Miscelánea Matemática **70** (2020) 1-17 SMM
DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7001

$1+2+3+4+\dots$ es igual a $-\frac{1}{12}$

Josefina Álvarez
Department of Mathematics
New Mexico State University
Las Cruces, Nuevo México, EE. UU.
jalvarez@nmsu.edu
y
Martha Guzmán-Partida
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
Hermosillo, Sonora, México
martha@mat.uson.mx

1. Introducción

Joseph Polchinski (1954-2018), fue un físico teórico [18] ganador de muchos premios y miembro de numerosas sociedades científicas, tales como la Academia Nacional de Ciencias de los Estados Unidos. Fue un miembro permanente del Instituto Kavli de Física Teórica y Profesor de Física de la Universidad de California, en Santa Bárbara. A su fallecimiento, sus colegas lamentaron profundamente la pérdida de uno de los más respetados pensadores en el campo de la teoría de cuerdas (véase, por ejemplo, [8]). Las revistas Quanta Magazine y Scientific American, así como también Science News, la Sociedad Americana de Física y la Radio Pública Nacional de los Estados Unidos, coincidieron con las opiniones expresadas en el diario The New York Times [8].

El Profesor Polchinski fue autor de numerosos artículos, varios libros (véase, por ejemplo, [11]) y una autobiografía [10].

De hecho, la expresión

$$1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12} \tag{1}$$

aparece en [11, p. 22], volumen I: *An Introduction to the Bosonic String.*

Aunque esperamos que los párrafos anteriores hayan convencido al lector de los méritos científicos del Profesor Polchinski, realmente es difícil aceptar la validez de la expresión (1).

Palabras clave: Cesàro sumabilidad, Hölder sumabilidad, función zeta de Riemann.

En lo que sigue, discutiremos el significado y la exactitud de (1) y de otras identidades igualmente desconcertantes.

Con el objeto de tener una idea, posiblemente errónea, de lo que está ocurriendo, empecemos por «probar» la expresión (1) sin asomo de rigor o exactitud, o, parafraseando a Godfrey Harold Hardy ([6, p. 1]), «con una actitud completamente indulgente». Para tal efecto, seguiremos las ideas expresadas en [13], donde el periodista Brady Haran y los físicos Ed Copeland y Antonio Padilla, de la Universidad de Nottingham, en Inglaterra, alegremente «prueban» (1) en un vídeo que ya cuenta con más de seis millones de reproducciones.

Sean

$$A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots\ , \tag{2}$$

$$B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots\ , \tag{3}$$

y sea

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots, \tag{4}$$

la serie que nos interesa.

Como las sumas parciales de (2) forman la sucesión $\{1, 0, 1, \dots\}$, los personajes de [13] deciden que $A = \frac{1}{2}$, simplemente promediando 1 y 0. Gottfried Wilhem Leibniz, alrededor de 1710, ya había concluido que A debe de ser igual a $\frac{1}{2}$, usando un argumento probabilístico ([6, p. 13]). En realidad podemos llegar al mismo «resultado» por medio de la siguiente observación:

$$A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - (1 - 1 + 1 - \dots) = 1 - A, \tag{5}$$

de donde $A = \frac{1}{2}$.

En cuanto a B,

$$\begin{aligned} 2B &= (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots) + (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots) \\ &= (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots) + (0 + 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots) \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Así, $B = \frac{1}{4}$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} S - B &= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots - (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots) \\ &= 4 + 8 + 16 + \dots = 4S, \end{aligned} \tag{7}$$

o

$$S - \frac{1}{4} = 4S.$$

Esto es, $S = -\frac{1}{12}$.

Claramente, todo lo que hemos hecho constituye un abuso ejemplar del cálculo, puesto que las operaciones realizadas solamente son válidas cuando las series convergen.

Recordemos que una serie $\sum_{j\geq 1} a_j$ converge, o es convergente, si sus sumas parciales $\sum_{1\leq j\leq n} a_j$ tienden a un límite finito cuando el índice n tiende a infinito. En otras palabras, si existe un número a tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural N_ε de modo que

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j - a\right| < \varepsilon, \tag{8}$$

para todo $n \geq N_\varepsilon$. Cuando (8) no se cumple para algún número a, decimos que la serie diverge, o que es divergente.

Estas definiciones aparecen en el libro *Analyse Algébrique* de Augustin-Louis Cauchy, publicado en Paris en 1821. De acuerdo a ([16, p. 16]), la expresión «serie convergente» se debe a James Gregory, quien empezó a utilizarla en 1668. En cuanto a la expresión «serie divergente», la misma fuente consigna que esta fue acuñada por Nicolaus I Bernoulli en 1713.

