiciones y velocidades de las partículas), y pasando a una integral como límite en el caso de distribución continua de masa.

Supondremos que  $D$  es definida positiva, válido siempre que el cuerpo no esté contenido en una recta que pase por el punto fijo. Sin pérdida de generalidad podemos suponer más precisamente que

$$(1) D = \text{diag} (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \text{ donde } 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3.$$

La matriz de inercia variará con la posición del cuerpo puesto que está referida a los ejes fijos en el espacio, siendo fácil verificar que dicha matriz de inercia respecto a los ejes fijos cuando el cuerpo está en la posición definida por  $A \in S^0(3)$  es, precisamente  $ADA^T$ .

El momento angular del sistema  $J:TM \rightarrow R^3$  está definido por  $J(A,w) = wADA^T$ . Esto se obtiene de  $\sum m_i r_i \times v_i$  donde  $v_i = r_i \times w$ , y generalizando como arriba para el caso continuo.

La energía cinética  $K$  define una métrica Riemanniana en  $M$  en la forma usual. Por el principio de mínima acción, los movimientos de este sistema corresponden a geodésicas de la métrica Riemanniana. En coordenadas locales, las geodésicas se describen por medio de las ecuaciones de Lagrange para  $K$ , [1].

En el espacio fase  $TM$  tenemos definido el flujo geodésico (curvas velocidad de geodésicas), con su campo vectorial asociado  $X_K$  (ver [1]). Queremos describir precisamente este flujo y sus subconjuntos invariantes.

Por las leyes de conservación en Mecánica, es sabido que  $K$  y  $J$  son primeras integrales del movimiento. Es decir, ambas son constantes a lo largo de curvas integrales de  $X_K$ .

Definamos  $I:TM \rightarrow R \times R^3$  como  $I=(2K,J)$ , o sea

$$(2) \quad I(A,w) = (wADA^T w, wADA^T), \text{ para } (A,w) \in TM$$

Esta nueva función también será una primera integral y por lo tanto las  $I_{cp} = I^{-1}(c,p)$  para cada  $(c,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  serán subconjuntos invariantes bajo el flujo. Por el teorema de Sard [1], las  $I_{cp}$  son generalmente subvariedades de TM (posiblemente vacías).

En las secciones 4 y 5 del presente trabajo realizaremos el estudio de nuestro sistema mecánico desde el punto de vista global siguiendo el programa de Smale [7], el cual consiste de lo siguiente:

a) Estudiar la variación de la topología de las  $I_{cp}$  al cambiar el punto  $(c,p)$ . En particular la estructura del conjunto de bifurcación  $\Sigma$  y la imagen  $Im$ .

b) Encontrar el tipo topológico de las variedades integrales  $I_{cp}$  para cada  $(c,p)$ .

c) Estudiar los sistemas dinámicos más simples (retratos fase) en cada  $I_{cp}$ .

Donde  $Im = Im(I) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  es la imagen de la aplicación  $I$ , y  $\Sigma = \Sigma(I) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  es el conjunto de valores críticos de  $I$  en el sentido diferenciable. Este conjunto  $\Sigma$  contiene en nuestro caso particular todos los puntos  $(c,p)$  en cuya vecindad la topología de las  $I_{cp}$  cambia,

por lo cual es llamado conjunto de bifurcación (ver en [7] la definición general de conjunto de bifurcación, que puede ser distinto del de valores críticos).

Comenzaremos por un repaso de la descripción clásica del movimiento por Poincaré en la sección 3, para tratar de relacionarla con la información global del sistema en la última sección.

### 3. DESCRIPCIÓN GEOMÉTRICA DEL MOVIMIENTO

El movimiento del cuerpo rígido puede describirse geométricamente como sigue, de acuerdo con Poincaré:

Sean  $c \in \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{R}^3$  las constantes de energía y momento angular respectivamente, para un movimiento dado.