Como no hay duda de que las series A, B y S son divergentes, es apropiado el preguntarnos, ¿qué hacer con ellas? y más generalmente, ¿qué hacer con una serie divergente?

Históricamente, podemos reconocer tres corrientes de pensamiento, las cuales discutiremos brevemente. Para obtener mucha más información sobre estos asuntos históricos, referimos al lector a ([6, caps. I y II]). De hecho, este libro será nuestra guía para mucho de lo que sigue. Este magnífico libro aún sigue siendo ampliamente utilizado y disfrutado, tanto por su contenido como por su prosa tan lúcida, escrita magistralmente por Hardy.

2. Rechácenlas

En una carta dirigida a Bernt Michael Holmboe, reimpresa en el volumen 2 de sus obras completas, Niels Henrik Abel expresa, en enero de 1826: «Las series divergentes son obra del diablo y es vergonzoso basar en ellas cualquier demostración» ([6], prólogo de John Edensor Littlewood). Abel fue un admirador apasionado de Cauchy, el gran rigorista de principios del siglo diecinueve. Así, en ese período de revisionismo y rigor, no hubo mucha tolerancia por las series divergentes.

En realidad, incluso Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz, quienes fueron los primeros en manipular series de manera sistemática, tuvieron poca inclinación a usar series divergentes, aunque Leibniz algunas veces trabajó con ellas ([6, p. 1]). Sin duda, y sin importar cuan descuidadamente fueran hechas las manipulaciones, los matemáticos siempre han tenido una idea bastante buena, aún en la época de Arquímedes, de si una serie es convergente o divergente. En realidad, los grandes maestros parecen intuir si sus manipulaciones son «permisibles», sin importar cuan carentes de significado sean. Como un ejemplo, Hardy utiliza el trabajo de Leonhard Euler sobre la serie $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ (véase [6, p. 14]). Hardy también cita las siguientes palabras de Euler (véase [6, p. 15]): «Las controversias suscitadas por el uso de las series divergentes son en gran parte 'verbales'». Hardy continúa diciendo: «Aquí, como siempre, Euler estuvo esencialmente acertado. El embrollo de la época sobre las series divergentes surgió principalmente, no de algún misterio particular de las series divergentes como tales, sino de la aversión a establecer definiciones formales y de la insuficiencia de la teoría de funciones de aquella época».

Antes de que Cauchy insistiera en la necesidad de definiciones explícitas, aún los matemáticos más ilustres no estaban inclinados a preguntar «¿Cuál es la *definición* de, digamos, $1 - 1 + 1 - \ldots$?», sino más bien se preguntaban algo completamente diferente «¿Qué *es* $1 - 1 + 1 - \ldots$?», ([6, p. 6]). Las manipulaciones que presentamos al comienzo ejemplifican este enfoque.

Después de Euler, Joseph Fourier y Simeón Denis Poisson fueron los analistas que más utilizaron las series divergentes ([6, p. 17]). Sin embargo, podemos decir de manera categórica, que las series divergentes fueron eliminadas gradualmente del análisis, reapareciendo solo en el último cuarto del siglo diecinueve ([6, §1.6]).

3. Úsenlas como son

Fue Jules Henry Poincaré quien, en un artículo publicado en *Acta Mathematica* en 1886, mostró cómo las series divergentes podrían dar aproximaciones excelentes a soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Los resultados de Poincaré dieron origen a un segundo enfoque, muy fructífero, de las series divergentes. La noción de desarrollo asintótico, introducida por Poincaré en su artículo, puso a las series divergentes en una posición de privilegio, que aún disfrutan en la actualidad (véase, por ejemplo, [1], [2] y las referencias ahí mencionadas).

Debemos decir que, aunque el concepto formal de desarrollo asintótico empezó con Poincaré, otros matemáticos, entre ellos Leonhard Euler, Abraham de Moivre, James Stirling, Pierre-Simon Laplace y Adrien-Marie Legendre, ya lo habían anticipado en casos particulares ([5, p. 1], [16, p. 151]).

4. Súmenlas de otra manera

Matemáticos de diferentes épocas no dejaron de advertir que las manipulaciones descuidadas de series divergentes llevaban con frecuencia a conclusiones interesantes, las cuales, en algunos casos, podían ser verificadas de otra manera. Así surge, al final del siglo diecinueve, un tercer enfoque de las series divergentes: ¿qué pasaría si sumar una serie pudiera significar algo totalmente distinto de la definición de Cauchy?

Fue Ernesto Cesàro quien, en un artículo publicado en 1890 en la revista *Bulletin des Sciences Mathématiques,* argumentó que una serie divergente podía ser sumada de una manera rigurosa. He aquí el método que propuso.

Definición 4.1. Una serie $\sum_{j\geq 1} a_j$ es sumable según Cesàro, con suma a, si existe el

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n} = a,$$

donde $s_n = \sum_{1\leq j\leq n} a_j$.

En tal caso, escribimos

$$\sum_{j\geq 1} a_j = a \ \ (C,1)\,,$$

y decimos que a es la suma según Cesàro de la serie, o la suma $(C,1)$ de la serie.

En realidad, Daniel Bernoulli ya había aplicado el método $(C,1)$ en 1713 a un tipo muy particular de series ([6, p. 8]). También había sido usado por Ferdinand George Frobenius en un artículo publicado en la revista *Journal für die reine und angewandte Mathematik* en 1880 ([6, pp. 8 y 389]).

Ludwig Otto Hölder, en su tesis doctoral, *Contributions to Potential Theory*, presentada en la Universidad de Tübingen en 1882, propuso una familia de métodos de sumabilidad [9]. Para cada $n\geq 2$, Hölder usó la iteración ([6, p. 96])

$$\underbrace{\left(\delta\sum\right)\circ\left(\delta\sum\right)\circ\cdots\circ\left(\delta\sum\right)}_{n \text{ veces}}$$

actuando en la sucesión $\{s_1, s_{2,}\ldots\}$, donde $\sum$ significa sumar de 1 a n y δ indica la división por n. De este modo, Hölder definió lo que se conoce como el método (H,k) de sumabilidad, para $k \geq 1$. Su trabajo apareció el mismo año, 1882, en la revista *Mathematische Annalen*.

A pesar de todo esto, reiteramos que la idea de dar una definición formal de la suma de una serie divergente general, se debe a Cesàro.

En su artículo de 1890, Cesàro itera el método $(C,1)$, que es igual al método $(H,1)$, de la siguiente manera: para definir el método Cesàro (C,k) para $k \geq 2$, se itera k veces la suma parcial, $\sum \circ \sum \circ \sum \ldots$, y el resultado se divide por un cierto número (véase [6, §5.4]), que es n solo cuando $k = 1$. Aún así, ambos métodos producen los mismos resultados de sumabilidad. Es decir,

Teorema 4.1. *(para la demostración, consulte [6, p. 103, teo. 49]).*
El método (C,k) es equivalente al método (H,k): $\sum_{j\geq 1} a_j = a$ (C,k) si, y solo si, $\sum_{j\geq 1} a_j = a$ (H,k).

El teorema que sigue muestra que el método (H,k) tiene propiedades muy razonables y muy útiles.

Teorema 4.2. *(para la demostración, consulte [6, p. 95, teos. 38 y 40]).*

1. *El método (H,k) es consistente: si $\sum_{j\geq 1} a_j = a$ (H,k) y $k' > k$, entonces $\sum_{j\geq 1} a_j = a$ (H,k').*
2. *El método (H,k) es regular: si $\sum_{j\geq 1} a_j$ converge a a, entonces $\sum_{j\geq 1} a_j = a$ (H,k).*
3. *El método (H,k) es lineal: si $\sum_{j\geq 1} a_j = a$ (H,k) y $\sum_{j\geq 1} b_j = b$ (H,k), entonces*
$$\alpha \sum_{j\geq 1} a_j + \beta \sum_{j\geq 1} b_j = \alpha a + \beta b \ \left(H,k\right),$$
para todo par de números α, β.
4. *El método (H,k) es estable: $\sum_{j\geq 1} a_j = a$ (H,k) si y solo si, $\sum_{j\geq 2} a_j = a - a_1$ (H,k).*

En este teorema, 1) implica que es suficiente probar la regularidad del método $(H,1)$.

Del teorema 4.1 deducimos que el método (C,k) tiene las mismas propiedades.

El método $(H,1)$ es regular en un sentido más amplio: Si la sucesión $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de sumas parciales diverge hacia infinito, también diverge hacia infinito en el sentido $(H,1)$ ([6, p. 10]). Cuando un método es regular en este sentido más amplio, se dice que el método es totalmente regular.

El teorema 4.1 no se extiende al caso en que la sucesión $\{s_n\}_{n\geq 1}$ diverge hacia infinito en el sentido (C,k). En efecto ([6, p. 107, teo. 54]), si la sucesión $\{s_n\}_{n\geq 1}$ diverge hacia infinito en el sentido (C,k), también diverge hacia infinito en el sentido (H,k). Sin embargo, la recíproca es, en general, falsa para $k>1$.