Entonces se satisfacen las siguientes ecuaciones a través del movimiento

$$(3) \quad c = \omega A D A^T \omega^T$$

$$(4) \quad p = \omega A D A^T.$$

De (4) deducimos que

$$(5) \quad |p|^2 = \omega A D^2 A^T \omega^T.$$

Supongamos por un momento que  $A=E$ , la identidad. Entonces vemos que (3) y (5) representan 2 elipsoides en  $R^3$ , si consideramos  $w \in R^3$  como variable:

$$(6) \quad \lambda_1^2 w_1^2 + \lambda_2^2 w_2^2 + \lambda_3^2 w_3^2 = |p|^2$$

$$(7) \quad \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \lambda_3 w_3^2 = c.$$

En el caso general  $A \neq E$ , simplemente debemos rotar ambos elipsoides por  $A$ , para tener (3) y (5). Por tanto, su posición relativa es la misma independientemente de  $A$ , así que comenzaremos por estudiar (6) y (7).

Fijos  $|p|$  y  $c$ , los valores posibles de  $w$  están dados por la intersección de (6) y (7). Si suponemos  $c$  fijo, dicha intersección será un par de curvas cerradas, y en casos excepcionales puntos, una curva, o 2 que se intersectan. Estas curvas se llaman polodésicas (trayectorias del eje de rotación), ver sección 6 del presente artículo, y MacMillan [6].

Es claro que al rotar (7) por  $A$  como se describió arriba, el dibujo de las polodésicas conservará su posición respecto al elipsoide. Supondremos que (7) y sus polodésicas se encuentran ancladas al cuerpo y se mueven con él.

La ecuación del plano tangente al elipsoide (3) en un punto  $w_0$  sobre él es

$$(w_0 ADA^T)w^T = c,$$

por lo que un vector normal es  $w_0 ADA^T = p$ , y su distancia al origen es  $c/|p|$ , ambos constantes del movimiento. Por consiguiente, este plano se conservará fijo a lo largo de un movimiento dado, razón por la cual se denomina plano invariable.

Si decimos que el cuerpo rígido se encuentra en el estado  $(A, w) \in TM$ , esto significa que el cuerpo, junto con el elipsoide (7) y sus polodésicas se llevan a la posición definida por  $A$ , mientras que su velocidad angular instantánea es  $w$ . Si  $p = w ADA^T$  y  $c = pw^T$  son respectivamente el momento angular y la energía en dicho estado, entonces de lo de arriba deducimos que el plano invariable será tangente a (3) en el punto  $w$  dado.

Por lo tanto, el movimiento de cuerpo rígido puede describirse como sigue: de la condición inicial  $(A_0, w_0) \in TM$  localice el plano invariable. Al transcurrir el tiempo, el elipsoide (junto con el cuerpo) rueda sin resbalar sobre el plano, y su punto de tangencia (velocidad

angular) se conserva siempre sobre la misma polodésica correspondiente a  $|p|^2$ . Es claro que el centro del elipsoide se conserva también fijo, dado que su distancia  $c/|p|$  al plano invariable es constante.

Para cada movimiento el punto de tangencia describe sobre el plano invariable una curva llamada herpolodésica. Todas las herpolodésicas correspondientes a una misma polodésica se obtienen rotando una de ellas en el plano invariable con respecto a la proyección ortogonal del centro de masa (centro común de los elipsoides), generando el total un anillo con centro en dicho punto.

#### 4. IMAGEN Y CONJUNTO DE BIFURCACION

En esta sección realizaremos para el cuerpo rígido la parte a) del programa de Smale, encontrando  $Im$  y el conjunto de bifurcación  $\Sigma$ .

Consideremos  $M=S0(3)$  como actuando en sí mismo mediante su producto de grupo. En una forma natural (ver [7], sec. 4) se induce una acción de  $S0(3)$  sobre  $TM=S0(3) \times R^3$ , definida como

$$(8) \quad B_* (A, w) = (BA, wB^T)$$

para  $B \in SO(3)$  y  $(A, w) \in TM$ . De (2) es fácil probar la siguiente propiedad de equivariancia.

$$(9) \quad I(B_*(A, w)) = (2K(A, w), J(A, w)B^T)$$

Por otro lado, puesto que la energía cinética es claramente cuadrática y el momento angular es lineal en  $w$ , se sigue también que

$$(10) \quad I(A, \lambda w) = (2\lambda^2 K(A, w), \lambda J(A, w)).$$

Observemos que el haz tangente  $TM$  puede generarse partiendo de la bola unitario  $S^0$  en  $T_{E^3}M$  (con respecto al producto interno definido por  $K$ ), también llamada elipsoide de inercia. Si aplicamos a  $S^0$  todos los productos posibles por escalares  $\lambda$  generaremos  $T_{E^3}M$ , y aplicando a éste todas las rotaciones  $B \in SO(3)$  de acuerdo con (8), nos produce  $TM$ .