Puede decirse, y se ha dicho, mucho acerca de estos y otros métodos de sumabilidad (véase, por ejemplo, [6], [16, cap. VIII, §8.41], [20, cap. III], [17]. En lo que sigue, nos concentraremos en el método (H,k).

Veamos si el teorema 4.2 nos permite justificar (1). Comenzamos con el siguiente resultado.

Teorema 4.3.

$$1-1+1-\cdots=\frac{1}{2}\ (H,1)\,. \tag{9}$$

Demostración. Antes de probar (9), veamos, intuitivamente, por qué tiene que ser cierta.

Como mencionamos en la sección 1, las sumas parciales s_n de la serie $1-1+1-\ldots$ forman la sucesión $\{1,0,1,0,\ldots\}$, que no converge. Para n fijo, aproximadamente $\frac{n}{2}$ términos de la suma $s_1+s_2+\cdots+s_n$ son cero. Es decir, la cantidad

$$h_n^1=\frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n}$$

es aproximadamente igual a $\frac{n}{2n}$, que es $\frac{1}{2}$.

En términos matemáticos precisos, un simple argumento inductivo muestra que

$$h_n^1=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{si } n \text{ es par,}\\ \frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n} & \text{si } n \text{ es impar.}\end{cases}$$

Como existe el

$$\lim_{n\to\infty} h_n^1=\frac{1}{2},$$

resulta que

$$1-1+1-\cdots=\frac{1}{2}\ (H,1)\,.$$

Esto completa la prueba del teorema. □

Observemos que los teoremas 4.3 y 4.2 justifican la igualdad (5) y la suma $\frac{1}{2}$, en el sentido $(H,1)$.

Teorema 4.4.

$$1-2+3-\cdots=\frac{1}{4}\ (H,2)\,. \tag{10}$$

Demostración. Para la serie $1-2+3-\ldots$, la sucesión de sumas parciales es $\{1,-1,2,-2,\ldots\}$, que no converge.

Usando un argumento inductivo obtenemos que, en este caso,

$$h_n^1=\begin{cases}0 & \text{si } n \text{ es par,}\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2n} & \text{si } n \text{ es impar.}\end{cases} \tag{11}$$

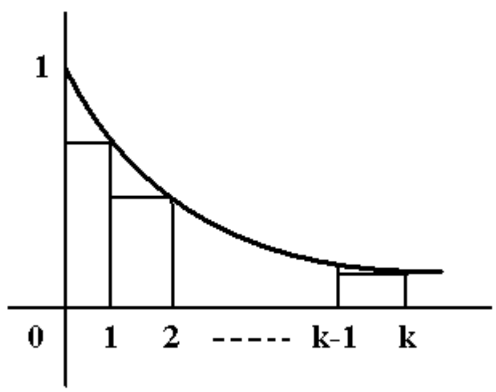
Como la sucesión $\{h_n^1\}_{n\geq 1}$ no tiene límite cuando $n \to \infty$, concluimos que la serie $1 - 2 + 3 - \dots$ no es $(H, 1)$ sumable. Entonces, intentamos sumarla en el sentido $(H, 2)$. Aquí también podemos dar una justificación intuitiva, aunque la explicación no es tan sencilla como en el teorema 4.3. De acuerdo con (11), si fijamos n, aproximadamente $\frac{n}{2}$ términos en

$$\frac{h_1^1 + h_2^1 + \cdots + h_n^1}{n}$$

son cero, mientras que cada término distinto de cero es igual a $\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2j+1)}$ para un cierto $j \geq 0$. Es decir, cuando $n = 2k + 1$,

$$h_n^2 = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{2\,(2j+1)}\right) = \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{4\,(2k+1)}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{2j+1}}_{(i)},$$

aproximadamente. Solo falta mostrar que (i) va a cero cuando k tiende a infinito. Para ello fijamos $k \geq 1$ y consideramos el diagrama donde la



curva es el gráfico de la función $x \to \frac{1}{2x+1}$ para $0 \leq x \leq k$.

Resulta que

$$\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{2j+1} = 1 + \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2j+1} \underset{\text{diagrama}}{\leq} 1 + \int_0^k \frac{dx}{2x+1}$$
$$= 1 + \frac{\ln(2k+1)}{2}.$$

O sea,

$$0 \leq (i) \leq \frac{1}{4\,(2k+1)}\left(1 + \frac{\ln(2k+1)}{2}\right) \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Casi las mismas cuentas, hechas con más exactitud, nos darán la prueba de (10).

En efecto,

$$h_1^1+h_2^1+\cdots+h_n^1=\begin{cases} h_1^1+h_3^1+\cdots+h_{2k-1}^1 & \text{si } n=2k,\ k\geq 1,\\ h_1^1+h_3^1+\cdots+h_{2k+1}^1 & \text{si } n=2k+1,\ k\geq 1.\end{cases}$$

De este modo, cuando $n=2k$ para $k\geq 1$,

$$\begin{aligned} h_n^2 &= \frac{h_1^1+h_3^1+\cdots+h_{2k-1}^1}{2k} = \frac{1}{2k}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\,(2j-1)}\right)\\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{4k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2j-1} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2j-1}\right),\end{aligned}$$

mientras que, cuando $n=2k+1$ para $k\geq 1$,

$$\begin{aligned} h_n^2 &= \frac{h_1^1+h_3^1+\cdots+h_{2k+1}^1}{2k+1} = \frac{1}{2k+1}\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\,(2j+1)}\right)\\ &= \frac{k+1}{2\,(2k+1)}+\frac{1}{2\,(2k+1)}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{2j+1}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{2k+1}+\frac{1}{2k+1}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{2j+1}\right).\end{aligned}$$

Volviendo a usar el diagrama,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2j-1}\right) \underset{l=j-1}{=} \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{1}{2l+1}\right)\\ \leq\ &\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\int_1^k\frac{1}{2x+1}dx\right)\\ =\ &\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{k}+\frac{1}{2k}\ln\left(2k+1\right)\right) \underset{k\to\infty}{\to} \frac{1}{4},\end{aligned}$$

mientras que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{2k+1}+\frac{1}{2k+1}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{2j+1}\right)\\
= \;&\frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{2k+1}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+1}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2j+1}\right)\\
\leq \;&\frac{1}{2}\left(\frac{k+2}{2k+1}+\frac{1}{2k+1}\int_{0}^{k}\frac{1}{2x+1}dx\right)\\
= \;&\frac{1}{2}\left(\frac{k+2}{2k+1}+\frac{1}{2\left(2k+1\right)}\ln\left(2k+1\right)\right)\underset{k\to\infty}{\to}\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$1-2+3-\cdots=\frac{1}{4}\left(H,2\right).$$

Esto completa la prueba del teorema. □

Los teoremas 4.4, 4.3 y 4.2 justifican, en el sentido $(H,2)$, las cuentas que culminan con la igualdad (6) y la suma $\frac{1}{4}$.

Aunque todo esto pinta muy bien, desafortunadamente, no hay manera de justificar, en el sentido (H,k), para ningún $k\geq 2$, las «igualdades» que nos llevan a (7).

La primera dificultad es que la igualdad

$$S-B=4S$$

no es cierta. En efecto, lo que se puede decir, al menos formalmente, es que

$$S-B=0+4+0+8+0+12+\ldots$$

Aún si S fuera (H,k) sumable para algún $k\geq 2$, el quitar un número infinito de ceros puede afectar el comportamiento de la serie $S-B$. Para dar un ejemplo sencillo, afirmamos que

$$1-1+0+1-1+0+\cdots=\frac{1}{3}\;\left(H,1\right), \tag{12}$$

mientras que el teorema 4.3 prueba que $1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}\;(H,1)$.

Cuando se agregan ceros a una serie, se dice que se la ha diluido ([6, p. 59, §3.9]).

Para comprobar (12), como en casos anteriores, comenzamos con una «prueba» intuitiva. Calculando algunas sumas parciales,

n	s_n	n	s_n	n	s_n	n	s_n
1	1	4	1	7	1	10	1
2	0	5	0	8	0	11	0
3	0	6	0	9	0	12	0

vemos que, aproximadamente, para cada $n \geq 1$, $\frac{n}{3}$ términos son iguales a uno, mientras que $\frac{2n}{3}$ términos son iguales a cero. Es decir, aproximadamente,

$$h_n^1 = \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}.$$

Más precisamente,

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 3k+1 \quad \text{para} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad n = 3k+2 \quad \text{para} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad n = 3k+3 \quad \text{para} \quad k \geq 0 \end{cases}.$$

Si $n = 3k+1$ para algún $k \geq 0$,

$$h_n^1 = \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = \frac{k+1}{3k+1} \underset{k\to\infty}{\to} \frac{1}{3}.$$

Si $n = 3k+2$ para algún $k \geq 0$,

$$h_n^1 = \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = \frac{k+1}{3k+2} \underset{k\to\infty}{\to} \frac{1}{3}.$$

Finalmente, si $n = 3k+3$ para algún $k \geq 0$,

$$h_n^1 = \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = \frac{k+1}{3k+3} \underset{k\to\infty}{\to} \frac{1}{3}.$$

Observemos que los conjuntos $\{3k+1\}_{k\geq 0}$, $\{3k+2\}_{k\geq 0}$ y $\{3k+3\}_{k\geq 0}$, son los números que, al ser divididos por tres, tienen resto igual a uno, dos y cero, respectivamente. Es decir, esos conjuntos son las tres clases de congruencia módulo tres, que, por lo tanto, forman una partición de los números naturales. Esto también se puede comprobar directamente, sin aludir a congruencias.