De (9) y (10) vemos que se puede generar la imagen de  $I$  partiendo de  $I(S^0) \subset 1 \times R^3$  y definiendo

$$(11) \quad Im = \{(\lambda^2, \lambda p B^T) \in R \times R^3 \mid (1, p) \in I(S^0), \lambda \in R, B \in SO(3)\}.$$

Como  $I(E, w) = (wDw^T, wD)$ ,  $S^0$  estará definido por la ecuación

$$(12) \quad \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \lambda_3 w_3^2 = 1$$

en  $T_E M$ . Vemos que su imagen  $I(S^0)$  quedará definida por las ecuaciones  $c=1$ ,  $pD^{-1} p^T=1$ , si hacemos  $p=wD$ . De acuerdo con (11), la imagen total se puede obtener aplicando primero todas las posibles rotaciones a la componente  $p$  de los elementos  $(c, p) \in I(S^0)$ , y luego construyendo la parábola con vértice al origen y simétrica respecto a la recta  $R \times (0, 0, 0)$ , para cada punto del conjunto resultante. Esto último corresponde a aplicar los escalares  $\lambda$  en (11).

Es claro que al aplicar las rotaciones obtenemos el subconjunto de  $R \times R^3$  definido por  $c=1$ ,  $\lambda_1 \leq |p|^2 \leq \lambda_3$ . Finalmente, al aplicar los  $\lambda \in R$ , obtenemos

$$(11') \quad \text{Im} = \{ (c, p) \in R \times R^3 \mid c\lambda_1 \leq |p|^2 \leq c\lambda_3 \}.$$

Ahora vemos como obtener  $\Sigma$ . Al calcular la derivada  $DI$  aparecen propiedades análogas a (9) y (10), por lo cual  $\Sigma$  se puede generar como sigue (ver [5], sec. 3):  
Encontrar primero el conjunto  $\sigma^0$  de puntos críticos

de  $I$  contenidos en  $S^0$ , luego obtener  $I(\sigma^0) \subset I(S^0)$ , y construir

$$(13) \Sigma = \{ (\lambda^2, \lambda p B^T) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mid (1, p) \in I(\sigma^0), \lambda \in \mathbb{R}, B \in SO(3) \}.$$

El proceso es análogo al seguido para  $Im$ , sólo que  $\sigma^0$  debe calcularse aparte. Comencemos por este punto.

Por un conocido procedimiento debido a Arnold [2] (ver [5], teor. 3.7 y observaciones que le siguen), tenemos que  $\sigma^0$  puede definirse como sigue,

$$(14) \sigma^0 = \{ (E, w) \in TM \mid U(w, w) = 0, w D w^T = 1 \}.$$

Donde  $U: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una función lineal definida por la condición de que para todo  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$  se cumpla lo siguiente

$$(15) \quad 2 \langle U(x, y), z \rangle = \langle x, y \times z \rangle + \langle x \times z, y \rangle.$$

Aquí estamos identificando a  $T_E M$  con  $Ant(3)$ , matrices antisimétricas reales  $3 \times 3$  como álgebra de Lie de  $SO(3)$ . A su vez,  $\mathbb{R}^3$  con su producto vectorial  $\times$  representa a  $Ant(3)$ , de acuerdo con el isomorfismo  $\theta: \mathbb{R}^3 \rightarrow Ant(3)$  de álgebras de Lie, definido por

$$(16) \quad \theta(a)b = a \times b, \text{ para } a, b \in \mathbb{R}^3.$$

La notación  $\langle , \rangle$  representa producto interno definido por la matriz D (o sea, K restringida a  $T_E M$ ).