Podemos decir entonces que existe el

$$\lim_{n\to\infty} h_n^1 = \frac{1}{3}.$$

Nada de esto ocurre cuando la serie converge, o diverge ([6, p. 59, §3.9]). En efecto, la convergencia de la serie, y su suma, no son afectadas cuando se intercala, de cualquier forma, un número arbitrario de ceros. Además, si la serie diverge, cualquier dilución será divergente. Este resultado y el teorema que sigue, prueban que la serie $S - B$ no es (H, k) sumable, para ningún $k \geq 1$.

Teorema 4.5. *La serie $1 + 2 + 3 + \ldots$ no es (H, k) sumable, para ningún $k \geq 1$. Más concretamente, si*

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{l=1}^{n} l, \\ h_n^1 &= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} s_l \end{aligned}$$

y

$$h_n^k = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} h_l^{k-1}$$

para $k \geq 2$, entonces

$$h_n^k \underset{n \to \infty}{\to} \infty,$$

para cada $k \geq 1$ fijo.

Demostración. Comenzamos observando que, por inducción, obtenemos la igualdad

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

para todo $n \geq 1$. Así,

$$s_n \geq \frac{n^2}{2}.$$

O sea,

$$h_n^1 \geq \frac{1}{2n} \sum_{l=1}^{n} l^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n} \geq \frac{n^2}{6} \underset{n \to \infty}{\to} \infty. \tag{13}$$

Observemos que la igualdad

$$\sum_{l=1}^{n} l^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

se puede probar por inducción.

De (13) concluimos que la serie $1 + 2 + 3 + \dots$ no es $(H, 1)$ sumable. Veamos qué pasa en el siguiente nivel de sumabilidad.

$$h_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} h_l^1 \geq \frac{1}{6n} \sum_{l=1}^{n} l^2 \geq \frac{n^2}{6^2} \underset{n \to \infty}{\to} \infty,$$

de donde resulta que la serie tampoco es $(H, 2)$ sumable.

Supongamos que

$$h_n^{k-1} \geq \frac{n^2}{6^{k-1}}$$

para $k \geq 2$ fijo.

Entonces, de acuerdo con (13),

$$\begin{aligned} h_n^k &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} h_l^{k-1} \geq \frac{1}{6^{k-1} n} \sum_{l=1}^{n} l^2 \\ &= \frac{1}{6^{k-1}} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} \geq \frac{n^2}{6^k} \underset{n \to \infty}{\to} \infty\ . \end{aligned}$$

Es decir, hemos demostrado, por inducción, que la serie no es (H, k) sumable, para ningún $k \geq 1$.

Esto completa la prueba del teorema. $\square$

Usando el teorema 4.1, concluimos que la serie $1+2+3+\ldots$ tampoco es (C,k) sumable, para ningún $k \geq 1$.

Aunque los cálculos son un poco más complicados, también es posible demostrar, directamente, que la serie $0+4+0+8+0+12+\ldots$ no es (H,k) sumable, para ningún $k \geq 1$.

Es natural preguntarse si otros métodos de sumabilidad podrían dar el resultado deseado. La respuesta es, en general, que no. Cada método de sumabilidad «natural», tiene asociado un teorema «de limitación» ([6, p. 57]), que ayuda a decidir qué series divergentes puede sumar. Por ejemplo, si la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ es sumable $(H,1)$ con suma s, esto implica que $\frac{a_n}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$ ([6, p. 57, teo. 13]). Además, Hardy dice que (véase [6, p. 6]) «Generalmente, usando métodos de sumabilidad 'normales', parece que existe solamente una suma que es 'razonable' asignar a una serie divergente: por ejemplo, todos los cálculos 'naturales' con la serie $1-1+1-\ldots$ parecen apuntar a la conclusión de que su suma debería ser $\frac{1}{2}$. Podemos idear argumentos de sumabilidad que lleven a un resultado diferente (véase pág. 14) pero, cuando los usamos, siempre parece que, de alguna manera, no estamos siguiendo las 'reglas del juego'». Lo que Hardy quiere decir, entre otras cosas, es que muchos métodos 'exóticos' de sumabilidad, no tienen las propiedades enunciadas en el teorema 4.2.

A pesar de todo esto, la realidad es que en la página 22 de ([11], volumen I: *An Introduction to the Bosonic String*) aparece la igualdad (1). ¿Cómo es esto posible? Para entenderlo, hay que recordar que para un físico, las cantidades infinitas no tienen sentido.

Ya el ingeniero y físico matemático Oliver Heaviside lo expresó en una serie de tres artículos, titulados «Sobre los operadores de la física matemática», que presentó ante la Real Sociedad Británica entre 1892 y 1894: «Las soluciones a los problemas físicos deben de ser siempre establecidas en términos finitos, de lo contrario producimos disparates ...» ([6, p. 36]).

Los físicos evitan las cantidades infinitas usando procesos llamados de regularización, que incluyen, no solo el tipo de manipulaciones que realizamos anteriormente con series, sino, valores principales y partes finitas ([12, pp. 38 y 42]). Por ejemplo, sabemos que la función $\frac{1}{x}$ no es integrable en el intervalo $[-1,1]$. Pero si fijamos $0<\varepsilon<1$ y consideramos

$$\int_{1>|x|>\varepsilon} \frac{dx}{x}, \tag{14}$$

el que la función $\frac{1}{x}$ sea impar, implica que (14) es igual a cero. Por lo tanto existe el

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{1>|x|>\varepsilon} \frac{dx}{x} = 0.$$

Entonces escribimos

$$vp \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0,$$

donde vp quiere decir valor principal.

En el caso de la integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2},$$

donde no podemos usar el mismo argumento de paridad, obtenemos, para $0 < \varepsilon < 1$,

$$\int_{1>|x|>\varepsilon} \frac{dx}{x^2} = -2 + \frac{2}{\varepsilon}.$$

Aquí no hay manera de evitar el término $\frac{2}{\varepsilon}$, que va a infinito cuando ε tiende a cero. En este caso, simplemente ignoramos ese término y decimos que

$$pf \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -2,$$

donde pf quiere decir parte finita.

Observemos que la parte finita de una integral ya no está vinculada a la noción de área bajo la curva.

El método de regularización que nos permitirá ¡finalmente! justificar la igualdad (1), usa el concepto de prolongación analítica, aplicado a una función muy especial.

5. La función zeta de Euler-Riemann y la igualdad $1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12}$

Hay muchas maneras de definir la función zeta de Euler-Riemann, $\zeta(s)$, dependiendo de los valores de la variable compleja s (véase, por ejemplo, [19]). Leonhard Euler, en 1740, la consideró para valores enteros positivos de s. En 1850, Pafnuty Chebyshev la extendió a $\operatorname{Re}(s) > 1$. En efecto, se la puede definir, para $\operatorname{Re}(s) > 1$, como la suma de la serie absolutamente convergente $\sum_{k\geq 1} 1/k^s$. Esto es,

$$\zeta(s) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^s} \tag{15}$$

cuando $\operatorname{Re}(s) > 1$. Bernhard Riemann probó, en 1859, que $\zeta(s)$ es analítica en ese dominio.

La función $\zeta(s)$ así definida, puede ser prolongada analíticamente a una única función con dominio $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, para la cual $s = 1$ es un polo simple con residuo igual a 1 (véase, por ejemplo, [7, p. 160]).

Esta prolongación analítica, que debido a la unicidad también se denota $\zeta(s)$, tiene varias representaciones explícitas. Por ejemplo,

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{1-s}} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (k+1)^{-s}, \tag{16}$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (k+1)^{1-s}. \tag{17}$$

La representación (16) fue conjeturada por Konrad Knopp, y probada por Helmut Hasse en 1930. Es interesante observar que Hasse usó en su demostración un método de sumabilidad de series debido a Euler (véase, por ejemplo, [6, pp. 7, 70 y 178]). Quizá porque la prueba apareció como un apéndice en otro artículo de Hasse, permaneció ignorada casi por completo, hasta que fue publicada, en inglés, en 1994 [15]. La representación (17) aparece en el mismo artículo de Hasse. Sin embargo, Iaroslav V. Blagouchine menciona en [4] que ya había sido obtenida por Joseph Ser en 1926 [14].

Aunque mucho más se puede decir sobre la historia de la función $\zeta(s)$ (véase, por ejemplo, [3] y [4]), aquí la dejamos, pues debemos retornar a nuestra serie.

La serie $1+2+3+\ldots$ aparece cuando en el lado derecho de (15) se pone, formalmente, $s=-1$. Por otra parte, es completamente correcto el poner $s=-1$ en la serie (16), obteniendo

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{3} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (k+1). \tag{18}$$

En este sentido, escribimos

$$1+2+3+\cdots = \zeta(-1).$$

Finalmente probamos el siguiente resultado.