Hagamos  $x=y$  en (15), puesto que sólo necesitamos  $U(x,x)$ . Substituyendo  $\langle x,y \rangle = xDy^T$  para cualquier  $x,y \in R^3$ , y calculando los productos matriciales, obtenemos

$$\langle U(x,x), z \rangle = (\lambda_2 - \lambda_3) x_3 x_2 z_1 + (\lambda_3 - \lambda_1) x_1 x_3 z_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) x_1 x_2 z_3.$$

Como esto vale para cualquier  $w=x$ ,  $z \in R^3$ , deducimos que

$$(17) \quad U(w,w) = \left( \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_1} w_2 w_3, \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2} w_1 w_3, \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3} w_1 w_2 \right)$$

Para caracterizar el conjunto definido por  $U(w,w)=0$ , tenemos que considerar genéricamente los siguientes 3 casos, a los cuales nos referiremos varias veces en lo que sigue:

1) Si  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ , la ecuación  $U(w,w)=0$  es equivalente a  $w_2 w_3 = 0$ ,  $w_1 w_3 = 0$  y  $w_1 w_2 = 0$ . El conjunto correspondiente consiste de los 3 ejes coordenados.

2) Si  $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3$ , obtenemos las dos ecuaciones  $w_2 w_3 = 0$  y  $w_1 w_3 = 0$ . Esto da el plano  $w_3 = 0$ , junto con el eje  $w_3$ .

3) Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ , la ecuación  $U(w,w)=0$  es trivial, y el conjunto es todo  $R^3$ .

En cualquier caso, el conjunto  $U(w,w)=0$  es simplemente la unión de los subespacios propios de D.

Para obtener  $\sigma^0$  tenemos que introducir la segunda condición (12) de (14), lo cual es equivalente a intersectar el conjunto acabado de obtener con el elipsoide de inercia  $S^0$ . Dicha intersección será como sigue:

En el caso 1) consistirá de los 6 puntos extremos de los ejes principales,  $(\pm 1/\sqrt{\lambda_1}, 0, 0)$ ,  $(0, \pm 1/\sqrt{\lambda_2}, 0)$ ,  $(0, 0, \pm 1/\sqrt{\lambda_3})$ .

En el caso 2) constará de la circunferencia  $\lambda_1 (w_1^2 + w_2^2) = 1$ ,  $w_3 = 0$  y los 2 puntos  $(0, 0, \pm \sqrt{\lambda_3})$ .

En el caso 3) será la esfera completa  $S^0$ , cuya ecuación es  $\lambda_1 (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) = 1$ .

El resto del proceso se sigue como para  $\text{Im}(I)$ . El conjunto  $I(\sigma^0)$  estará definido por  $c=1$  y  $p=wD$  con  $w \in \sigma^0$ , o sea

En caso 1), consistirá de los 6 puntos  $(1, \pm\sqrt{\lambda_1}, 0, 0)$ ,  $(1, 0, \pm\sqrt{\lambda_2}, 0)$ ,  $(1, 0, 0, \pm\sqrt{\lambda_3})$ .

En caso 2), constará de la circunferencia  $c=1$ ,  $p_1^2+p_2^2=\lambda_1$ ,  $p_3=0$  y los 2 puntos  $(1, 0, 0, \pm\sqrt{\lambda_3})$ .

En caso 3), tenemos la esfera completa de dimensión 2, definida por  $c=1$ ,  $p_1^2+p_2^2+p_3^2=\lambda_1$ .

Siguiendo (13), aplicamos primero las rotaciones  $B \in SO(3)$  al segundo factor de  $R \times R^3$ , obteniendo las esferas de dimensión 2 con ecuaciones  $c=1$ ,  $p_1^2+p_2^2+p_3^2=\lambda_i$ , para  $i=1,2,3$ . Es claro que dos de ellas o todas pueden coincidir, de acuerdo con los 3 casos genéricos de arriba. Finalmente, aplicando las  $\lambda \in R$  también de acuerdo con (13), obtenemos

$$(13') \quad \Sigma = \{(c,p) \in R \times R^3 \mid c\lambda_i = |p|^2, i=1,2,3\}.$$

Este conjunto genéricamente consiste de 3 paraboloides tridimensionales de revolución en  $R^4$ , y la imagen (11') puede obtenerse intuitivamente al incluir el espacio entre ellos.

Iacob [3] obtuvo (13') por medio del potencial modificado, definido por Smale.

Nota.- El conjunto  $\sigma^0$  se puede obtener en una forma más elemental calculando la derivada DI para puntos en  $T_E^M$ :

La derivada puede interpretarse como llevando vectores velocidad de curvas en TM a vectores velocidad de sus curvas imágenes en  $R \times R^3$ .

Por otro lado,  $T_E^M$  se puede representar isomórficamente como  $R^3$  o como Ant (3) por (16), mientras que exponenciales de estas últimas generan curvas en  $S0(3)$  por la identidad (ver [4], sección 3). Tomemos la base ortogonal usual para el segundo factor de  $T(TM)=TS0(3) \times R^3$  y la base correspondiente en las antisimétricas bajo el isomorfismo de arriba. La matriz Jacobiana de  $DI(E,w)$  en esta base está dada por:

$$(18) \quad \begin{pmatrix} -2\Lambda b^T & \Lambda B \\ 2Dw & D \end{pmatrix}$$

donde

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_2 - \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{y } b^T = Bw^T = (w_2 w_3, w_1 w_3, w_1 w_2)^T$$

Es claro que (18) tiene por lo menos rango 3, ya que D es no singular. Multiplicando por -1 su primera columna de bloques, la segunda por  $2w^T$  a la derecha y sumando, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 4\Lambda b^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como  $2w^T$  es el único tal coeficiente que anula las últimas 3 componentes como arriba, se sigue que (18) tiene rango 4 si y sólo si  $4\Lambda b^T \neq 0$ . Equivalentemente,  $(E, w)$  es un punto crítico de I si y sólo si

$$\Lambda b^T = ((\lambda_2 - \lambda_3)w_2 w_3, (\lambda_3 - \lambda_1)w_1 w_3, (\lambda_1 - \lambda_2)w_1 w_2)^T = 0.$$

Comparando con (17), vemos que la ecuación  $\Lambda b^T = 0$  puede reemplazar a  $U(w, w) = 0$  en (14).

## 5. DINAMICA EN LAS VARIEDADES INVARIANTES

En esta sección estudiamos las partes b) y c) del programa de Smale para el cuerpo rígido, encontrando la topología de las  $I_{cp}$ , su variación con el

cociente  $\lambda = |p|^2/c$  y la dinámica del movimiento en cada  $I_{cp}$ .

Comparando dimensiones del dominio y contradominio de  $I$ , vemos que, cuando  $(c,p)$  es un valor regular en su imagen, entonces  $I_{cp}$  es una subvariedad de dimensión 2. Por un argumento conocido (ver [4], sección 4), debe ser un toro, o unión disjunta de toros.

De (9), (10), (11') y (13') es claro porqué la topología depende solamente de  $\lambda = |p|^2/c$ . Sin pérdida de generalidad describiremos sólo la situación para  $c=1$  y  $p \in R^+_q$ , donde  $q \in R^3$  es unitario.

El conjunto  $I^{-1}(1, R^+_q)$  tiene exactamente un punto sobre cada  $A \in S^0(3)$ , aquél que se obtiene intersectando el elipsoide  $wADA^T w = 1$  con el rayo  $R^+_q$ . Además  $I^{-1}(1, R^+_q)$  es una variedad, ya que puede expresarse como  $\Pi_2(I_0^{-1}(1, q))$ , donde  $I_0: R^+ \times TM \rightarrow R \times R^3$  es la función sin puntos críticos definida como

$$I_0(\lambda, A, w) = (2K(A, w), J(A, w)/\lambda),$$

y  $\Pi_2: R^+ \times TM \rightarrow TM$  es proyección en el segundo factor.

Concluimos que el conjunto en cuestión es topológicamente  $P^3 = S^0(3)$ .

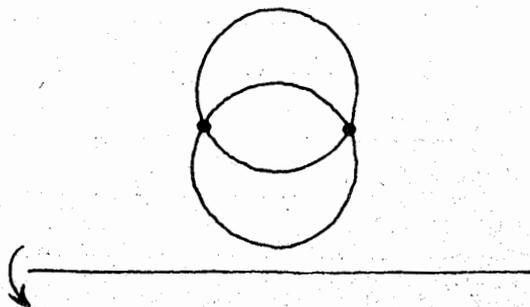
Describiremos cómo las  $I_{1p}$  llenan dicho conjunto para cada valor  $\lambda = |p|^2$ , con  $p \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  y  $I_{1p} \neq \emptyset$ . Consideraremos cada uno de los 3 casos genéricos como en la sección anterior. En cada caso tenemos que rotar el sector cerrado dado allí con respecto al eje indicado, y luego identificar puntos antípodas de la frontera de la bola cerrada resultante en  $\mathbb{R}^3$ , para obtener  $P^3$ . Después de la rotación e identificación, las curvas o puntos señalados generan la  $I_{1p}$  para  $\lambda = |p|^2$  dado:

1) Si  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ , tenemos tres tipos topológicos posibles para  $I_{1p}$ .