Teorema 5.1. *El valor $\zeta(-1)$ dado por (18) es igual a $-\frac{1}{12}$.*

Demostración. Para $n \geq 0$ fijo, tenemos

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (k+1) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k}_{(i)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}}_{(ii)}.$$

El término (i) es cero cuando $n=0$ y también cuando $n \geq 1$ y $k=0$. Por lo tanto, para $n \geq 1$ fijo,

$$\begin{aligned}
(i) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \underset{k-1=j}{=} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} \frac{n!}{j!\,(n-j-1)!} \\
&= -n \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{(n-1)!}{j!\,(n-1-j)!} = -n\,(1+(-1))^{n-1} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \geq 2, \\ -1 & \text{si} \quad n = 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

mientras que

$$(ii) = (1+(-1))^n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \geq 1, \\ 1 & \text{si} \quad n = 0. \end{cases}$$

Es decir,

$$-\frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (k+1) = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}.$$

Esto completa la prueba del teorema. □

Así, la igualdad (1) queda perfectamente justificada. Debido a la unicidad, hubiéramos obtenido el mismo resultado, aunque un poco más laboriosamente, usando la representación (17).

Por supuesto, los físicos de Nottingham sabían del método de regularización por medio del principio de prolongación analítica. Así, no tenían duda de que sus cálculos salvajes podían ser domesticados.

Reconocimiento. Agradecemos a la Doctora Marianne Freiberger el habernos indicado un error en una version previa.

Bibliografía

[1] J. Álvarez, *Hablemos de series divergentes*, Materials Matemàtics, Universidad Autónoma de Barcelona, 2014.

[2] J. Álvarez y C. Gómez, «Más no siempre es mejor!, segunda parte», *Laberintos e Infinitos*, vol. 36, 2014, 7–21, `http://laberintos.itam.mx/numero-36`.

[3] R. Ayoub, «Euler and the zeta-function», *Amer. Math. Monthly*, vol. 81, 1974, 1067–1086.

[4] I. V. Blagouchine, «Three notes on Ser's and Hasse's representations for the zeta function», *Integers: The Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, vol. 18A, 2018, 1–45.

[5] E. T. Copson, *Asymptotic expansions*, Cambridge University Press, 1967.

[6] G. H. Hardy, *Divergent series*, Oxford, 1949, Reimpreso por Chelsea Publishing Co. 1991. Reimpreso por American Mathematical Society 2000 y 2013.

[7] S. G. Krantz, *Riemann's zeta function*, Handbook of Complex Variables, Birkhäuser, 1999, sección 13.2.
[8] D. Oberbye, «Joseph Polchinski, leading theorist on multiple universes, dies at 63», 7 de febrero de 2018, https://www.nytimes.com/2018/02/07/obituaries/joseph-polchinski-63-leading-theorist-on-multiple-universes-dies.html.
[9] J. J. O'Connor y E. F. Roberts, «The MacTutor History of Mathematics archive», http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Holder.html.
[10] J. Polchinski, «Memories of a theoretical physicist», 31 de agosto de 2017, https://arxiv.org/abs/1708.09093.
[11] ———, *String theory*, vol. I and II, Cambridge University Press, 1998.
[12] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, 1973, Reimpresión corregida y extendida.
[13] Science Section, «The new york times», 4 de febrero de 2014.
[14] J. Ser, «Sur une expression de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann», *Comptes rendus hebdomadaires de séances de l'Académie des Sciences*, vol. 182, 1926, 1075–1077.
[15] J. Sondow, «Analytic continuation of Riemann's zeta function and values at negative integers via Euler's transformation of series», *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 120, núm. 2, 1994, 421–424, https://www.ams.org/journals/proc/1994-120-02/S0002-9939-1994-1172954-7/S0002-9939-1994-1172954-7.pdf.
[16] E. T. Whittaker y G. N. Watson, «A course of modern analysis», reimpresión de la cuarta y última edición, publicada en 1927. New York: The MacMillan Company, Cambridge: At the University Press, 1945, Reimpreso por Cambridge University Press 1996. La primera edición, publicada en 1902, de la cual E. T. Whittaker es el único autor, puede verse en https://books.google.com/books?id=_hoPAAAAIAAJ.
[17] Wikipedia, «Divergent series», https://en.wikipedia.org/wiki/Divergent_series.
[18] ———, «Joseph Polchinski», https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Polchinski.
[19] ———, «Riemann zeta function», https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function.
[20] A. Zygmund, *Trigonometric series*, 2.ª ed., vol. I & II Combined, Cambridge University Press, 1959.