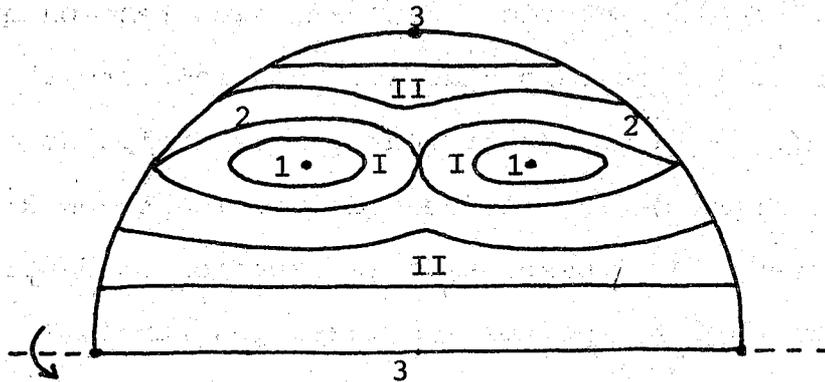
a) Si  $\lambda = \lambda_2$  o  $\lambda = \lambda_3$ , entonces  $I_{1p} = S^1 \times Z_2$ , donde  $Z_2$  es el espacio discreto con dos puntos.

b) Si  $\lambda_1 < \lambda_I < \lambda_2$  o  $\lambda_2 < \lambda_{II} < \lambda_3$ , tenemos valores regulares para  $I$  y entonces  $I_{1p} = T^2 \times Z_2$ .

c) Si  $\lambda = \lambda_2$ , entonces  $I_{1p} = Y$ , conjunto singular obtenido rotando la siguiente figura con respecto al eje dado:



La figura completa en  $P^3$  para este caso está dada por la siguiente figura, donde los números indican índices de  $\lambda_i$  como en la notación de arriba.



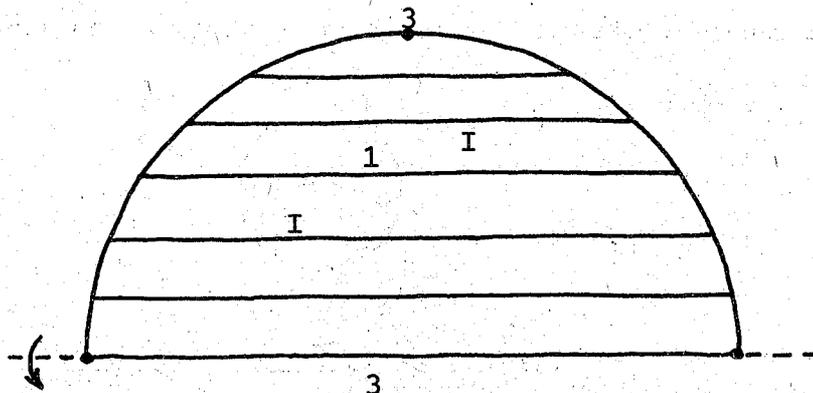
2) Si  $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3$ , tenemos los siguientes casos:

a) Si  $\lambda = \lambda_1$ , entonces  $I_{1p} = T^2$

b) Si  $\lambda_2 < \lambda_I < \lambda_3$ , tenemos valores regulares y  $I_{1p} = T^2 \times Z_2$ .

c) Si  $\lambda = \lambda_3$ , entonces  $I_{1p} = S^1 \times Z_2$ .

El diagrama completo se obtiene de la siguiente figura, como en el caso anterior



3) Sea  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ . Este es un caso trivial, donde  $I_{1p} = S^1$ , para  $\lambda = \lambda_1$ .

El flujo inducido en los  $I_{1p}$ , puede describirse como sigue:

En los toros correspondientes a valores regulares tenemos flujos de translación, así que las órbitas pueden ser densas o cerradas, de acuerdo con el valor del número de rotación (ver [3]). En el toro para el valor crítico  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$  en el caso 2, el número de rotación es cero, así que todas las órbitas son cerradas. Cuando  $I_{1p}$  consiste de uno o dos círculos, es claro que ellos mismos son órbitas.

Finalmente, los únicos puntos críticos en el conjunto singular  $Y$  para  $\lambda = \lambda_2$  en el caso 1) son los dos círculos singulares generados por los puntos en la figura, los cuales deben ser curvas integrales necesariamente. Las órbitas en el resto de  $Y$  son todas espirales que tienden hacia uno de los círculos singulares cuando  $t$  tiende a  $+\infty$ , y hacia el otro cuando  $t$  tiende a  $-\infty$ .

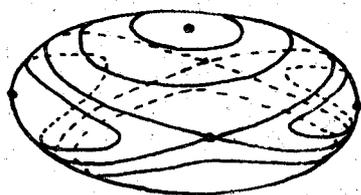
Es claro que el número de rotación de los toros regulares  $I_{cp}$  depende sólo del parámetro  $\lambda = |p|^2/c$  ( $\neq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ). Una conjetura razonable es que dicho número depende  $C^\infty$  en  $\lambda$ . Por otro lado, podemos considerar que cada paraboloides de  $\text{Im}(I)$  fuera de los de  $\Sigma(I)$  tiene asociado un número de rotación.

## 6. DESCRIPCION FINAL DEL MOVIMIENTO

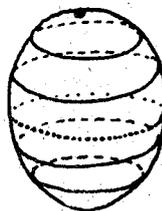
Para terminar, nos referiremos a la descripción geométrica de Poincaré en la sección 3 para interpretar el movimiento del cuerpo rígido, relacionándolo con la topología de las  $I_{cp}$ .

El elipsoide de inercia y las polodésicas se verán como sigue:

Caso 1



Caso 2



En estas figuras, casi todas las polodésicas consisten de una curva cerrada. Una de las excepciones consiste en 2 curvas cerradas que se intersectan en el caso 1 (para  $\lambda = \lambda_2$ ), lo cual se descompone en los 2 puntos

de intersección como polodésicas puntuales, y las 4 ramas restantes. La otra excepción consiste en el ecuador y los polos del caso 2 y los otros puntos extremos de semiejes principales en el caso 1, que consisten de polodésicas puntuales.

En el caso 3 la situación es muy simple, ya que el elipsoide es una esfera y las polodésicas son todos sus puntos.

En general, cuando hacemos rodar el elipsoide en el plano invariable sobre una polodésica fija, el resultado será: Simplemente rotación en uno u otro sentido alrededor del eje definido por polodésicas puntuales, verificando  $I_{cp} = S^1 \times Z_2$ .

Si se trata de una polodésica cerrada, cualquier posición inicial del elipsoide sobre dicha polodésica nos dará una herpolodésica periódica o cuasiperiódica sobre el plano invariable, y por la equivalencia (9) se genera un toro. Considerando rodamiento en sentido opuesto, confirmamos  $I_{cp} = T^2 \times Z_2$  aquí.

Para finalizar, cualquiera de las 4 ramas de la polodésica singular en el caso 1 nos genera herpolodésicas espirales. Esto corresponde obviamente a las órbitas

espirales descritas para las 4 componentes no singulares del conjunto Y.

No es difícil visualizar cómo de la forma de la herpolodésica se puede describir el movimiento real del elipsoide, y por lo tanto del cuerpo rígido.

REFERENCIAS

1. R. Abraham, Foundations of Mechanics. New York, Benjamin, 1967.
2. V.I. Arnold, Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie, Ann. de l'Inst. Fourier, Grenoble XVI (1966), 319-361.
3. A. Iacob, Invariant manifolds in the motion of a rigid body, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., XVI (1971), 1497-1521.
4. E.A. Lacomba, Ejemplos de sistemas mecánicos con simetría, Acta Mexicana Ci.Tecn., V (1971), 155-191.
5. E.A. Lacomba, Mechanical systems with symmetry on homogeneous spaces, Trans. Amer. Math. Soc., dec. 1973.
6. W.D. MacMillan, Dynamics of Rigid Bodies. New York, Dover, 1960.
7. S. Smale, Topology and mechanics I, Invent. Math., 10(1970), 305-331.